国家自然科学基金资助项目

# 泛函微分方程理论

郑祖庥 著

安徽教育出版社

(皖)新登字 03 号

泛函微分方程理论

郑祖庥 著

安徽教育出版社出版发行

(合肥市金寨路 381 号)

新华书店经销 安徽省出版总社激光照排服务部照排

合肥杏花印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:15.75 字数:380000

1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月第 1 次印刷

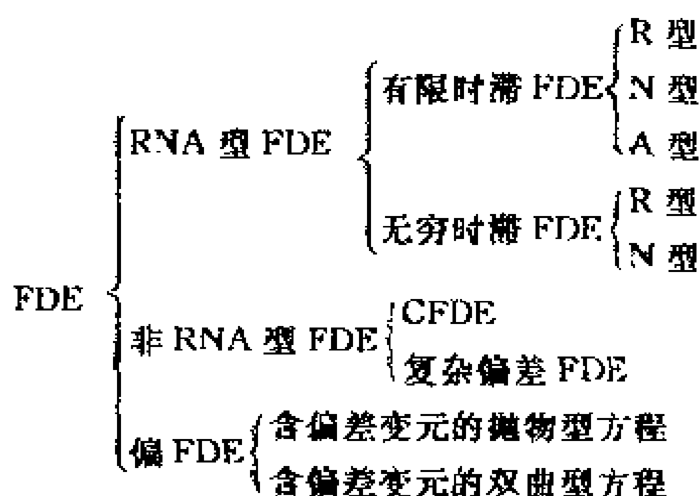
印数:2,000

ISBN7—5336—1391—0/G·1834

定价:12.00 元

# 前　言

发现第一个泛函微分方程至今已过去两个多世纪了，但是系统的研究工作只是在本世纪五十年代才开始的. 近 20 年来在极其广泛的应用课题推动下获得了实质性的、全面的进展. 我们用下式表达泛函微分方程理论的全貌：




其中记号 FDE——泛函微分方程，R. N. A. 分别表示滞后型、中立型、超前型，C 为混合型. R. N. A. 型与非 R. N. A. 型 FDE 仅有一个独立变量，偏 FDE 的自变元则多于 1 个. 所谓复杂偏差 FDE 是指偏差变元中含有未知函数甚至未知函数导数的情形. 表中不把具无界滞量的 FDE 单独列为一类，是因为它如同有界滞量的差分微分方程是有界滞量 FDE 的一个特殊情形一样，仅仅是无穷时滞

FDE 的一种特例，并非独具数学特征的新方程类(参看第一章的阐述).

在 FDE 理论框架中，有限时滞 FDE 是最基本、最重要的部分. J. K. Hale 的书[4]是这部分内容最完整的总结，当然是我们的重要参考依据. 本书将包括表中列出的所有方向，它是笔者自 1979 年以来为安徽大学青年教师与研究生讲演内容的总结，也综合了笔者在西安交通大学、海南师范学院、广西师范大学、南开大学"动力系统年"的讲稿、讲义内容. 全书涉及基本理论、线性系统、稳定性与有界性、周期解与概周期解、振动性与渐近性、FDE 的分类问题、无穷时滞系统、偏泛函微分方程与非 RNA 泛函微分方程等等. 我们期望这将为有意涉足本领域的研究生和数学工作者提供一本内容较为完备的教材.

本书内容的取舍原则是：对基本概念的阐述力求详尽完整，对国内外专著未涉及或者少涉及的内容，如非 R. N. A. 型 FDE、概周期 FDE、FDE 的分类问题、偏泛函微分方程等等给以特别的关注，而各类专著普遍介绍的内容，除基本理论以外，我们只择其核心部分. 为了扩大读者的知识面，在不同的场合我们尽可能引入不同的推导证明手段.

本书各部分内容之间的关系，反映了 FDE 理论的构成，即有限滞量 FDE 是基础、是核心. 对无穷时滞系统附加形形色色的公理体系，仅仅为了把有限时滞的有关结果能够顺利推广. 还没有发现有这样的研究工作：通过无穷时滞 FDE 的研究找到了有限时滞 FDE 原先不能得到的实质性规律或定理. 这意味着虽然只要在区间$(-\infty,\sigma-r)$上补充定义 $\varphi(\theta)$便可认为有限时滞 FDE 是无穷时滞 FDE 的特殊情形，仍不应该以无穷时滞 FDE 作为基础和核心部分，也不是 FDE 未来唯一的发展方向，我们认为，最具挑战性也最有希望的研究方向应当是：非 R. N. A. 型 FDE、偏 FDE 以及 FDE 在空间 $C$ 中的几何理论与分歧问题. 因为这三者应用上正蓬

勃发展，理论上的系统研究工作才刚刚开始. 我们期望本书的这部分内容能引起读者的兴趣，起到抛砖引玉的作用.

限于篇幅我们不可能把我国的现有工作一一介绍. 但有关文献则尽可能列出. 国外文献只挑选与本书有直接关系的部分列出，国内作者用英文发表的论文并入西文文献部分. 总的处理方式是把参考文献分为三个部分：专著，中文文献，西文及俄文文献，为统一起见，仍统一排序.

最后，由于仓促写就，限于水平，不妥与疏漏之处在所难免，敬祈批评指正.

作者对严云锦同志细心校订书稿深表谢意.

郑祖庥

1992年12月

# 目　录

# 第一章

# 概　论

## §1 问题的提出

### 1. 历史背景

1750 年 Euler 提出一个古典的几何学问题：是否存在一种曲线，它经过平移、旋转运动以后能与其渐缩线重合？1771 年，Condorcet 讨论这个问题，导出了已知的、历史上第一个泛函微分方程（参看本节例 15）. 此后一个世纪中，许多著名的数学家，如 Bernoulli, Laplace, Poisson 以及 Babbege 等都提出过类似的方程（例 15）. 鉴于这些类型方程的复杂性，一直未能对它们进行有效地研究，而作为数学的一种历史悬案搁置下来了. 七十年代以来，在生物学、物理学、控制理论和工程问题中出现了类似的、甚至更为复杂的这类方程，促使人们对这种困难的课题开始认真地分析，但收效甚微. 八十年代以后才有一些有趣的初步成果，本书的最后一章将系统介绍.

本世纪以来，自然科学与社会科学的许多学科中提出了大量时滞动力学系统问题，如核物理学、电路信号系统、生态系统、化工循环系统、遗传问题、流行病学、动物与植物的循环系统. 社会科学方面主要是各种经济现象时滞的描述，如商业销售问题、财富分布理论、资本主义经济周期性危机、运输调度问题、工业生产管理等

等. 各种工程系统中的时滞现象更为普遍,特别是自动控制系统. 时滞动力学系统的数量庞大,形式较为规整,自变量 $t$ 通常表示时间. 这类方程比起上述的复杂 FDE 更接近于经典微分方程的种种性质,其系统理论构成了迄今为止的泛函微分方程理论的主体,自然也是本书的主要部分.

严格地说,在动力学系统中时滞通常是不可避免的,即使以光速传递的信息系统也不例外. 在这个意义下,常微分方程组

$$\dot{x}(t)=f(t,x) \quad x\in R^n \tag{1.1}$$

只是动力学系统的一种近似描述. 对不同的应用领域,通常从以下三个不同的角度去处理系统中的时滞:

①寻求略去滞量不改变动力系统解的指定性态的条件. 换言之,在这些条件下用常微分方程去描述动力学系统已够精确,而不必顾及系统中的时滞因素.

②对于略去滞量便达不到必要的精确度甚至导致错误的系统,以及若不考虑滞量便无法建立数学模型的系统 ,则需要建立一系列新的概念和方法去直接研究它们解的种种性态.

③为了使系统具有期望的性态,设法控制滞量和利用滞量. 在某些系统中引入了精心设计的延滞部件.

其中第②点是建立泛函微分方程理论的主要依据,但三者都是这一理论的组成部分.

### 2. 应用例子

在这些一般性的叙述之后,我们要给出一系列不同应用背景中提出的泛函微分方程,或者稍加推导,或者给出引用的文献,使读者能概略地了解一下在动力学系统中是如何引入滞量,以及泛函微分方程极其广泛的类型和特点的.

**例 1** 设 $N(t)$ 为时刻 $t$ 人口总数,本地区允许的最大人口数目为 $P_0$,$r=m-n$ 为人口的增长率,其中 $m,n$ 分别为出生率与死亡

率，它们可以是 $t$ 的函数. 1798 年，英国神父 Malthus 建立了最简单的人口增长模型为

$$\dot{N}(t)=rN(t) \tag{1.2}$$

得出了人口按几何级数增长的结论. 1838 年，P. F. Verhulst 修改了 (1.2)，引入类似于电感器产生阻抗的生物反馈因于 $(1-\frac{N(t)}{P_0})$，得出 (1.2) 的修正式

$$\dot{N}(t)=rN(t)(1-\frac{N(t)}{P_0}) \tag{1.3}$$

考虑妊娠期及其他因素的滞后作用，E. M. Wright 给出比 (1.3) 更为精确的时滞系统

$$\dot{N}(t)=rN(t)(1-\frac{N(t-\tau)}{P_0}) \qquad \tau>0 \tag{1.4}$$

更一般地有

$$\dot{N}(t)=N(t)f(N(t-\tau)) \qquad \tau>0 \tag{1.5}$$

其中 $f$ 由物种发展的规律确定.

**例 2** 在例 1 中，$N(t)$ 表示某一物种的总数，$\dot{N}(t)$ 不仅依赖于 $t-\tau$ 时的种群数量，而且由整个历史时期中的因素决定，我们得到具分布时滞的生态方程

$$\dot{N}(t)=N(t)\int_0^{\infty}f(N(t-u))P(u)du \tag{1.6}$$

其中 $P(u)$ 是概率分布函数，称为核. 通常有两种取法：

弱核函数 $\qquad P(u)=Ke^{-\alpha u} \qquad (1.7)$

强核函数 $\qquad P(u)=Kue^{-\alpha u} \qquad (1.8)$

且成立

$$\int_0^{\infty}P(u)du=1 \tag{1.9}$$

**例 3** 考虑两种生物群之间的相互作用，它们可以是捕食与被捕食，资源竞争或者互惠. 设捕食者总数为 $x_2(t)$，被捕食者总数为 $x_1(t)$，则二者的消长关系在不考虑滞后时可用如下的常微分方

程组描述

$$\dot{x}_1(t)=a_1(1-\frac{x_1(t)}{P_0})x_1(t)-c_1x_1(t)x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-a_2x_2(t)+b_2x_1(t)x_2(t) \tag{1.10}$$

(1.10)中第一式的最后一项假定了捕食者的食量随 $x_1(t)$ 的增长而增长，这通常是不合理的，应当用消食功能函数 $\varphi(x_1)$ 代替 $c_1x_1$，对(1.10)而言，常用的 Holling 功能函数有如下三种形式：

适用于藻类及低等生物的 $\varphi$，记 $b_1=a_1/P_0$，有

$$\varphi(x_1)=\begin{cases}\frac{b_1}{a_1}x_1 & 0\leqslant x_1\leqslant a_1\\ b_1 & x_1>a_1\end{cases} \tag{1.11}$$

适用于无脊椎动物的功能函数为

$$\varphi(x_1)=\frac{a_1x_1}{1+b_1x_1} \tag{1.12}$$

适用于脊椎动物的 $\varphi$ 为

$$\varphi(x_1)=\frac{a_1x_1^2}{1+b_1x_1^2} \tag{1.13}$$

于是(1.10)应为

$$\dot{x}_1(t)=a_1(1-\frac{x_1(t)}{P_0})x_1(t)-x_2(t)\varphi(x_1)$$
$$\dot{x}_2(t)=-a_2x_2(t)+\frac{b_2}{c_1}\varphi(x_1)x_2(t) \tag{1.14}$$

考虑到捕食者的生殖周期较长，记为 $\tau$，则(1.14)中引入时滞后为

$$\dot{x}_1(t)=a_1(1-\frac{x_1(t)}{P_0})x_1(t)-\varphi(x_1)x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-a_2x_2(t)+K\varphi(x_1(t-\tau))x_2(t-\tau) \qquad K=\frac{b_2}{c_1} \tag{1.15}$$

仍记 $m$ 为出生率，$n$ 为死亡率，$a_1=m-n$，略去生物反馈因子（相当于 $P_0=+\infty$）(1.14)简化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= mx_1(t) - nx_1(t) - x_2(t)\varphi(x_1) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_2(t) + K\varphi(x_1)x_2(t) \end{aligned} \tag{1.16}$$

若捕食者只吃被捕食者的成虫，而幼虫的成熟期为 $\tau_1$，则(1.16)为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= mx_1(t-\tau_1) - nx_1(t) - \varphi(x_1(t))x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_2(t) + K\varphi(x_1)x_2(t) \end{aligned} \tag{1.17}$$

若捕食者也有成熟期 $\tau_2$，而且只有成虫才捕食食饵成虫，则(1.16)为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= mx_1(t-\tau_1) - nx_1(t) - \varphi(x_1(t))x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_2(t) + K\varphi(x_1(t-\tau_2))x_2(t-\tau_2) \end{aligned} \tag{1.18}$$

类似地，(1.16)具分布时滞的方程(1.17)为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= m\int_0^\infty x_1(t-u)P(u)du - nx_1(t) - \varphi(x_1)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2x_2(t) + K\varphi(x_1)x_2(t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

例 4　在环境污染问题中，设污染物为有毒化学物质或放射性同位素．物种在区域 $D$ 中的总数为 $x_1(t)$，物种个体内的毒素浓度为 $x_2(t)$，环境中介质的毒素浓度为 $x_3(t)$，若 $x_1(t)$ 的妊娠期为 $\tau_1$，毒素在个体内停留 $\tau_2$ 时间以后排出体外(对排出部分而言)，环境内毒素进入个体的平均时间为 $\tau_3$，则得污染问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= rx_1(t) - cx_1(t)x_1(t-\tau_1) \\ \dot{x}_2(t) &= Kx_3(t-\tau_3) - ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -K_1x_3(t-\tau_3)x_1(t) \\ &\quad + g_1x_2(t-\tau_2)x_2(t) - hx_3(t) + u(t) \end{aligned} \tag{1.20}$$

其中 $r, c, K, K_1, a, g_1, h$ 都是正常数，$u(t) \geq 0$，表示毒素排入环境的速率．对某些系统可设 $u(t) = \text{const}$．也可以设 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ 中某一个或两个等于 0．

例 5　E. Volterra 改进了 V. Volterra 关于遗传学的一个数

学模型是具分布滞量的二阶系统

$$m\ddot{x}(t)+a^2x(t)+\int_0^{K(t)}K(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau=g(t) \quad (1.21)$$

其中 $m,a$ 为常数,$K,g$ 为已知函数.

**例 6** D. Israelson 与 A. Johnson 试图解释植物周期变化时导出了与例 4 类似的分布滞量系统. 例如向日葵当阳光改变角度时的转动反应总是存在滞后,转角 $\alpha$ 应满足方程[4]

$$\dot{\alpha}(t)=-K\int_1^{\infty}f(\tau)\sin\alpha(t-t_0-\tau)d\tau \quad (1.22)$$

**例 7** 对生物体循环的研究,常常用放射性同位素或者示踪蛋白,它们在生物体中的分布与某些化工系统的循环类似,都用线性差分微分方程组

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i x(t-\tau_i) \quad (1.23)$$

表述,其中 $x\in R^n$[375].

**例 8** 麻疹传播的 London 与 Yorke 模型为

$$\dot{S}(t)=\beta(t)S(t)[S(t-12)-S(t-14)-2r]+r \quad (1.24)$$

其中 $S(t)$ 表示时刻 $t$ 无免疫力的个体数目. $r(t)$ 是这种个体在人口中所占的比例,$\beta(t)$ 是人口特征函数,两个滞量 $\tau_1=12,\tau_2=14$ 分别为麻疹传染的潜伏期上、下限[378]. Cooke 与 Yorke 的淋病传播方程则为

$$\dot{S}(t)=g(s(t-\tau_1))-g(S(t-\tau_2)) \quad (1.25)$$

其中 $g$ 是在某闭区间之外消逝的非负函数[4].

**例 9** 在光谱理论中有一类椭圆型泛函偏微分方程的边值问题

$$Lu(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial R}{\partial x_j}+L_1(u(x))=f(x)$$

$$u\Big|_{[0,d]\times\partial G}=0,u\Big|_{x_1=0}=\sum_{i=1}^{m}r_i^1(x')u\Big|_{x_1=d} \quad (1.26)$$

$$u\Big|_{x_1=d}=\sum_{i=1}^{m}r_i^2(x')u\Big|_{x_1=d_i}$$

其中 $x\in R^n, x'=(x_2,\cdots,x_n)^T, G\subset R^{n-1}$ 为一有界域，$n\geqslant3$ 时 $\partial G\in C^2, x\in Q=(0,d)\times G$，算子 $L$ 在 $\overline{Q}$ 中是一致椭圆型的[405]. $a_{ij}=a_{ji}\in C^1(\overline{Q})$ $(i,\ j=1,\ 2,\cdots,n)$，$r^1,r^2\in C^2(\overline{G})$ 都是实值函数，$f\in L_2(Q)$ 是复值函数，$0=d_0<d_1\cdots<d_{m+1}=d$. $R$ 是混合型差分算子

$$Ru(x)=\sum_{j=-N}^{N}b_ju(x_1+j,x_2,\cdots,x_n) \quad b_j\in R$$

Volterra 在研究某种弹性材料动力学时也提出了泛函偏微分方程

$$U_t(x,t)-\Delta U(x,t)+\int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}U_{x_ix_j}(x,\tau)\Phi_{ij}(t,\tau)d\tau=f(x,t)$$

$$U_t(x,t)-\Delta U(x,t)+R(x,t)U(x,\omega(t))=f(x,t)$$

$$(1.27)$$

其中 $x\in R^n$，$\Delta$ 为 Laplace 算子，$R(x,t)$ 是一个线性微分算子，对 $\forall\ t,\omega(t)\in[0,t]$.

**例** 10　在经济学中对资本主义经济的周期性危机有如下方程[8]

$$\dot{U}(t)=aU(t)+bU(t-\tau)+f(t) \quad (1.28)$$

H. Bateman 对商业零售问题给出方程[76]

$$P(t)+\int_0^t f(t)P(t-\tau)d\tau=1 \quad (1.29)$$

其中 $P(t)$ 为时刻 $t$ 的店存商品数量，$f(t)$ 是商店补充进货速度.

J. Tinbergen 研究了造船工业的一个时滞微分方程

$$\dot{x}(t)+bx(t-\tau)=\varepsilon x^2(t-\tau),\quad \varepsilon=\text{const.} \tag{1.30}$$

其中 $x(t)$表示时刻 $t$ 的实有吨位数与计划值之差,$\tau$=const. 表示建造一艘船的平均周期,$b$ 为正常数.

**例 11** 物理学中的泛函微分方程是多种多样的. 如核物理中用计数器测量放射质点源强度时,便得方程

$$\dot{\pi}(t)+a[\pi(t)-\pi(t-\tau)e^{-a\tau}]=0 \tag{1.31}$$

倘若考虑为是核反应堆的慢衰减,则得

$$\dot{x}(t)=\int_t^{t+1}K(s)x(s)ds \tag{1.32}$$

上式两边求导,(1.32)化为

$$\dot{x}(t)=K(t+1)x(t+1)-K(t)x(t) \tag{1.33}$$

在弹性理论中考虑了遗留效应,便得出

$$\ddot{U}(t)+a^2U(t)+\int_0^t\ddot{U}(t)K(t-\tau)d\tau=f(t) \tag{1.34}$$

当考虑三极管振荡器中的传输时间时,导出了具有滞后变元的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)-f(x(t-r))\dot{x}(t-r)+x(t)=0 \tag{1.35}$$

R. Driver 等研究两个带电粒子在一定距离内互相吸引或排斥时,考虑了引力传递的时间,记相互作用的时滞为 $r_{12}(t)$、$r_{21}(t)$,得出运动方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t)&=f_1(x_1(t)-x_2(t-r_{21}(t)),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t-r_{21}(t)))\\ \ddot{x}_2(t)&=f_2(x_2(t)-x_1(t-r_{12}(t)),\dot{x}_2(t),\dot{x}_1(t-r_{12}(t)))\end{aligned} \tag{1.36}$$

**例 12** 研究火箭发动机燃烧过程的低频振荡问题时,记 $P(t)$ 为燃烧室的压力,其稳态值为 $\overline{P}$. $\dot{m}$是流过整个系统的稳态质量速率,$\overline{M}_g$ 为发动机热燃气的平均质量,$f(P)$是液体燃料达到燃烧临界的质量速率,$\tau$ 是从进气到燃烧的时滞. 作下列代换以简化方程. 令

$$\mu = \frac{\dot{m}_i - \bar{\dot{m}}}{\bar{\dot{m}}},\quad x = \frac{P - \overline{P}}{\overline{P}},\quad r = \tau\frac{\bar{\dot{m}}}{M_g},$$

$$s = t\frac{\bar{\dot{m}}}{M_g},\quad n = \left(\frac{d\log f}{d\log P}\right)_{P=\overline{P}}$$

则 $x$ 满足时滞方程

$$\frac{dx}{ds} + (1-n)x(s) + nx(s-r) = \mu(s-r) \tag{1.37}$$

例 13　大量考虑时滞问题的另一个领域是信息与控制系统，例如 Minorsky 关于船艇摇摆的运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + q\dot{x}(t-\tau) + Kx(t) = 0 \tag{1.38}$$

A. Callander 等讨论的自动调节系统则比(1.38)稍为复杂一点：

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \psi(t) + C(t) - u\theta(t) \\ -\dot{C}(t+1) &= \nu_1\theta(t) + \nu_2\dot{\theta}(t) + \nu_3\ddot{\theta}(t) \end{aligned} \tag{1.39}$$

H. H. Kpacoвckий 的最优控制系统模型，是用 Stieltjes 积分表示的滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + B(t)u(t),\ y(t) = Q(t)x(t)$$

$$\dot{u}(t) = \int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]y(t+\theta) + \int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,\theta)]u(t+\theta) \tag{1.40}$$

在通讯网络的研究中，关于无损传输线的数学模型是一个带有边值条件的偏微分方程，经变换后化为

$$\frac{d}{dt}[u(t) - Ku(t-\tau)] = f(u(t), u(t-\tau)) \tag{1.41}$$

其中 $\tau = 2/\sqrt{LC}$，$L$、$C$ 分别为电感与电容[380]。

例 14　数学的某些分支提出泛函微分方程的例子也不少。Cherwell 试图证明素数分布的一个性质：设 $Z(n)$ 为不大于 $n$ 的素数个数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} Z(n)\ln n/n = 1$，于是导出了方程

$$Z'(n)=-Z(n)Z(n^{\frac{1}{2}})/2n \tag{1.42}$$

显然，$Z(n)=(\ln n)^{-1}$是(1.42)的一个解.

**例** 15　古典的 Euler 几何问题：求一曲线使它能经运动而与它的渐缩线叠合.设曲线的参数向量方程为 $r(s)$，$s$ 表示弧长，其曲率半径 R(s)应满足方程：

$$R(s)\frac{dR(s)}{ds}=R(C_1+R(s)) \tag{1.43}$$

其中 $C_1$ 为常数.

Poisson 的几何问题：求一曲线 Γ，使 Γ 上任一点 $P(x,y)$的法线段 $PR$ 的平方与过 $R$ 的垂线段 $QR$ 的平方之差等于 1.这里 $R$ 是过 $P$ 的法线与 $x$ 轴的交点，$Q$ 是过 $R$ 平行于 $y$ 轴的直线与 Γ 的交点.这就导出

$$y^2(x)+y^2(x)y'^2(x)-y^2(x+y(x)y'(x))=1 \tag{1.44}$$

我们再给出一些导出复杂变元泛函微分方程的例子：

**例** 16　C. Б. Hopkин 指出，具有信号型依赖性的某种系统，以方程

$$\ddot{x}(t)+2\mu\dot{x}(t)+\gamma^2x(t)+rx(t-\tau(t,x))=0 \tag{1.45}$$

为数学模型，其中 $\mu,\gamma,r$ 皆为常数且恒设 $\tau(t,x(t))\geqslant 0$.

**例** 17　K. L. Cooke 提出了一个生物科学中极为重要的方程，它与遗传现象有关：

$$\dot{x}(t)+ax(t-h(t,x(t)))=F(t)\qquad t\geqslant t_0 \tag{1.46}$$

J. K. Hale，R. D. Driver 研究了(1.46)当 $h(t,x(t))=r-\mu K(t,x(t))$的情形. B. H. Stephan 对 $r=1$，$K(t)=\sin 2\pi t$，$F(t)=\sin 2\pi t$ 的情形讨论了周期解的存在性[408][409][410].

**例** 18　在时间对称电动力学中提出了如下的二阶方程[404]

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=\frac{1}{2}\alpha x(t-\tau)+\frac{1}{2}\beta x(t+\sigma)+\phi(t) \tag{1.47}$$

其中 $\alpha,\beta,\tau>0,\sigma>0$ 都是常数，$\phi(t)$是给定的函数，它也适用于某

些大尺度的天文学问题.

物理学中一维返回二体问题的方程为[416][417]

$$\dot{x}(t)=x(x(t)) \tag{1.48}$$

经典的电动力学的二体问题在[414][415]中给出了下述数学模型:

$$\dot{y}(t)=f(t,y(g(t,y(t)))) \tag{1.49}$$

$$\dot{y}(t)=f(t,y(t),y(g(t,y(t))),\dot{y}(g(t,y(t)))) \tag{1.50}$$

**例** 19 在博奕论中,研究解的连续过程时导出了如下的Cauchy 问题[412]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \min_q \max_p f(p,q,t,\dot{x}(t),x(g(t,x(t),\dot{x}(t))),\\ &\qquad \dot{x}(G(t,x(t),\dot{x}(t)))),t \geqslant 0\\ x(t) &= \varphi(t),\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t),t \in R_- = (-\infty,0]\end{aligned} \tag{1.51}$$

其中 $g,G$ 是确定的,但须满足某种递推公式.

**例** 20 在生命个体的活细胞里,控制酶反应的生物机制的一个数学模型为[413]

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(t,x_t,\dot{x}(t),x(g(t,x_t,\dot{x}(t))),\\ &\qquad \dot{x}(G(t,x_t,\dot{x}(t)))),\ t\geqslant 0\\ &x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),t\in R_-.\end{aligned} \tag{1.52}$$

其中 $x\in R^n,g,G$ 亦由某种递推公式确定.

**例** 21 Angelova 在[525]中研究了金属切削理论中的一个二阶方程组

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i(t)=f_i(t,P_i,x_i(t-P_i)) \qquad i=1,2\\ &P_i=P_i(t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t))\end{aligned} \tag{1.53}$$

解的振动问题.

### 3. 名称及其缩写

上述一系列例子所导出的微分方程,历史上曾使用过各种各

样的名称，这种极不规范的状况，反映了人们认识的曲折过程．例如称之为“病态方程”、“泛函微分方程”、“时滞方程”、“后效过程”、“差分微分方程”、“具有偏差变元的微分方程”等等．我们从两个不同的角度来认识它们，然后给以统一的名称．

首先，诸方程中的未知函数，例如 $x(t)$，其自变量为 $t$．除此之外还出现不同于 $t$ 但依赖于 $t$ 的变元，例如 $x(t-\tau(t))$ 中的 $t-\tau(t)$．这种变元的值偏离了 $t$ 的值，通常叫做“偏差变元”，$\tau(t)$ 叫做“偏差”．从这个角度出发，我们的研究对象可以统称为“具有偏差变元的微分方程”，缩写为 DEDA（Differential Equation With Deviating Argument）．

其次，我们注意到，若上述诸方程中不出现导数，或者说不含有未知函数的导数，那么它们都是广泛意义下的泛函方程（或称函数方程），缩写为 FE（Functional Equation）．因而我们所列出的诸方程统称为“泛函微分方程”便显得十分自然．以后简称为 FDE（Functional Differential Equation）．

今后我们采用 FDE 这一术语．

对 FDE 中的“偏差”，我们概略地把它划分为三种类型：

（1）分立形式

若方程中偏差变元都可以写成 $t-\tau(t)$ 的形式，则称偏差是“分立的”，或者说是离散的．这里 $\tau(t)$ 是常数或者仅为 $t$ 的函数，有时记 $t-\tau(t)=g(t)$，$g(t)$ 是仅依赖于 $t$ 的偏差变元．所以它不是新的独立变量．

这类 FDE 通常叫做差分微分方程，缩记为 DDE（Differential Difference Equation），如（1.4）（1.5）（1.15）等等．

（2）分布形式

若变元的偏差以积分形式出现在方程里，则称偏差是分布形式的，如（1.6）（1.19）（1.22）等等．

考察未知函数具分布偏差变元的简单形式

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t+\theta)d\theta$$

其中 $\alpha,\beta$ 是常数，或者 $-\infty$，$+\infty$，或者是 $t$ 的连续函数，不管如何，偏差变元仍是依赖于 $t$ 的函数. 对每一个 $t$，它们的值可以与 $t$ 的值比较大小. 例如 $\alpha=-1,\beta=1$. 则

$$\int_{-1}^{1} x(t+\theta)d\theta=\int_{-1}^{0} x(t+\theta)d\theta+\int_{0}^{1} x(t+\theta)d\theta$$

右边第一个积分里偏差变元都不大于 $t$，第二个积分里偏差变元都不小于 $t$.

(3)复杂偏差形式

这里指的是（1）中的 $\tau$ 不仅依赖于 $t$，而且依赖于未知函数 $x(t)$，甚至于依赖未知函数的导数 $\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$的情形. 如(1.43)(1.44)(1.45)等等.

### 4. 若干注释

**注 1** 分立和分布两种形式的 FDE 是不相互包含的类型. 但它们可以在 Stieltjes 积分表示之下写成统一的形式. 如(1.40).

考察方程

$$\dot{x}(t)=\int_{0}^{r}[d_{\theta}\eta(t,\theta)]x(t-\theta) \tag{1.54}$$

上式右边是 Stieltjes 积分，$x\in R^n$，$\eta(t,\theta)$是 $n\times n$ 有界变差函数阵.

若$\eta(t,\theta)$关于 $\theta$ 可微，则(1.54)是分布形式 FDE. 适当选择$\eta(t,\theta)$便可得分立形式的 DDE. 例如取

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta=0\\ a & 0<\theta<r\\ a+b & \theta=r\end{cases}$$

为了区别，用$(s)\int$表示Stieltjes 积分，则(1.54)为

$$\dot{x}(t)=(s)\int_0^r[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t-\theta)=\int_\theta^r\eta'_\theta(t,\theta)x(t-\theta)$$

$$+x(t-\theta)(\eta(t,\theta+0)-\eta(t,\theta))\Big|_{\theta=0}+x(t-\theta)(\eta(t,\theta)$$

$$-\eta(t,\theta-0))\Big|_{\theta=r}=ax(t)+bx(t-r)$$

还可以选取 $\eta(t,\theta)$，使(1.54)同时有(1)(2)型偏差变元，如

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta=0\\ a(1-\theta\sin^2 t) & 0<\theta<1\\ a\cos^2 t+b & \theta=1\end{cases}$$

这里取 $r=1$. 用类似的 Stieltjes 积分计算，(1.54)为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-1)-\int_0^1\sin^2 tx(t-\theta)d\theta$$

**注 2** 在一个 FDE 中，可能同时出现两种甚至三种形式的偏差.

**注 3** 对微分方程的有关术语，如线性、非线性、齐次、非齐次、自治、非自治等等都可以平行推广到 FDE 上去，但须注意，不论变元有无偏差均应平等对待，例如出现乘积 $x(t)x(t-\tau)$时应作为二次项看待，系统是非线性的.

## §2 FDE 的分型

对§1 中指出的广泛意义下的 FDE，实际上只有一部分明确地划分了类型，就是仅仅对具有(1)型和(2) 型偏差的 FDE 给出某种方式的分型法. 这种分法迄今只有一些定性的描述. 大意是：根据方程中未知函数的最高阶导数的自变元与低阶导数的自变元之间的比较关系来划分方程类型的. 对具有偏差变元的偏微分方程和具有复杂偏差的常微分方程，由于系统的研究工作刚刚开始，还没有明确的分类法，我们将在最后一章里做一些说明.

下面集中讨论具分立偏差的 FDE 的分型问题，涉及具分布偏差的 FDE 时将明确说明.

1. 基准函数与基准变元

对给定的 FDE，设其定义区间 $I_{FDE}\subseteq R$，当 $t\in I_{FDE}$时，记 $t-\tau(t)=g(t)$，这样$g(t)$表示偏差变元，而$\tau(t)$则表示偏差，恒设$\tau(t)$连续.

设 FDE 中最高阶导数有 $r$ 个互不相同的偏差 $\tau_i(t)$，$i=1,2,\cdots,r$，若记 $\tau_0(t)=0$，则最高阶导数的变元共有 $r+1$ 个，统一记为

$$g_i(t)=t-\tau_i(t)\qquad i=0,1,2,\cdots,r.$$

我们把它分为两种情形

$(A_1)$：$r=0$，表示最高阶导数没有偏差变元.

$(A_2)$：$r>0$，表示最高阶导数有偏差变元.

**定义 2.1** 对给定的 FDE，$t\in I_{FDE}$时称 $T(t)=\max\{g_0(t),g_1(t),\cdots,g_r(t)\}$为它的基准函数.

由定义我们有

$T(t)$在 $I_{FDE}$上连续.

若 $r=0$，则在 $I_{FDE}$上 $T(t)=t$.

若对所有的 $i$，$\tau_i(t)\geqslant 0$(或 $g_i(t)\leqslant t$)，则 $T(t)=t$.

若 $0\leqslant i,j\leqslant r$ 且 $i\neq j$ 时 $\tau_i(t)\geqslant 0$，而 $\tau_j(t)<0$，则 $T(t)=t-\tau_j(t)=g_j(t)$.

**定义 2.2** 对给定的 FDE，存在某个 $j(0\leqslant j\leqslant r)$，当 $t\in I_{FDE}$时 $T(t)=g_j(t)$，则基准函数 $T(t)$(即 $g_j(t)$)叫做基准变元.

一般地说，基准函数未必是基准变元，如

**例 1** 对方程

$$\dot{x}(t)+2\dot{x}(t-\sin t)=f(t,x(t),x(t-1))\tag{2.1}$$

它的基准函数 $T(t)=\max\{t,t-\sin t\}$. 设 $I_{FDE}=R$，则在 $I_{FDE}$上 $T(t)\neq t$，$T(t)\neq t-\sin t$.

在下面分型的定义中需要一个引理.

引理 2．1　设 $g_1(t),\cdots,g_r(t)$ 为区间 $I\subseteq R$ 上的连续函数，$T(t)=\max\{g_1(t),\cdots,g_r(t)\}$，则存在至多可列个区间 $I_i$，使 $I=\bigcup_i I_i$. 且任一 $I_i$ 上存在某个 $j(1\leqslant j\leqslant r)$，使 $T(t)=g_j(t)$.

**证**　用归纳法，设 $r=2$，记集

$$S=\{t:g_1(t)=T(t),t\in I\}$$

于是 $I-S=\{t:g_2(t)=T(t),t\in I\}$，$S$ 在 $I$ 上可能有以下几种分布状况：

(1) $S$ 是一个至多可列集.

(2) $S=\bigcup_i I_i$，$I_i\subseteq I$ 是至多可列个区间.

(3) $S$ 是 $I$ 的稠密子集.

(4) $S=S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$，这里 $S_1$ 是至多可列集，$S_2$ 是至多可列个区间的和集，$S_3$ 是 $I$ 的某些子区间和集上的稠密子集.

这里 $S_1,S_2,S_3$ 可能未必同时出现.

对(1)(2)引理的结论显然成立. 而(3)则可推出 $t\in I$ 时 $T(t)=g_1(t)$. 最后(1)(2)(3)推出(4)的情形引理结论仍成立. $r=2$ 的情形得证.

设 $K\leqslant r$，$K-1$ 时引理结论成立，记

$$T_1(t)=\max\{g_1(t),\cdots,g_{K-1}(t)\}$$
$$T(t)=\max\{T_1(t),g_K(t)\}$$

如上所述存在至多可列个区间 $I_i$，使 $I=\bigcup_i I_i$，在每一个 $I_i$ 上或者 $T(t)=g_K(t)$，或者 $T(t)=T_1(t)$，由归纳法所设，对后一种情形 $I_i$ 可以分解为 $I_i=\bigcup_j I_j^*$，$I_j^*$ 是一组 $I_i$ 中的区间. 对任一 $I_j^*$ 存在正整数 $\sigma(1\leqslant\sigma\leqslant K-1)$. 使 $T(t)=T_1(t)=g_\sigma(t)$. 所以在 $I_i$ 上引理结论成立. 从而在 $I$ 上也成立.

应用引理 2.1，由最高阶导数诸变元定义的基准函数 $T(t)$ 分为两类：

$(B_1)$：在 $I_{FDE}$ 上存在 $j(0\leqslant j\leqslant r)$ 使 $T(t)=g_j(t)$，这时 $T(t)$ 是一个基准变元.

$(B_2)$：存在 $I_{FDE}$ 的一种分解，$I_{FDE}=\bigcup_i I_i$，在每一个 $I_i$ 上，存在 $j$ $(0\leqslant j\leqslant r)$ 使 $T(t)=g_j(t)$，此时在 $I_{FDE}$ 上 $T(t)$ 不是基准变元，但在 $I_i$ 上，$g_j(t)$ 是基准变元.

可见，当我们判断基准函数是否是基准变元时，必须考察所指定的定义区间.

设 FDE 的所有低阶导数中除了变元 $g_i(t)(0\leqslant i\leqslant r)$ 以外，还有 $m$ 个新的偏差变元 $g_j(t)(r+1\leqslant j\leqslant r+m)$，即 FDE 中共有 $r+m$ 个互不相同的偏差变元，连同 $g_0(t)=t$，共有 $r+m+1$ 个变元.记

$$g_j=t-\tau_j(t)\quad(r+1\leqslant j\leqslant m+r)\quad t\in I_{FDE}\tag{2.2}$$

定义(2.2)的一个有关函数 $T^*(t)$

$$T^*(t)=\max\{g_{r+1}(t),\cdots,g_{r+m}(t)\}$$

由引理 2.1，对函数组(2.2)存在至多可列个区间 $I_i$ 使 $I_{FDE}=\bigcup_i I_i$，且在任意一个 $I_i$ 上存在 $j(r+1\leqslant j\leqslant r+m)$ 使 $T^*(t)=g_j(t)$. 关于 $T^*(t)$ 有以下两种情形.

$(C_1)$ 存在 $j(r+1\leqslant j\leqslant r+m)$ 使对 $\forall\ t\in I_{FDE}$ 成立 $T^*(t)=g_j(t)$. 即 $T^*(t)$ 是低阶导数的一个基准变元.

$(C_2)$ 存在 $I_{FDE}$ 的一种分解：$I_{FDE}=\bigcup_i I_i$，在每一个 $I_i$ 上存在 $j(r+1\leqslant j\leqslant r+m)$ 使得 $T^*(t)=g_j(t)$.

$T(t)$ 与 $T^*(t)$ 之间可能有以下三种关系：

$(D_1)$ 对 $\forall\ t\in I_{FDE}$，$T^*(t)\leqslant T(t)$.

$(D_2)$ 对 $\forall\ t\in I_{FDE}$，$T^*(t)\geqslant T(t)$.

$(D_3)\exists\ I_i\subset I_{FDE}$，使当 $t\in I_i$ 时 $T^*(t)<T(t)$，同时 $\exists\ I_{i'}\subset I_{FDE}$，使当 $t\in I_{i'}$ 时 $T^*(t)>T(t)$（或者说至少存在一个 $\tilde{t}\in I_{i'}$，使 $T^*(\tilde{t})>T(\tilde{t})$）.

**注 1** 若最高阶导数不含有变元 $t$,则分型法则的叙述稍为复杂一点(参看[591]).

**注 2** 若所有偏差 $\tau_K(0\leqslant K\leqslant m+r)$都是常数,则可以在 $I_{FDE}$ 上比较 $g_K(t)=t-\tau_K$ 的大小.

**2. 分型的定义**

我们用上述诸条件$(A_i)(B_i)(C_i)$来划分具分立变元 FDE 的类型(注意到$(A_1)$与$(A_2)$、$(B_1)$与$(B_2)$、$(C_1)$与$(C_2)$是不能同时成立,并且若 FDE 满足条件$(A_1)$则一定满足$(B_1)$).

**定义 2.3** 若 FDE 满足条件$(A_1)(C_1)(D_1)$及$(A_1)(C_2)(D_1)$,则称之为滞后型泛函微分方程,简记为 RFDE(Retarded FDE),若此时它是一个 DDE,则记为 RDDE,如(1.4)(1.5)(1.6)等等.

**定义 2.4** 若 FDE 满足条件$(A_1)(C_1)(D_2)$或者$(A_1)(C_2)(D_2)$,则称之为超前型 FDE. 简记为 AFDE(Advanced FDE). 同理,若是 DDE,则记为 ADDE,如(1.32)(1.33),又如方程

$$\dot{x}(t)+\dot{x}(t+1)+x(t)+x(t+1)=0 \tag{2.3}$$

$$\dot{x}(t)+x(t+\sin^2 t)+x(t+1)=0 \tag{2.4}$$

都是 ADDE,其中 $I_{FDE}=R$.

**定义 2.5** 若 FDE 满足条件$(A_i)(B_i)(C_i)(D_3)$,$i=1,2$,则统称之为混合型的 FDE,简记为 CFDE(Compound FDE),同样地,若是 DDE,则记为 CDDE. 如(1.47),又如

$$\dot{x}(t)+\dot{x}(t-\frac{1}{2})+x(t)+x(t-\sin t)=0 \tag{2.5}$$

$$\dot{x}(t)+\dot{x}(t+2\cos t)+x(t^3)=0 \tag{2.6}$$

都是 CDDE,$I_{FDE}=R$.

**定义 2.6** 若 FDE 满足条件$(A_2)(B_1)(C_i)(D_1)$,则称之为中立型 FDE,简记为 NFDE(Neutral FDE),若是 DDE,则记为 NDDE,如(1.41). 事实上,对(1.39)第一式求导数并令 $t$ 为 $t+1$ 得

$$\ddot{\theta}(t+1)=\dot{\psi}(t+1)+\dot{C}(t+1)-\mu\dot{\theta}(t+1)$$

与(1.39)第二式合并得

$$\ddot{\theta}(t+1)+\gamma_3\ddot{\theta}(t)+\mu\dot{\theta}(t+1)+\gamma_2\dot{\theta}(t)+\gamma_1\theta(t)-\dot{\psi}(t)=0 \tag{2.7}$$

也是一个 NDDE，不过基准变元为 $t+1$.

当 FDE 满足条件$(A_2)(B_2)(C_1)(D_1)$时，也称之为中立型方程，但与前者不同，它不存在 $I_{FDE}$上的基准变元，只能在 $I_{FDE}=\bigcup_i I_i$ 中的区间 $I_i$ 上选择相应的基准变元. 如在相邻区间 $I_i$，$I_{i+1}$上分别取不同的基准变元，则此 FDE 在 $I_i \cup I_{i+1}$上是两个具不同基准变元的 NFDE“衔接”起来的方程. 暂且称之为“分段 NFDE”，记为 N$^*$FDE. 若为 DDE，记为 N$^*$DDE. 这类方程在区间 $I_i$ 的端点（衔接点）附近的性态是十分复杂的，迄今为止还没有完整的研究工作[268]，例 1 中的方程(2.1)便是 N$^*$DDE.

对例 1 的方程(2.1)，若 $I_{FDE}=R$，则 $I_{FDE}=I_1\cup I_2$，这里 $I_1\cup I_2$ 是一些区间的和集，记 $N$ 是整数全体，$I_1=\bigcup_{j\in N}[2j\pi,(2j+1)\pi]$，$I_2=\bigcup_{j\in N}[(2j-1)\pi,2j\pi]$，在 $I_1$ 上基准变元为 $t$，在 $I_2$ 上基准变元为 $t-\sin t$. 而在 $I_{FDE}$却没有基准变元.

在 FDE 理论中，R 型是主体，其次是 N 型、A 型、C 型以及那些尚未分类的复杂偏差变元泛函微分方程.

**例** 2　考虑方程

$$a\dot{x}(t)+b\dot{x}(t-\tau)+cx(t)+dx(t-\tau)+ex(t+\tau)=0 \tag{2.8}$$

其中 $x\in R$，$\tau=\text{const.}>0$，诸常数 $a$、$b$、$c$、$d$、$e\in R$，按照上述分类的定义，我们有

$e=0$，$b=0$，$a\neq0$，(2.8)是 RDDE.

$e=0$，$b\neq0$，$a\neq0$，(2.8)是 NDDE.

$e=0$，$b\neq0$，$a=0$，(2.8)是 ADDE.

$e\neq 0, a\neq 0, b\neq 0$(或者 $d\neq 0$)，(2.8)都是 CDDE.

此外还有两种极端情形：$b=d=e=0$ 时(2.8)是一个常微分方程. $a=b=0$ 时(2.8)是一个差分方程. 由此(2.8)叫做差分微分方程是很自然的事了.

若(2.8)中 $\tau<0$(或 $\tau=-\sigma, \sigma>0$)，则(2.8)化为

$$a\dot{x}(t)+b\dot{x}(t+\sigma)+cx(t)+dx(t+\sigma)+ex(t-\sigma)=0 \tag{2.9}$$

上式的基准变元为 $t+\sigma$，类似地我们有

$b\neq 0, a=0$，(2.9)是 RDDE.

$b\neq 0, a\neq 0$，(2.9)是 NDDE.

$b=0, a\neq 0, e=0$，(2.9)是 ADDE.

$b=0, a\neq 0, d\neq 0, e\neq 0$，(2.9)是 CDDE.

同样存在两种极端情形，$a=b=0$，(2.9)是差分方程，$b=d=e=0$，(2.9)是常微分方程.

**例 3** 考虑单滞量高阶系统

$$x^{(n)}(t)=f(t,x(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x(t-\tau),\cdots,x^{(l_1)}(t-\tau)) \tag{2.10}$$

其中 $\tau>0$(此时偏差叫做滞量)，我们有

当 $l_1<n$ 时，(2.10)为 RDDE.

当 $l_1=n$ 时，(2.10)为 NDDE.

当 $l_1>n$ 时，(2.10)为 ADDE.

**例 4** 多滞量高阶系统

$$x^{(n)}(t)=f(t,x(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x(t-\tau_1),\cdots,x^{(l_1)}(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m),\cdots,x^{(l_m)}(t-\tau_m)) \tag{2.11}$$

其中 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_m, l_i\neq l_j, i\neq j$. 记 $l=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} l_i$. 依定义我们有

$n>l$　　(2.11)是 RDDE.

$n=l$　　(2.11)是 NDDE.

$n<l, l=l_m$　　(2.11)是 ADDE.

$n<l, l=l_i (i<m)$　　(2.11)是 CDDE.

### 3. 具分布偏差 FDE 的分型

当偏差变元出现在积分号之下时，恒设它为 $t+\theta$，$\theta$ 是积分变元(若为 $t-\tau$，令 $-\tau=\theta$ 即可)。此时积分上、下限 $\beta$、$\alpha$ 是常数或者是 $t$ 的连续函数. 其中之一，例如 $\alpha$ 可以取 $-\infty$(下同).

偏差 $\theta\in[\alpha,\beta]$，偏差变元 $t+\theta\in[t+\alpha,t+\beta]$.(若在 $t$ 处 $\beta<\alpha$，则区间换为 $[\beta,\alpha]$ 及 $[t+\beta,t+\alpha]$).

我们需要积分号下未知函数导数的阶数的一个性质.

引理 2.2 对下列情形

(1) $\int_{\alpha}^{\beta}x^{(K)}(t+\theta)d\theta \qquad K\geqslant 1$

(2) $\int_{\alpha}^{\beta}g(t,x(t),\cdots,x^{(m)}(t),x(t+\theta),\cdots,x^{(j)}(t+\theta))x^{(K)}(t+\theta)d\theta$

$K\geqslant 2,j\leqslant K-2$

应视为 FDE 含有 $x(\cdot)$ 的 $K-1$ 阶导数.

事实上，$\int_{\alpha}^{\beta}x^{(K)}(t+\theta)d\theta=x^{(K-1)}(t+\beta)-x^{(K-1)}(t+\alpha)$，即(1)蕴含 FDE 有 $K-1$ 阶导数，用部分积分法同理可证(2)中最高阶导数也是 $K-1$ 阶.

设 FDE 定义在 $I_{FDE}\subseteq R$ 上，它包括以下诸形式的项

$$x^{(n)}(t),a_1(t)x^{(n)}(g_1(t)),\cdots,a_{r_1}(t)x^{(n)}(g_{r_1}(t))$$

$$\int_{\alpha_i(t)}^{\beta_i(t)}g_i(t,x(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x(t+\theta),\cdots,x^{n}(t+\theta))d\theta \tag{2.12}$$

$$\int_{\alpha_j(t)}^{\beta_j(t)}g_j(t,x(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x(t+\theta),\cdots,x^{(n-1)}(t+\theta))d\theta \tag{2.13}$$

其中 $i=1,2,\cdots,r_2$，$j=r_2+1,\cdots,r_2+m$，$g_K(t)=t-\tau_K(t)$，$K=1,2,\cdots r_1$，当(2.12)出现引理 2.2 中(1)(2)的情形时归入(2.13).

记 $r=r_1+r_2$

$T(t)=\max\{g_0,\cdots,g_{r_1},\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_{r_2},\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_{r_2}\}$

$T^*(t)=\max\{g_0,\cdots,g_{r_1},\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_{r_2+m},\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_{r_2+m}\}$

$\bar{\alpha}_i=\alpha_i+t,\bar{\beta}_i=\beta_i+t,i=1,2,\cdots,r_2+m$

由此导出与上一段相应的条件$(\bar{A}_i)(\bar{B}_i)(\bar{C}_i)(\bar{D})$：

$(\bar{A}_1)$：$r=0\Leftrightarrow r_1=r_2=0$.

$(\bar{A}_2)$：$r>0$.

$(\bar{B}_1)$：在 $I_{\mathrm{FDE}}$上 $T(t)$是基准变元，即∃ $j$ 使 $T(t)=g_j(t)$，$0\leqslant j\leqslant r_1$ 或者 $T(t)=\bar{\alpha}_j$，或者 $T(t)=\bar{\beta}_j$，$1\leqslant j\leqslant r_2$.

$(\bar{B}_2)$：$(\bar{B}_1)$不成立，但存在 $I_{\mathrm{FDE}}$的一种分解，$I_{\mathrm{FDE}}=\bigcup\limits_i I_i$，在每个 $I_i$ 上，∃ $j$ 使 $T(t)=g_j(t)$，$0\leqslant j\leqslant r_1$，或者 $T(t)=\bar{\alpha}_j(t)$，或者 $T(t)=\bar{\beta}_j(t)$，$1\leqslant j\leqslant r_2$.

$(\bar{C}_1)$：$T^*(t)=T(t)$，$t\in I_{\mathrm{FDE}}$.

$(\bar{C}_2)$：$I_{\mathrm{FDE}}=\bigcup\limits_i I_i$，∃ $I_i$，在其中 $T^*(t)=T(t)$，同时∃ $I_i'$，至少有 $t^*\in I_i'$，使 $T^*(t)>T(t^*)$.

$(\bar{D})$：$t\in I_{\mathrm{FDE}}$时，$T^*(t)\geqslant T(t)$.

由这些条件，对具分布滞量方程我们有如下定义：

**定义 2.7** 若 FDE 满足

$(\bar{A}_1)(\bar{C}_1)$，则它是 RFDE.

$(\bar{A}_1)(\bar{D})$，则它是 AFDE.

$(\bar{A}_2)(\bar{C}_2)$，或者$(\bar{A}_2)(\bar{B}_i)(\bar{C}_2)$，则它是 CFDE，$(i=1,2)$.

$(\bar{A}_2)(\bar{B}_1)(\bar{C}_1)$与$(\bar{A}_2)(\bar{B}_2)(\bar{C}_1)$，则它是 NFDE 与 N*FDE.

**例** 5 方程

$$x^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{l}\int_{-r}^{0}a_i(t)x^{(i)}(t+\theta)d\theta \tag{2.14}$$

其中 $r=\mathrm{const.}>0$，$a_i(t)$可微，依定义 2.6 有

$n \geqslant l$,(2.14)为 RFDE,$n=l-1$ 为 NFDE.

**例 6** 对方程

$$x^{(n)}(t)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l_j}\int_{-r_j}^{0}a_{ij}(t)x^{(i)}(t+\theta)d\theta=f(t,x(t),x(t-r_j)) \tag{2.15}$$

其中 $0<r_1<r_2<\cdots<r_m$,皆为常数. $l_i \neq l_j, i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant m$. 记 $l=\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} l_j$. $\forall\ a_{ij}(t) \not\equiv 0$,可微. 则

$n \geqslant l$　　(2.15)为 RFDE.

$n=l-1, l=l_j, 1 \leqslant j \leqslant m$,且 $a_{l_j} \not\equiv -1$　(2.15)为 NFDE.

**例 7** 由定义判断下列方程的类型:

$\dot{x}(t)=\int_{-1}^{1}g(t,x(t),x(t+\theta))d\theta$　　是 CFDE.

$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0}g(t,x(t),x(t+\theta))d\theta$　　是 RFDE.

$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0}g(t,x(t),x(t+\theta),\dot{x}(t+\theta))d\theta$　除了引理 2 的情形(2)以外,是 NFDE.

$\ddot{x}(t)=\int_{-1}^{0}g(t,x(t),x(t+\theta))\ddot{x}(t+\theta)d\theta$　　是 RFDE.

其中 $g$ 是可微函数.

$\dot{x}(t)=\int_{0}^{t}g(t,x(t),x(s))ds$　　是 RFDE.

**注** "偏差变元"一词当然意味着有一个没有偏差的变元,这就是我们引入的基准变元. 对某些方程在 $I_{FDE}$上存在统一的基准变元,记为 $s=g(t)$. 若$\exists$ $g^{-1}$,使 $t=g^{-1}(s)$,则方程可以化为以 $s$ 为基准变元,例如方程

$$\dot{x}(t)-\frac{1}{2}\dot{x}(t+1)+3x(t)-\frac{1}{4}x(t-1)=0$$

令 $t+1=s$,则化为 $\dot{x}(s)-2\dot{x}(s-1)-6x(s-1)+\frac{1}{2}x(s-2)=0$

另一方面，我们必须确定以高阶导数来定义基准变元，否则将得出不同的结论，例如对 Lecornu 方程

$$\dot{x}(t)-ax(t-1)+bx(t+1)=0 \tag{2.16}$$

用最高阶导数定义基准变元为 $t$，(2.16)是 CFDE. 若用低阶导数来定义，便是 $s=t+1$，此时分型法则完全不同，而且当导数的阶数足够高时，问题变得十分复杂，数学特征也不明显. 这是不可取的.

## §3 分型法则的背景

本节扼要概述我们的分型法则的应用背景和数学特征.

### 1. 应用背景概述

上面已经指出，RFDE 是 FDE 理论中的主体部分，换句话说，描述滞后现象的动力学系统在各个应用学科中是相当普遍的、大量的. 在物理学的许多分支中，历史上曾经把具有分立滞量的情形叫做"时滞系统"，把具有分布滞量的情形叫做"后效过程". 不管如何，这类动力学系统与常微分方程的根本区别在于：要决定系统一个状态的未来，不仅要确定这个状态现在瞬间的值，而且要顾及过去的历史状况. 按照我们的分型法则，这类动力系统正好是一大类——RFDE. 对 AFDE，在应用中通常与某种经济计划的数学模型有关，物理学中也有确切的应用. 如 §1 例 11. 由于应用的背景差别很大，对"超前"的含义解释并不一样，已知有四种不同的初值问题提法，其中一种表达了这样的含义：当未来某一时间区间里的计划值已经确定，问在此之前(从现在的瞬间到这区间的左端点)，状态应如何取值才符合动力系统的规律？而 NFDE 曾长时间没有应用背景，进入 70 年代，在生物学，特别是细胞动力学以及控制理论、信息系统中的数学模型. 有些是问题经过变换以后得到 NFDE，另一些则由系统的动力学特征直接导出 NFDE. 显然它的

实际含义完全不同于 R 型和 A 型方程.

**2. 分型的数学特征**

我们用最简单的一阶自治线性方程为例，给出分型特点的说明，对于普遍的情形，后文中将逐次予以阐述.

设 $a,b,c,\tau>0$ 都是非零常数，考虑 R,A,N,C 型方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{3.1}$$

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t+\tau) \tag{3.2}$$

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{3.3}$$

$$\dot{x}(t)=ax(t-\tau)+bx(t+\tau) \tag{3.4}$$

仿照常微分方程的做法，假定(3.1)～(3.4)有形如 $e^{\lambda t}$ 的解，代入这些方程分别得

$$h_1(\lambda)\triangleq\lambda-a-be^{-\lambda\tau}=0 \tag*{(3.1)$'$}$$

$$h_2(\lambda)\triangleq\lambda-a-be^{\lambda\tau}=0 \tag*{(3.2)$'$}$$

$$h_3(\lambda)\triangleq\lambda+c\lambda e^{-\lambda\tau}-a-be^{-\lambda\tau}=0 \tag*{(3.3)$'$}$$

$$h_4(\lambda)\triangleq\lambda-ae^{-\lambda\tau}-be^{\lambda\tau}=0 \tag*{(3.4)$'$}$$

(3.1)′～(3.4)′也称为特征方程. 与常微分方程不同，它们是超越的而不是代数的.

由复变函数论的已知结果我们有：

$h_1(\lambda)\sim h_4(\lambda)$ 在复平面上存在可列个零点，而且诸零点是孤立的.

我们的目的是指出 R,N,A,C 型方程(3.1)～(3.4)对应的特征方程(3.1)′～(3.4)′根的分布完全不同，而且能准确地表达了四类方程的数学特征. 为了说明这一点，我们需要一个关于零点分布的定理：设诸 $h_i(\lambda)$ 的可列个零点的全体记为 $\{\lambda_j\}$（由于下面这四个特征方程根的分布的讨论是分别进行的，用同一记号不会混淆）.

特征根分布定理写成

**定理** 3.1　$h_1(\lambda) \sim h_4(\lambda)$的零点分布状况是

(1)对 $h_1(\lambda)$,$\exists\ \beta \in R$ 使 $Re\lambda_j < \beta, j=1,2,\cdots$并且在任一条形域 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0 (\alpha_0, \beta_0 \in R)$中只有有限个零点.

(2)对 $h_2(\lambda)$,$\exists\ \alpha \in R$,使 $\mathrm{Re}\lambda_j > \alpha, j=1,2,\cdots$并且在任一条形域 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0 (\alpha_0, \beta_0 \in R)$中只有有限个零点.

(3)对 $h_3(\lambda)$,$\exists\ \alpha, \beta$ 使 $\alpha < \mathrm{Re}\lambda_j < \beta, j=1,2,\cdots$并且在 $A < \mathrm{I_m}\lambda < B (A, B \in R)$中只有有限个零点.

(4)对 $h_4(\lambda)$,其可列个零点分布在全平面上,或者说,存在子序列$\{\lambda'_j\}$,$\{\lambda''_j\}$使 $\mathrm{Re}\lambda'_j \to -\infty$,$\mathrm{Re}\lambda''_j \to \infty$,当 $j \to \infty$. 但在任一条形域 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0 (\alpha_0, \beta_0 \in R)$中只有有限个零点.

**证**　用反证法

把(3.1)$'$写成 $\lambda - a = be^{-\lambda\tau}$,两边取模得

$$|\lambda - a| = |b| e^{-\tau \mathrm{Re}\lambda} \tag{3.5}$$

若 $\mathrm{Re}\lambda_j \to \infty \Rightarrow$(3.5)左边$|\lambda - a| \to \infty$,右边$|b| e^{-\tau \mathrm{Re}\lambda} \to 0 \Rightarrow$矛盾,故$\beta$存在. 若 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0$,$|\lambda| \to \infty$,则(3.5)左边$|\lambda - a| \to \infty$,右边小于某个常数$\Rightarrow$矛盾. 所以满足 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0$ 的 $\lambda$ 必成立 $A \leqslant \mathrm{I_m}\lambda \leqslant B (A, B \in R)$. 在矩形域 $\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0$,$A \leqslant \mathrm{I_m}\lambda \leqslant B$ 上,由零点的孤立性推知它只含有有限个 $h_1(\lambda)$的零点,(1)证毕.

把(3.2)$'$写成 $\lambda - a = be^{\lambda\tau}$,两边取模得

$$|\lambda - a| = |b| e^{\tau \mathrm{Re}\lambda} \tag{3.6}$$

完全类似的推导可证(2)成立.

现在证(3),把(3.3)$'$改写并两边取模得

$$e^{\tau \mathrm{Re}\lambda} \left|1 - \frac{a}{\lambda}\right| = \left|\frac{b}{\lambda} - c\right| \qquad c \neq 0 \tag{3.7}$$

其中设 $\lambda \neq 0$(即使 $\lambda = 0$ 是(3.3)$'$的一个零点也不影响我们的结论). 若 $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$,(3.7)左边$\to +\infty$,右边$\to |c| \Rightarrow$矛盾. 若 $\mathrm{Re}\lambda \to -\infty$,则(3.7)左边$\to 0$,右边$\to |c| \neq 0$ 也矛盾. 故 $\alpha, \beta$ 存在. 由零点的孤立性即得:在 $A \leqslant \mathrm{I_m}\lambda \leqslant B$ 中只有有限个零点,$A, B \in R$.

最后，对（3.4）′，记 $\lambda=ae^{-\lambda\tau}$的零点序列为$\{\lambda_j^{(1)}\}$，则$\text{Re}\lambda_j^{(1)}\to-\infty$，$j\to\infty$. $\lambda=be^{\lambda\tau}$的零点序列为$\{\lambda_j^{(2)}\}$，则$\text{Re}\lambda_j^{(2)}\to\infty$，$j\to\infty$. 再记(3.4)′的零点全体为$\{\lambda_j\}$. 对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)$充分大，使当$j>N$时(3.4)′有子列$\{\lambda_j^-\}\subset\{\lambda_j\}$满足$|\lambda_j^- -\lambda_j^{(1)}|<\varepsilon$，以及另一子列$\{\lambda_j^+\}\subset\{\lambda_j\}$，满足$|\lambda_j^+ -\lambda_j^{(2)}|<\varepsilon$. 换言之，零点实部的绝对值可以任意大，或者说(3.4)′的零点是分布在全平面上的，定理证毕.

定理 3.1 的结论对线性自治方程组也成立.

现在可以追溯"中立型"一词的历史由来：因为这类方程的特征根既不象滞后型方程那样散布在某直线的左半平面上，也不象超前型方程那样散布在某直线的右半平面上，而是"不偏不倚"分布在两平行直线之间，作为最初的认识叫做"中立的"显得很自然.

### 3. 一个注记

从上述的数学特征出发分析下列方程的类型，设$a,b,c,d$均为非零常数，$\tau=\text{const.}>0$

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau)+ax(t)+bx(t-\tau)+dx(t+\tau)=0 \tag{3.8}$$

相应地特征方程为

$$\lambda+c\lambda e^{-\lambda\tau}+a+be^{-\lambda\tau}+de^{\lambda\tau}=0 \tag{3.9}$$

设(3.9)零点全体为$\{\lambda_j\}$. 方程$\lambda=-de^{\lambda\tau}$的零点全体记为$\{\lambda_j^*\}$，则对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)>0$，当$j>N(\varepsilon)$时存在$\{\lambda_j\}$的子序列$\{\lambda_j^+\}$使$|\lambda_j^+-\lambda_j^*|<\varepsilon$. 换言之，不存在$\beta$使$\text{Re}\lambda_j<\beta$，对$\forall\ j$成立. 因而不问$a$，$b$，$c$，$d$(非零)如何取值，(3.8)的零解总是不稳定的，它是一类混合型方程，不具备中立型方程的数学特征，不能视为中立型方程.

## §4 泛函微分方程类

### 1. 两种 FDE

在§1～§3中我们提到了多种形式的泛函微分方程，这里给出归纳分类的目的是：说明现在泛函微分方程理论的应用范围和进一步研究的前景. 基于这个目的可先把泛函微分方程约略地划分为两大类.

第Ⅰ类：滞后型、中立型、超前型泛函微分方程. 简称为R.N.A.类. 迄今为止的泛函微分方程理论原则上只适用于这类方程.

第Ⅱ类：各式混合型方程和具有复杂偏差变元的泛函微分方程都归入这一类，有时叫做“非R.N.A.方程”. 它们的概况与特点可归纳如下：

①这类方程都还没有建立起基本理论，甚至大多数方程的初值问题提法也尚未确立.

②这类方程都有越来越广泛的应用背景，这是推动未来FDE研究的动力.

③当前对这类方程的研究的状况是：根据应用领域的需要直接探讨方程解的种种性质，例如解的振动性、渐近性、单调性、边值问题、某种特解的存在性等等.

鉴于这类方程较为复杂，研究难度大而且刚刚开始，已知工作需要细致归纳介绍，本书将在最后一章中阐述它的发展现状和研究前景.

### 2. FDE 的基本形式

在§2分型法则之下，我们把FDE进行分解以归纳出几类基本形式，它们是构成各类熟知FDE的相对简单的算子. 换句话说

通过这些算子的复合、变量代换以及和未知函数的导数一起组成我们遇到的所有 FDE.

许多研究工作可以从各种基本形式出发去逐步探索.反之也可以从这些基本形式出发加深理解后文中进一步概括抽象的方法和途径.

记 $R_+=[0,+\infty)$，$R_+^0=(0,+\infty)$，$R_-=(-\infty,0]$，$R_-^0=(-\infty,0)$，$R_{t_0}^+=[t_0,+\infty)$，$R_{t_0}^-=(-\infty,t_0]$，非零映射 $\tau(t),\sigma(t):R\to R$ 连续(或 $I\to I\subset R$)，它们的值域分别记为

$$\Lambda=\{\tau(t):t\in R\},\quad \Gamma=\{\sigma(t):t\in R\} \tag{4.1}$$

设方程是 $n$ 阶的，令 $x^{(i-1)}(\cdot)=x_i(\cdot)(i=1,2,\cdots n)$，可把它化为方程组，所以下面总假定 $x\in R^n$. 基本形式如下：

$$(1)U(t,x(t),x(t-\tau(t)))\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}R_u^\tau & \Lambda\subseteq R_+\\ A_u^\tau & \Lambda\subseteq R_-\\ C_u^\tau & \Lambda\cap R_+^0\neq\varnothing,\Lambda\cap R_-^0\neq\varnothing\end{cases} \tag{4.2}$$

$$(2)U(t,x(t),x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t)))\overset{\text{def}}{=}N_u^\tau,\Lambda\subseteq R_+ \tag{4.3}$$

$$(3)\int_0^{\sigma(t)}v(t,\tau,x(t-\tau)d\tau\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}R_v^\sigma & \Gamma\subseteq R_+\\ A_v^\sigma & \Gamma\subseteq R_-\\ C_v^\sigma & \Gamma\cap R_+^0\neq\varnothing,\Gamma\cap R_-^0\neq\varnothing\end{cases} \tag{4.4}$$

$$(4)\int_0^{\sigma(t)}v(t,\tau,x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))\overset{\text{def}}{=}N_v^\sigma,\Gamma\subseteq R_+ \tag{4.5}$$

$$(5)\int_0^{\infty}v(t,\tau,x(t-\tau))d\tau\overset{\text{def}}{=}R_v \tag{4.6}$$

$$(6)\int_0^{\infty}v(t,\tau,x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))\overset{\text{def}}{=}N_v \tag{4.7}$$

$$(7)W(t,x(t),x(t-\tau(t,x(t),\dot{x}(t))))\overset{\text{def}}{=}R_c \tag{4.8}$$

$$(8)W(t,x(t),x(t-\tau(t,x(t),\dot{x}(t))),\dot{x}(t-\tau(t,x(t),\dot{x}(t))))\overset{\text{def}}{=}N_c \tag{4.9}$$

由基本形式构成 FDE 的例子：

**例 1** 选取基本形式组成方程

$$\dot{x}(t)=\sin^2 t x(t-\tau)+\int_{-r}^{0} a(t)x(t+\theta)d\theta \tag{4.10}$$

. 取 $u=\sin^2 t x(t-\tau)=R_u^{\tau}$ 以及 $v=a(t)x(t-s)$，故

$$R_v^{\sigma}=\int_0^r a(t)x(t-s)ds=\int_{-r}^0 a(t)x(t+\theta)d\theta$$

其中令 $s=-\theta$，且 $\sigma=r$，$\dot{x}(t)=R_u^{\tau}+R_v^{\sigma}$ 即(4.10)。

**例 2** 选取基本形式组成方程

$$\dot{x}(t)=2\dot{x}(t-\tau)+\int_0^r g(t,x,x(t-\theta))d\theta+\int_{-\infty}^0 (t^2+\theta)x(t+\theta)d\theta \tag{4.11}$$

令 $s=-\theta$，且 $\sigma=r$，取

$U=2\dot{x}(t-\tau)=N_u^{\tau}$

$v=g(t,x(t),x(t-s))$，$R_v^{\sigma}=\int_0^r g(t,x(t),x(t-\theta))d\theta$

$v=(t^2-s)x(t-s)$，则

$$R_v=\int_0^{\infty}(t^2-s)x(t-s)ds=\int_{-\infty}^0 (t^2+\theta)x(t+\theta)d\theta$$

于是 $\dot{x}(t)=N_u^{\tau}+R_v^{\sigma}+R_v$，即(4.11)。

**例 3** 我们罗列以下几个组合方式

$\dot{x}(t)=R_u^{\tau}$ 是单滞量 RDDE.

$\dot{x}(t)=N_u^{\tau}$ 是单滞量 NDDE.

$\dot{x}(t)=f(R_{u_1}^{\tau_1},R_{u_2}^{\tau_2},\cdots,R_{u_m}^{\tau_m})$ 为多滞量 RDDE，$(m>1)$.

$\dot{x}(t)=R_v^{\sigma}$，$\dot{x}(t)=N_v^{\sigma}$ 分别为具分布滞量的 RFDE 与 NFDE.

$\dot{x}(t)=f(R_{u_1}^{\tau_1},\cdots,R_{u_m}^{\tau_m},R_{v_1}^{\sigma_1},\cdots,R_{v_l}^{\sigma_l})$ 是更一般的 RFDE.

有些场合 FDE 用 Stiltjes 积分而不是用基本形式表示. 设 $\sigma(t)\geqslant 0$ 连续，FDE 写成

$$\dot{x}(t)=(s)\int_0^{\sigma(t)} W(t,\tau,x(t-\tau))dR(t,\tau) \tag{4.12}$$

其中 $W$ 可以是线性或非线性的. 核函数 $R(t,\tau)$定义在 $R\times I_\sigma$ 上, $I_\sigma=[0,\sigma(t)]$, $R(t,0)\equiv 0$, $R(t,\sigma(t))$是 $t$ 的连续函数, $t\in R$. 且 $V(t)=\overset{\sigma(t)}{\underset{\tau=0}{\mathrm{V}}}R(t,\tau)$局部有界. 此外, 恒设 $R(t,\tau)$对任意的 $t$ 在下述意义下关于 $t$ 是平均连续的

$$\lim_{t'\to t}\int_0^{\min\{\sigma(t'),\sigma(t)\}}|R(t',\tau)-R(t,\tau)|d\tau=0 \tag{4.13}$$

在上述假定下可以推出 $R(t,\tau)$是二元可测的.

**3. FDE 的严格定义**

设 $C([-r,0],R^n)$是$[-r,0]$上连续向量函数全体, 简记为 $C$, 定义范数为

$$\varphi\in C,\ |\varphi|=\sup_{\theta\in[-r,0]}|\varphi(\theta)| \tag{4.14}$$

$|\cdot|$便赋 $C$ 以一致收敛拓扑. 记初始时刻为 $\sigma$, $\sigma\in R$, $A\geq 0$ 是指定的常数或为$+\infty$, 对$\forall\ t\in[\sigma,\sigma+A]$记"$\cdot$"为右导数, $x(t)\in C([\sigma-r,\sigma+A],R^n)$, 再记 $x_t=x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-r,0]$, $\Omega\subseteq R\times C$ 是开集, $f:\Omega\to R^n$ 是给定的算子, 则

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{4.15}$$

叫做$\Omega$上的滞后型泛函微分方程, 略记为 RFDE, 为了强调(4.15)的右端记之为 RFDE($f$).

这样定义是各类有界滞量的滞后型泛函微分方程的高度概括, 以下诸例表明, 只要适当选择算子 $f(t,\varphi)$(4.15)便可代表种种滞后系统.

**例 4** 取 $f(t,\varphi)=a\varphi(0)+b\varphi(-r)$, (4.15)化为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r)\quad r\geq 0$$

若取 $f(t,\varphi)=f(t,\varphi(0),\varphi(-r))$, (4.15)化为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r))\quad r\geq 0$$

取 $f(t,\varphi)=-C\varphi(-1)[1+\varphi(0)]$(此时 $r=1$), 则(4.15)化为

$$\dot{x}(t)=-Cx(t-1)[1+x(t)]$$

设 $0\leqslant\tau_i(t)\leqslant r=\text{const}$. $f(t,\varphi)$取为 $f=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)\varphi(-\tau_i(t))$，则(4.15)化为方程

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)x(t-\tau_i(t))$$

设 $r\geqslant0$，取 $f(t,\varphi)=\int_{-r}^{0}A(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta$，则有

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta$$

取 $f(t,\varphi)=\int_{-\infty}^{0}\varphi(\theta)dR(t,\theta)$，则(4.15)化为

$$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0}x(t+\theta)dR(t,\theta)$$

凡此等等. 算子 $f$ 中元 $\varphi\in C$，$\varphi(\theta)$即 $x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，$\varphi(0)=x(t+0)=x(t)$，$\varphi(-r)=x(t-r)$，对更复杂的方程，$f$ 可视为若干算子的复合.

现在设 $r=\infty$，此时记 $C((-\infty,0],R^n)=B$，方程仍有形式

$$\dot{x}=f(t,x_t)\quad x_t=x(t+\theta),\theta\in R_- \tag{4.16}$$

(4.16)是具无穷时滞的 FDE，此时 $B$ 中范数的选取需要细心限制，不能取为(4.14)形式，这一点以后再系统论述.

以上都是滞后型方程，对中立型泛函微分方程，仍记 $x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，($\theta\in(-\infty,0]$)，$\dot{x}_t=\frac{d}{dt}x(t+\theta)$，算子 $f:R\times C\times C\to R^n$，则

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t,\dot{x}_t) \tag{4.17}$$

是一个 NFDE.

**例 5** 选取 $f(t,\varphi,\dot{\varphi})=f(t,\varphi(0),\varphi(-r),\dot{\varphi}(-r))$，则方程(4.17)为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r),\dot{x}(t-r))$$

若选取 $f=\int_{-r}^{0}[A(t,\tau)\varphi(-\tau)+B(t,\tau)\dot{\varphi}(-\tau)]d\tau$，则为

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[A(t,\tau)x(t-\tau)+B(t,\tau)\dot{x}(t-\tau)]d\tau$$

另一种形式的 NFDE（1970 年由 Hale 与 Cruz 提出）是右端无导数的中立型方程，即由 $\Omega\subseteq R$ 中的算子 $D(t,\varphi)$ 和 $f(t,\varphi)$ 构成的方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{4.18}$$

以后我们要对 $D(t,\varphi)$ 做非奇异性假定.

**例 6** 取 $D(t,\varphi)=a\varphi(0)+b\varphi(-r)$，$f(t,\varphi)=f(t,\varphi(0),\varphi(-r))$，则(4.18)化为

$$\frac{d}{dt}(ax(t)+bx(t-r))=f(t,x(t),x(t-r))$$

我们注意到并不是所有的(4.17)都可以写成(4.18)形式.

## §5 基本初值问题

### 1. 初始集与滞效集

首先要解决两个问题：(1)要确定 FDE 的一个解究竟需要多少初始数据？(2)要确定时滞的"直接作用范围"有多大？为此引入两个基本集合：初始集 $E_{t_0}$，滞效集 $F_{t_0}$，$t_0$ 为初始时刻. 设 $x\in R^n$，考察两类最基本的方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)))\qquad \tau(t)\geqslant 0 \tag{5.1}$$

$$\dot{x}(t)=\int_{0}^{\sigma(t)}g(t,x(t),x(t-\tau))d\tau\qquad \sigma(t)\geqslant 0 \tag{5.2}$$

我们的定义和说明都是对(5.1)的 $\tau(t)$ 给出的，对(3.2)只要把定义中的 $\tau(t)$ 改为 $\sigma(t)$ 即可.

**定义 5.1** 系统(5.1)的初始集 $E_t$ 与滞效集 $F_t$ 分别为

$$E_{t_0}=\{t-\tau(t):t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\} \tag{5.3}$$

$$F_{t_0}=\{t:t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\} \tag{5.4}$$

设 $\tau_i(t)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，对多滞量系统的相应定义为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t))) \tag{5.5}$$

$$E_{t_0}=\bigcup_{i=1}^{m}E_{t_0}^i,\quad F_{t_0}=\bigcap_{i=1}^{m}F_{t_0}^i \tag{5.6}$$

$$E_{t_0}^i=\{t-\tau_i(t):t-\tau_i(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$$

$$F_{t_0}^i=\{t:t-\tau_i(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}$$

我们注意到 $E_{t_0}$ 与 $F_{t_0}$ 的定义仅与 $\tau(t)$ 和 $\sigma(t)$ 有关，而与方程的结构无关.

**例** 1　由定义 5.1，有

(1) $\dot{x}(t)=F_1(R_u^\tau,N_u^\tau)$ 的 $E_{t_0}$ 与 $F_{t_0}$ 都用(5.3)和(5.4)表示；

(2)方程 $\dot{x}(t)=F_2(R_\tau^\sigma,N_\tau^\sigma)$ 的初始集 $\hat{E}_{t_0}$ 和滞效集 $\hat{F}_{t_0}$ 为

$$\hat{E}_{t_0}=\{t-\sigma(t):t-\sigma(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\} \tag{5.7}$$

$$\hat{F}_{t_0}=\{t:t-\sigma(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\} \tag{5.8}$$

事实上，若 $R_\tau^\sigma=\int_0^{\sigma(t)}a(t)x(t-\tau)d\tau$，作代换 $s=t-\tau$，则 $R^\sigma$ 写成

$$\int_{t-\sigma(t)}^{t}a(s+\tau)x(s)ds$$

初始时刻 $t_0$ 给定后，容易得出(5.7)与(5.8).

(3)方程 $\dot{x}(t)=F_3(R_\nu,N_\nu)$，则 $E_{t_0}=R^-=(-\infty,t_0]$，$F_{t_0}=R_{t_0}^+$.

**例** 2　下列两方程

$$\dot{x}(t)=F(R_{u_1}^{\tau_1},\cdots,R_{u_l}^{\tau_l},R_{\tau_1}^{\sigma_1},\cdots,R_{\tau_m}^{\sigma_m}) \tag{5.9}$$

$$\dot{x}(t)=\hat{F}(N_{u_1}^{\tau_1},\cdots,N_{u_l}^{\tau_l},N_{\tau_1}^{\sigma_1},\cdots,N_{\tau_m}^{\sigma_m}) \tag{5.10}$$

其中诸 $\tau_i(t)\geqslant 0$，$\sigma_j(t)\geqslant 0$ 连续 $(i=1,2,\cdots,l,j=1,2,\cdots,m)$，其初始集与滞效集为同一形式

$$E_{t_0}=(\bigcup_{i=1}^{l}E_{t_0}^i)\cup(\bigcup_{j=1}^{m}\hat{E}_{t_0}^j) \tag{5.11}$$

$$E_{t_0}^i=\{t-\tau_i(t):t-\tau_i(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$$

$$\hat{E}_{t_0}^j=\{t-\sigma_j(t):t-\sigma_j(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$$

$$F_{t_0}=(\bigcap_{i=1}^{l}F_{t_0}^i)\cap(\bigcap_{j=1}^{m}\hat{F}_{t_0}^j) \tag{5.12}$$

$$F_{t_0}^i=\{t:t-\tau_i(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}$$

$$\hat{F}_{t_0}^j=\{t:t-\sigma_j(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}$$

对方程(5.1),我们有以下几个结果:

**定理** 5.1　若 $\tau(t)$ 连续有界,则有

(1)存在常数 $\beta\in R_+$,对 $\forall\ t_0\in R$, $F_{t_0}\subseteq[t_0,t_0+\beta]\overset{\text{def}}{=}I_\beta$.

(2) $E_{t_0}$ 为一有界闭区间, $E_{t_0}=[t_0-r_0,t_0]$,其中

$$t_0-r_0=\inf_{t\in F_{t_0}}\{t-\tau(t)\}$$

(3)对 $\forall\ t_0\in R$, $\exists\ r=\text{const.}>0$,使 $0\leqslant r_0\leqslant r$.

**证**　对(1),记 $\sup\limits_{t\in R}\tau(t)=\beta\Rightarrow t-\beta\leqslant t-\tau(t)$,由定义, $F_{t_0}$ 中的 $t$ 值成立 $t-\tau(t)\leqslant t_0\Rightarrow t-\beta\leqslant t_0$,即 $t\leqslant t_0+\beta\Rightarrow F_{t_0}\subseteq[t_0,t_0+\beta]$.

对(2),记 $g(t)=t-\tau(t)$, $\sup\limits_{t\in F_{t_0}}g(t)=t_0\in E_{t_0}$, $\inf\limits_{t\in F_{t_0}}g(t)=\alpha\overset{\text{def}}{=}t_0-r_0\Rightarrow E_{t_0}\subseteq[t_0-r_0,t_0]$. 反之,若 $I_\beta-F_{t_0}=\varnothing\Rightarrow\inf\limits_{t\in F_{t_0}}g(t)=\inf\limits_{t\in I_\beta}g(t)$,若 $I_\beta-F_{t_0}\neq\varnothing$,则 $t\in I_\beta-F_{t_0}$ 时仍有 $\inf\limits_{t\in F_{t_0}}g(t)=\inf\limits_{t\in I_\beta}g(t)$,而 $g(t)$ 在 $I_\beta$ 上连续 $\Rightarrow\forall\ t^*\in[t_0-r_0,t_0]$,至少存在一个 $t_1\in I_\beta$ 使 $t^*=g(t)\Rightarrow[t_0-r_0,t_0]\subseteq E_{t_0}\Rightarrow E_{t_0}=[t_0-r_0,t_0]$.

最后,我们有 $r_0=\sup\limits_{t\in F_{t_0}}\tau(t)\leqslant\sup\limits_{t\in R}\tau(t)=\beta\overset{\text{def}}{=}r$. 即(3)成立.

**定理** 5.2　若 $\tau(t)$ 连续,无界且存在常数 $M>0$ 使得 $\tau(t)\leqslant t+M$. 则有

(1)对任意给定的 $t_0$, $E_{t_0}$ 是有界集.

(2) $\exists\ t_0^n\to\infty$,以 $t_0^n$ 为初始时刻的初始集 $E_{t_0^n}$ 成立 $\sup E_{t_0^n}-\inf E_{t_0^n}\to\infty$,当 $n\to\infty$.

**证**　由 $\tau(t)<t+M\Rightarrow t-\tau(t)\geqslant -M\Rightarrow E_{t_0}\subseteq[-M,t_0]\Rightarrow$(1)成

立.

对(2),由 $\tau(t)$ 无界 $\Rightarrow$ 可选取序列 $\{t_0^n\}$,$t_0^n\to\infty$ 当 $n\to\infty$ 且 $\tau(t_0^n)\to\infty$. 设整数列 $\{K_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时,$K_n\to\infty$. 可取其子列 $(t_0^n)$ 使 $\tau(t_0^n)\geqslant K_n$ 对 $\forall\ n$ 成立 $\Rightarrow t_0^n-\tau(t_0^n)\leqslant t_0^n-K_n$. 注意到 $\sup E_{t_0^n}=t_0^n$,由 $\inf E_{t_0^n}\overset{\text{def}}{=}\alpha^n=t_0^n-r_0^n=\inf\limits_{t\in F_{t_0^n}}\{t-\tau(t)\}\leqslant t_0^n-\tau(t_0^n)\leqslant t_0^n-K_n\Rightarrow r_0^n\geqslant K_n\Rightarrow r_0^n\to\infty$,当 $n\to\infty$.

**定理** 5.3 若不存在常数 $M>0$ 使 $\tau(t)<t+M$ 恒成立. 则 $\inf E_{t_0}=-\infty, t_0\in R$.

**证** 由所设 $\exists\ \{t_n\}$. 当 $n\to\infty, t_n\to\infty$,使 $\tau(t_n)=t_n+M_n(n=1,2,\cdots)$,其中 $M_n\to\infty$,当 $n\to\infty$.

对 $\forall\ t_0\in R$ 给定,只要适当选择 $\{t_n\}$ 可设对一切 $n$ 成立 $-M_n\leqslant t_0\Rightarrow t_n-\tau(t_n)=-M_n\leqslant t_0\Rightarrow\{t_n\}\subseteq F_{t_0}$,由此有

$$\inf E_{t_0}=\inf_{t\in F_{t_0}}\{t-\tau(t)\}\leqslant\inf_{t_0\in F_{t_0}}\{t_n-\tau(t_n)\}=-M_n$$

对一切 $n$ 成立 $\Rightarrow\inf E_{t_0}=-\infty$

**定理** 5.4 $\tau(t)\geqslant 0$ 连续,对给定的 $t_0$,$F_{t_0}=R_{t_0}^+$ 的充要条件是

$$\sup_{t\in R}\{t-\tau(t)\}=M=\text{const.}\quad t_0\geqslant M\tag{5.13}$$

**证** 若上式成立 $\Rightarrow t-\tau(t)\leqslant M\leqslant t_0$ 对 $\forall\ t\in R_{t_0}^+$ 成立 $\Rightarrow F_{t_0}=R_{t_0}^+$. 反之,对给定的 $t_0$,若 $F_{t_0}=R_{t_0}^+$,则由定义有 $\sup\limits_{t\subset R_{t_0}^+}\{t-\tau(t)\}=M_1\leqslant t_0$.

**定理** 5.5 若 $\tau(t)\geqslant 0$ 连续,$\exists\ t_0$ 使 $F_{t_0}=R_{t_0}^+$,则 $\exists\ t_0^n\to\infty$ 使 $\sup E_{t_0^n}-\inf E_{t_0^n}\to\infty$,当 $n\to\infty$.

**证** 由定理 5. 4,$F_{t_0}=R_{t_0}^+\Leftrightarrow\sup\limits_{t\in R}\{t-\tau(t)\}=M\leqslant t_0\Rightarrow t-M\leqslant\tau(t)$. 若 $\exists\ \hat{M}>0$ 使 $\tau(t)<t+\hat{M}$,则由定理 5. 2 本定理结论成立.若不存在 $\hat{M}>0$ 使 $\tau(t)<t+\hat{M}$,则由定理 5. 3 $\Rightarrow$ 定理结论仍成立.

从上面的论述看到,$\tau(t)$ 连续时 $E_{t_0}$ 的构造可能是有限闭区间

$[t_0-r,t_0]$，也可能是 $R_{t_0}^-$，事实上，它还可能是一个不连通集. 例如

**例 3** 对 Эльсгольц 方程

$$\dot{x}(t)=x(t)-x(te^{-t}) \tag{5.14}$$

$\tau(t)=t-te^{-t}$，$t_0=1$，$E_{t_0}=(0,e^{-1}]\cup\{1\}$. 此例还说明 $F_{t_0}$ 除了可能是有限区间 $[t_0,t_0+r]$ 及 $R_{t_0}^+$ 以外还可能是一个不连通集. 例如取 $t_0=e^{-2}e^{-e^{-2}}$，则 $E_{t_0}=(0,t_0]$. 我们注意到函数 $te^{-t}$，当 $t=1$ 时取极

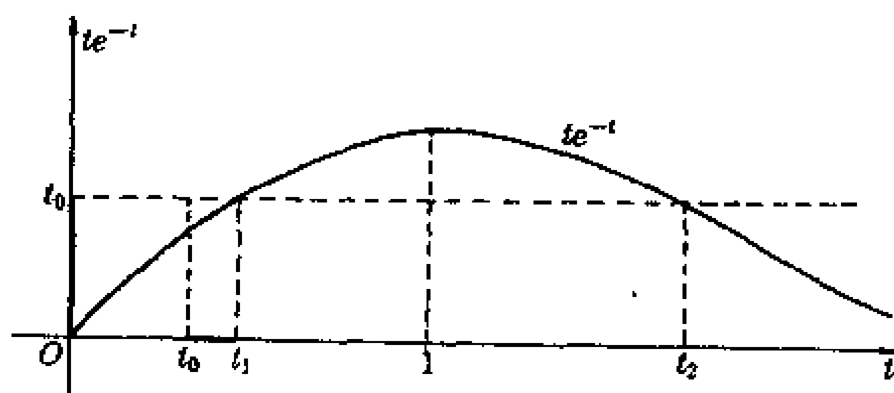



图 1.1

大值 $e^{-1}$. 由于 $t\geqslant t_0$ 时在集 $[t_0,t_1]\cup[t_2,+\infty)$ 中 $te^{-t}\leqslant t_0$，即 $F_{t_0}=[t_0,t_1]\cup[t_2,+\infty)$. 注意到 $te^{-t}$ 在 $[0,1]$ 上是严格单调的. 不难推得 $t_1=e^{-2}$ 及 $t_2(t_0)>1$ 存在.

## 2. 基本初值问题与两种解映射

先考虑一类典型的 R 型方程. 设 $x\in R$，记 $D=\{x:x\in R,|x|<d\}$，其中 $d$ 是常数或 $+\infty$，$\tau(t)\geqslant 0$，$f:R\times D\times D\to R$. $t_0$ 为初始时刻，则 RDDE($f$) 的基本初值问题写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)))\\ x(t)=\psi(t) \quad t\in E_{t_0}\end{cases} \tag{5.15}$$

**定义 5.2** (5.15) 的一个解 $x(t)$ 是定义在 $E_{t_0}\cup R_{t_0}^+$ 上的函数，

它在 $E_{t_0}$ 上等于给定的初始函数 $\psi(t)$，在 $t\geqslant t_0$ 时满足方程. 在解的表达式中若强调初始数据，记为 $x(t,t_0,\psi)$ 或 $x(t_0,\psi)(t)$.

**注** (5.15)中 $t$ 可以不是定义在 $R$，而是在 $I\subset R$ 上.

由定义看出，决定 RDDE($f$)的一个解，须要而且只须要在 $E_{t_0}$ 上给定函数 $\psi(t)$，而且通常假定 $\psi$ 连续，例如 $\tau=\text{const.}$，则问题(5.15)在 $R\times R$ 中的几何解释如图 1.2 所示. 必须强调指出，解 $x(t)$ 是定义在 $[-\tau,\infty)$ 上而不仅仅是在 $[0,\infty)$ 上.

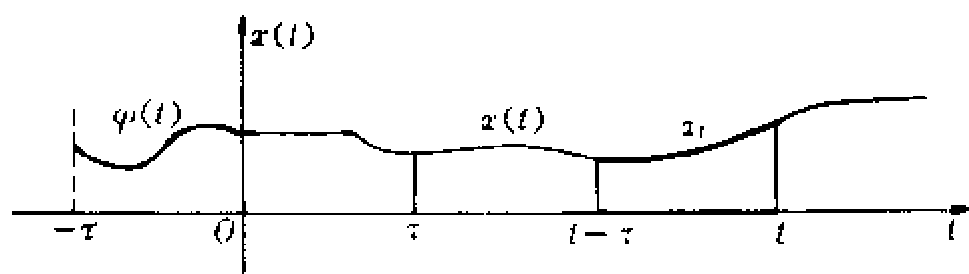



图 1.2

还可把(5.15)写成(4.15)形式($r=\tau$)

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t)\\ x_\sigma=\varphi\end{cases}\tag{5.16}$$

其中 $\sigma$ 是初始时刻，$\varphi$ 为初始函数.

现在对普遍的(4.15)给出解的定义.

**定义** 5.3 若 $\exists\ \sigma\in R, A>0$($A$ 可以是 $\infty$)，使 $x\in C([\sigma-r,\sigma+A),R^n)$，且当 $t\in[\sigma,\sigma+A)$ 时 $(t,x_t)\in\Omega\subseteq R\times C$，$x(t)$ 满足(4.15). 则 $x(t)$ 叫做(4.15)在 $[\sigma-r,\sigma+A)$ 上的一个解. 若 $x(t)$ 是 $[\sigma-r,\sigma+A)$ 上的一个解，且 $x_\sigma=\varphi$，则称解 $x$ 过 $(\sigma,\varphi)$，或过 $(\sigma,\varphi)$ 的一个解.

(5.16)中 $x\in R$，即 $n=1$. 定义 5.2 与定义 5.3 在一些假定下完全一致. 例如设 $\tau(t)$ 连续有界，由定理 1 存在 $r>0$，对 $\forall\ t_0\in R$，$E_{t_0}\subseteq[t_0-r,t_0]$，用这个 $r$ 来建立空间 $C$，在 $E_{t_0}$ 上给定 $\psi$ 换为在区间 $[t_0-r,t_0]$ 上给定 $\varphi$，$\varphi$ 在 $E_{t_0}$ 上的限制等于 $\psi$，$\varphi$ 在 $\overline{E}_{t_0}=[t_0-r,t_0]$ 一

$E_{t_0}$上随便定义，通常保持$\varphi$的连续性即可. 因为在$\bar{E}_{t_0}$上的$\varphi$值对决定解$x(t)$不起作用. 所以$\psi$与$\varphi$决定(5.15)与(5.16)同一个解.

现在给出解映射的两种解释和几何意义.

(4.15)或(5.16)中的$x_t=x(t+\theta)$，如图1.2所示，对任意的$t$，截取一段长度为$r$的区间$I_t=[t-r,t]$，$x(t)$在$I_t$上的限制即为$x_t$. 若$t=\sigma$，正好有$x_\sigma=\varphi$. 所以解映射在$R\times R^r$((5.16)则应为$R\times R$)中的几何意义如图1.2所示. 此外，还可在$R\times R$中得到另一种解释. 如图1.3所示. 此时$\varphi$在$C$中只是一个点，当$t\geqslant\sigma$变动时$(t,x_t)$在$R\times C$中画出积分曲线$\Gamma$，初始点为$(\sigma,\varphi)$.

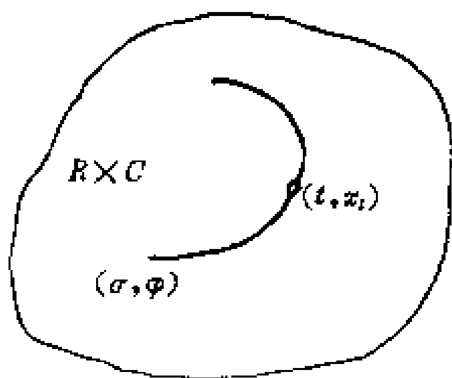



图 1.3

现在进一步阐述各类方程的基本初值问题提法，所有问题都要求正向($t\geqslant t_0$)求解：

(1)对多个滞量方程，基本初值问题为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\\ x=\psi(t),t\in E_{t_0}\end{cases}\tag{5.17}$$

其中$x\in R^n$，$E_{t_0}$由(5.6)确定.

(2)对分布滞量方程的基本初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=\int_0^{\sigma(t)}g(t,x(t),x(t-\tau))d\tau\\ x=\psi(t),t\in\hat{E}_{t_0}\end{cases}\tag{5.18}$$

其中$\hat{E}_{t_0}$由(5.7)确定.

(3)对中立型方程分别有

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))\dot{x}(t-\tau(t)))\\ x=\psi,\dot{x}=\dot{\psi},t\in E_{t_0}\end{cases}\tag{5.19}$$

其中 $x\in R^n$，$E_{t_0}$由(5.3)决定．

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t,\dot{x}_t)\\x_\sigma=\varphi,\dot{x}_\sigma=\dot{\varphi},x\in R^n\end{cases}\tag{5.20}$$

其中 $\sigma$ 为初始时刻，$\varphi(\theta)$，$\dot{\varphi}(\theta)$，$\theta\in[-r,0]$给定．

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)\\x_\sigma=\varphi,x\in R^n\end{cases}\tag{5.21}$$

$\varphi(\theta)$，$\theta\in[-r,0]$为给定的初始函数．

(4)超前型方程的一类初值问题

$$\begin{cases}x(t)=f(t,x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t)))\\x=\psi,\dot{x}=\dot{\psi},t\in E_{t_0}\end{cases}\tag{5.22}$$

$t_0$ 为初始时刻，$E_{t_0}$由(5.3)确定．事实上，A 型方程沿正向求解是微分延拓．

## §6 分步法

### 1. 单滞量的情形

根据基本初值问题的提法，我们给出一种在有限区间内求解 FDE 的方法——分步法．它类似于差分方程的分步法，但需要积分．即

"在基本初值问题的提法中，把 $E_{t_0}$上的已知函数代入方程，则当 $t\in F_{t_0}$时方程化为一个 ODE(超前型方程的初值问题除外)，求解这个 ODE 便得到此 FDE 在 $F_{t_0}$上的解．"

**例 1** 在[0,2]上求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-x(t-1)\\x=t\quad t\in[-1,0]\quad(t_0=0)\end{cases}\tag{6.1}$$

由 $F_0=[0,1]$，在其上(6.1)化为 $\dot{x}(t)=-(t-1)\Rightarrow$在 $F_0$ 上的解

为 $x_1(t)=-\frac{1}{2}(t-1)^2+C$，由 $\varphi(0)=0\Rightarrow C_1=\frac{1}{2}$. 第二步，以 $t=1$ 为初始时刻，$F_1=[1,2]$，$E_1=[0,1]$，这时初始函数应为上一步的解 $x_1(t)$，同理(6.1)化为 $\dot{x}(t)=-[-\frac{1}{2}(t-1-1)^2+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}(t-2)^2-\frac{1}{2}\Rightarrow$ 在 $F_1$ 上的解 $x_2(t)=\frac{1}{3!}(t-2)^3-\frac{t}{2}+C_2$，由 $x_1(1)=\frac{1}{2}=x_2(1)=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+C_2\Rightarrow C_2=1+\frac{1}{6}$，故 $F_1$ 上的解为

$$x_2(t)=\frac{1}{3!}(t-2)^3-\frac{t}{2}+\frac{7}{6}$$

一般地说，在 $[t_0,\infty)$ 要用分步法求得解是不可能的，但若干特别情形是可以得到解的解析式的，我们指出两种类型：

第Ⅰ类：可以归纳反复迭代积分规律的方程.

**例 2** 对基本初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t-1)\\ x(t)=1,\quad t\in[0,1]\end{cases}\tag{6.2}$$

用分步法求得解为

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(t-n)^n}{n!}\qquad t\in[N,N+1],N=0,1\cdots\tag{6.3}$$

**例 3** 设 $a,c,\tau>0$ 皆为常数，对 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t-\tau)\\ x=C=\text{const},\quad t\in[t_0-\tau,t_0]\end{cases}\tag{6.4}$$

用分步法求得解

$$x(t)=C\sum_{n=0}^{1+\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]}a^n\frac{(t-t_0-(n-1)\tau)^n}{n!}\tag{6.5}$$

其中[·]表示取整数部分.

第Ⅱ类：$F_{t_0}=R_{t_0}^+$ 的情形.

**例 4** 类似于 Эльсгольц 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(te^{-t}))\\ x(t)=t^2, \quad t\in E_1,t_0=1\end{cases} \tag{6.6}$$

此时 $F_1=[1,\infty)$，用初始函数代入方程，(6.6)化为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),t^2e^{-2t}),x(1)=1 \tag{6.7}$$

其中 $\psi(1)=1^2=x(1)=1$. 解 ODE 初值问题(6.7)，即得(6.6)在 $R_{t_0}^+$ 上的一个解.

**例 5** 具分布滞量的 Cauchy 问题，同样可以用分步法，如

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0}g(t,x(t))x(t+\tau)d\tau\\ x=e^t,t\in R_-,t_0=0\end{cases} \tag{6.8}$$

此时 $E_{t_0}=R_-$，$F_{t_0}=R_+$，(6.8)化为 ODE 的初值问题：

$$\dot{x}(t)=-g(t,x(t))e^t,x(0)=1 \tag{6.9}$$

我们看到，对第Ⅱ种情形，在应用分步法求解时，只需一步即可完成. 对中立型方程同样可用分步法求解.

**例 6** 求[1,3]中 NDDE Cauchy 问题的解

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t-1)+2\dot{x}(t-1)\\ x(t)=1,\dot{x}(t)=0,t\in[0,1],t_0=1\end{cases} \tag{6.10}$$

$t_0=1$，$E_1=[0,1]$，$F_1=[1,2]$，在 $F_1$ 上方程为 $\dot{x}(t)=1$，$x(1)=1$. $\Rightarrow$ 解为 $x_1(t)=t$，以 2 为初始时刻，$E_2=[1,2]$，$F_2=[2,3]$. 在 $F_2$ 上，有 $\dot{x}(t)=t+1$，$x(2)=x_1(2)=2\Rightarrow x_2(t)=\frac{1}{2}t^2+t-2$，这里 $x_1$，$x_2$ 分别为 $x(t)$在[1,2][2,3]上的限制.

对超前型方程的基本初值问题(5.22)使用分步法求解的例子如下：

**例 7** 在[0,2]上求解 ADDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}x(t)=x(t-1)+\frac{1}{2}\dot{x}(t-1)\\ x(t)=2t^2,\dot{x}(t)=4t,t\in[-1,0],t_0=0\end{cases} \tag{6.11}$$

由 $t_0=0$，$E_0=[-1,0]$，$F_0=[0,1]$，在 $F_0$ 上由分步法得 $x(t)$在 $F_0$

上的限制 $x_1(t)$ 为

$$x_1(t)=2(t-1)^2+\frac{1}{2}\times4(t-1)=2(t-1)t,t\in[0,1] \tag{6.12}$$

其中 $x(0)=x_1(0)=0$，由(6.12)$\Rightarrow\dot{x}_1(t)=2(2t-1)$.

以 1 为初始时刻，$E_1=[0,1]$，$F_1=[1,2]$，在 $F_1$ 上有

$$\begin{aligned}x_2(t)&=2(t-2)(t-1)+\frac{1}{2}\times2(2t-1)\\&=2[(t-1)(t-2)+(t-\frac{3}{2})]\end{aligned}$$

其中 $x_2(t)$ 是 $x(t)$ 在 $F_1$ 上的限制，$x_1(1)=0\neq x_2(1)=-1$.

由此看到正向求解 A 型方程是微分延拓，解存在的条件是苛刻的，例 7 表明连续解只存在于 $[0,1]$ 之上，在 $t=1$ 处解已不连续了.

## 2. 多滞量方程的分步法

**例 8** 考虑多滞量方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+cx(t-3\tau)\\x(t)=\varphi(t),t\in[-3\tau,0], \quad t_0=0\end{cases} \tag{6.13}$$

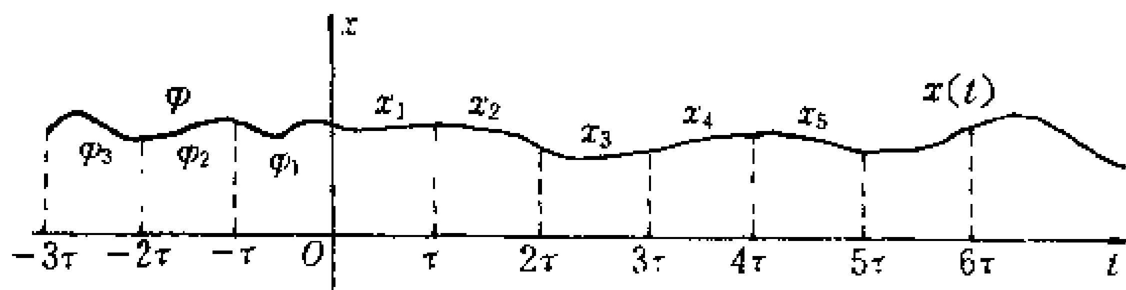



图 1.4

其中 $a,b,c,\tau>0$ 都是常数．如图 1.4 所示，把初始函数 $\varphi$ 在 $[-\tau,0]$，$[-2\tau,-\tau]$ 和 $[-3\tau,-2\tau]$ 上的限制分别记为 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$．$x(t)$ 在

$[(i-1)\tau, i\tau]$ $(i=1,2,\cdots)$ 上的限制记为 $x_i(t)$.

由定义，$t_0=0$ 时，$E_0=[-3\tau,0]$，所以应当在 $E_0$ 上给定初始函数 $\varphi$，$F_0=[0,\tau]$，在 $F_0$ 上解为 $x_1(t)$，它应满足 ODE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=ax_1(t)+b\varphi_1(t-\tau)+c\varphi_3(t-3\tau) \\ x_1(0)=\varphi(0), \qquad t\in[0,\tau]\end{cases} \tag{6.14}$$

可见 $F_0$ 上(6.13)的解仅由 $\varphi_1$，$\varphi_3$ 决定，而与 $\varphi_2$ 无关. 求解(6.14)得 $x_1(t)$，$t\in[0,\tau]$，以 $\tau$ 为初始时刻，则 $E_\tau=[-2\tau,\tau]$，此时由 $\varphi_2$，$\varphi_1$，$x_1(t)$组成初始函数，$F_\tau=[\tau,2\tau]$，在 $F_\tau$ 上解为 $x_2(t)$，它应满足

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=ax_2(t)+bx_1(t-\tau)+c\varphi_2(t-3\tau) \\ x_2(\tau)=x_1(\tau), \qquad t\in[\tau,2\tau]\end{cases} \tag{6.15}$$

积分得(6.13)在 $F_\tau$ 上的解 $x_2(t)$，它仅由 $\varphi_2$，$x_1$ 决定而与 $\varphi_1$，$\varphi_3$ 无直接关系.

当 $t_0=2\tau$ 时，$E_{2\tau}=[-\tau,2\tau]$，$F_{2\tau}=[2\tau,3\tau]$. 同理可得 $x_3(t)$，它依赖于 $\varphi_1$，$x_2$，而不直接依赖于 $\varphi_2$，$\varphi_3$ 和 $x_1(t)$. 如此继续下去，$x_i(t)$当 $i\geqslant 4$ 时都不直接依赖于 $\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$ 了.

**注 1**　在例 8 中为了明确说明初始函数各个部分解的每一段的直接影响，把初始函数的限制记为 $\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$，事实上，在方程中可直接用 $\varphi$ 代入，只要在求积计算过程中留心它的定义区间就行了.

**注 2**　在例 8 的求解过程中，第一步不可能超过 $F_0=[0,\tau]$，因为解在$[\tau,2\tau]$上还依赖于未知的 $x_1(t)$，这说明我们为什么定义多滞量系统的滞效集 $F_{t_0}$取诸 $\tau_i$ 所决定的滞效集 $F^i_{t_0}$的交集. ——$F_{t_0}=\bigcap\limits_i F^i_{t_0}$. 换言之，滞效集是用分步法求解时第一步能够决定解的范围.

**例 9**　在[0,4]上求解初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t-2)+2x(t-3) \\ x(t)=t, \qquad t\in[-3,0], \qquad t_0=0\end{cases} \tag{6.16}$$

$E_0=[-3,0]$，$F_0=[0,2]$，在 $F_0$ 上，$\dot{x}_1(t)=(t-2)+2(t-3)$，$\varphi(0)$

$=x_1(0)=0\Rightarrow x_1(t)=\frac{2}{3}t^2-8t$,在 $F_2=[2,4]$上,得到 $x_2$ 满足

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=\frac{3}{2}(t-2)^2-8(t-2)+3(t-3)^2-4(t-3)\\ x_1(2)=x_2(2)=-10\end{cases}$$

$\Rightarrow x_2(t)=\frac{3}{2}t^3-18t^2+61t-72, t\in[2,4]$

分步法不仅提供在有限时间内求解析解的可能性,而且对某些命题的证明和概念的理解很有帮助.不仅如此,分步法对构造一些例子与反例提供了有效的手段.

## §7 若干注释

### 1. FDE 类的补充说明

FDE 与偏微分方程不同,但从方程描述的物理现象和它们自身的数学特点来看,它可以和偏微分方程的各型做一个大致的类比:滞后型类似抛物型方程,中立型相当于双曲型方程.某种混合型方程,例如 Lecornu 方程

$$\dot{x}(t)=x(t-1)+x(t+1)$$

J. Hale 猜想它是否类似于某类椭圆型方程.

在诸多文献中,FDE 还有种种不同的记法,不同的名称.例如记 $t-\tau(\tau)=g(t)$. 则 DDE 写成

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(g(t))) \tag{7.1}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(g(t)),\dot{x}(g(t))) \tag{7.2}$$

等等. $\tau(t)\geqslant 0\Leftrightarrow g(t)\leqslant t$. 又例如某些文献中把 DDE 叫做"病态方程"、"混合差分微分方程"等等.提请读者注意.

对 RFDE,不问它是有限时滞还是无限时滞系统,R. D. Driver 都把它们写成另一种普遍的统一表达式

$$\dot{x}(t)=F(s,x(s),\alpha\leqslant s\leqslant t),t\in R_+ \tag{7.3}$$

其中 $\alpha$ 可以是常数、$-\infty$或者是 $t$ 的函数，例如 $\alpha=t-\tau$，$\alpha=t-\tau(t)=g(t)$等等. $x(s)$：$[\alpha,t]\to R^n$，$F$ 是给定的泛函. 一般地说它是若干算子的复合算子. 我们选择算子 $F$ 可以使(7.3)化为已知的种种FDE形式.

**例** 1 $(s)\int$表示 Stiltjes 积分，选取 $F$ 为

$$F=f(t,g_1(x(s)),g_2(x(s)),t-r\leqslant s\leqslant t) \tag{7.4}$$

其中 $r=\text{const.}>0$，$g_1(x(s))=(s)\int_{t-r}^{t}x(s)dR_1(t,s)$，$g_2(x(s))=(s)\int_{t-r}^{t}x(s)dR_2(t,s)$，核 $R_1,R_2$ 分别为

$$R_1(t,s)=\begin{cases}0 & t-r\leqslant s<t\\ 1 & s=t\end{cases}\qquad R_2(t,s)=\begin{cases}1 & s=t-r\\ 0 & t-r<s\leqslant t\end{cases}$$

则(7.3)化为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r)) \tag{7.4$'$}$$

**例** 2 选择算子 $F$ 为

$$F=(s)\int_{t-r}^{t}x(s)d_s\hat{R}(t,s) \tag{7.5}$$

令 $\theta=s-t$，$\hat{R}(t,s)=\hat{R}(t,t+\theta)\triangleq R(t,\theta)$，则(7.3)化为

$$\dot{x}(t)=(s)\int_{-r}^{0}x(t+\theta)d_\theta R(t,\theta) \tag{7.5$'$}$$

**例** 3 对(7.4)中的 $g_1,g_2$，取 $F=ag_1+bg_2$，则(7.3)化为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r)$$

事实上，对 RFDE$(f)$，由定义 $x_t=x(t+\theta)$，$-1\leqslant\theta\leqslant 0$，我们可作如下的改写(其中记 $s=t+\theta$)：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=f(t,x_t)=f(t,x(t+\theta),-r\leqslant\theta\leqslant 0)\\&=f(t,x(t+\theta),t-r\leqslant t+\theta\leqslant t)\\&=f(t,x(s),t-r\leqslant s\leqslant t)\end{aligned}$$

因而(7.3)原则上只是记号的改变而已.

## 2. FDE 为“自治”的含义

在 RFDE$(f)$的定义中若 $f$ 不显含 $t$,即

$$\dot{x}(t)=f(x_t) \tag{7.6}$$

不能认为(7.6)就是自治方程,因为它既可以代表时滞为常数的自治方程,也可以代表满足条件 $0\leqslant\tau(t)\leqslant r=\text{const.}$ 的变时滞方程,二者都用 $C([-r,0],R^n)$作为初始数据空间. 只有把算子具体列出或者指明时滞是常数才是明确的,这一点极须强调,以免出错.

## 3. 有限与无穷时滞系统

这里我们从另一角度把 FDE 重新划分为两大类——有限与无限时滞系统.

在§4 中我们提到:设$\exists$ $r=\text{const.}\geqslant 0$, $0\leqslant\tau(t)\leqslant r$,由 $r$ 建立了初始数据空间 $C([-r,0],R^n)$,使 $x_t=x(t+\theta)\in C$,从而得到 RFDE$(f)$

$$\dot{x}=f(t,x_t) \tag{7.7}$$

(7.7)广泛地概括了滞量有界的 FDE,叫做有限时滞系统. 反之,统称为无限时滞系统.

**引理** 7.1 FDE 为无限时滞系统的充要条件是:$\exists$ $t_n^*\to\infty$, $n\to\infty$,使得 $\sup E_{t_n^*}-\inf E_{t_n^*}\to\infty$, $n\to\infty$,其中 $\sup E_{t_n^*}=t_n^*$. $\inf E_{t_n^*}$本身可以是$-\infty$.

事实上,无限时滞系统包含两种基本类型:

$$(1)\ \dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))),\ \tau(t)\text{无界} \tag{7.8}$$

$$(2)\ \dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t,x(t),x(t+\tau))d\tau \tag{7.9}$$

其中“$\int$”是 Riemann 积分或 Stieltjes 积分.

对无限时滞系统,如果要建立一个统一的初始数据空间以得

到(7.7)型的广泛形式，就必须引入$C((-\infty,0],R^n)$，它与$C([-r,0],R^n)$构成有限与无限时滞系统的本质差别.

但是，我们还要进一步指出，在§5中提到要决定FDE的一个解只要在$E_{t_0}$上给定初始函数就足够了. 而对有限时滞系统来说，对$\forall\ t_0\in R, E_{t_0}\subseteq[t_0-r,t_0]$. 在$\overline{E}_{t_0}=[t_0-r,t_0]-E_{t_0}$上的$\varphi$值对确定此解并不起作用，可见选取$r$不是唯一的，只要使$0\leqslant\tau(t)\leqslant r$就行. 例如用$r_1=ar(a>1)$代替$r$同样可以建立$C([-r_1,0],R^n)$和方程(7.7)，而不改变问题的实质. 自然地，取$r=-\infty$仍然不改变问题的实质，所以从这个角度看可以认为有限时滞系统是无限时滞系统的一种特殊情形，不过把二者明确加以区分是有充分理由的：即有限时滞系统理论已日臻成熟，整个理论系统简洁规整，应用背景广泛. 而无限时滞系统的基本理论是1978年才初步确立的，理论系统冗长繁琐，还很不完善.

**注** 引理7.1表明对连续无界的滞量$\tau(t)$和$\sigma(t)$，虽然对固定的$t_0, E_{t_0}\subseteq[t_0-r(t_0),t_0]$，但随着$t_0$的变动$r(t_0)$也变动，对一切$t_0\in R$的常数$r$不存在，因此统一的初始数据空间仍只能取$C((-\infty,0],R^n)$，从这个意义上说，具无界滞量的系统是无限时滞系统.

**例4** 考虑RDDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\frac{1}{2}t)) \tag{7.10}$$

则对给定的$t_0, E_{t_0}=[t_0-\frac{t_0}{2},t_0]=[\frac{t_0}{2},t_0]$. 显然区间的长度随$t_0$增大而无限增大，是无限时滞系统.

### 4. FDE的求解方法

求解析解也是FDE的最初愿望，但这一想法迄今收效甚微，除了分步法以外，基本状况如下：

①对一些特定的方程寻求某些观察解或者特殊解法.

**例 5** 对素数分布方程

$$Z'(n)=-Z(n)Z(\frac{n}{2})/2n \tag{7.11}$$

有观察解 $Z(n)=\frac{1}{\ln n}$.

对 Poisson 方程

$$y^2(x)+y^2(x)y'^2(x)-y^2(x+y(x)y'(x))=1 \tag{7.12}$$

可以证明它没有连续解. 而方程

$$\dot{x}(t)=x(x(t))-x(t-1) \tag{7.13}$$

有非零解 $x(t)=t, x(t)=K=\text{const.}$

②对线性自治系统用 Laplace 变换法求解(在第二章中将详尽阐述通解的表示).

③对某些特殊的方程寻求专门求解方法,例如对 Biot 方程

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(t-1)=t(x(t)-x(t-1))$$

$$+\frac{1}{4}(x(t)-x(t-1))^2 \tag{7.14}$$

令 $y=x(t)-x(t-1)$,则(7.14)化为一个常微分方程

$$\dot{y}(t)=ty(t)+\frac{1}{4}y^2(t)$$

求解这个方程得到 $y(t)$,代入差分方程 $y=x(t)-x(t-1)$后,原则上可解得 $x(t)$.

④级数解法. 也仅仅对某些特殊方程有效. 例如设 $\sigma=\text{const.}>0, a\in R, \lambda$ 为参数,方程

$$\dot{y}(t)=\lambda ae^t y(t-\sigma) \tag{7.15}$$

设(7.15)有形式级数解 $y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(t)$,诸 $y_i(t)$是待定的,用 $y(t)$, $\dot{y}(t)$代入(7.15). 比较系数以确定 $y_i(t)$.

5. **滞量的标准化**

设 $\tau=\text{const.}>0$，对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{7.16}$$

作代换 $s\tau=t$，可把(7.16)化为自变量为 $s$，滞量为 1 的方程，即 $dt=\tau ds$，$t-\tau=\tau(s-1)$，记 $y(s)=x(\tau s)$，我们有

$$\dot{y}(s)=\tau f(\tau s,y(s),y(s-1))\overset{\text{def}}{=}g(s,y(s),y(s-1)) \tag{7.17}$$

可见当 $\tau=\text{const.}>0$ 时不妨研究 $\tau=1$ 的情形即可. 因为变换 $t=\tau s$ 对稳定性、渐近性、周期解的存在性、解的振动性均无实质影响.

在一定条件下，即使滞量为 $t$ 的函数，仍可作类似的变换把它化为 1. 例如对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{7.18}$$

设 $\tau(t)$ 满足条件

①$\tau(t)>0$，$\dot{\tau}(t)$ 存在且 $\tau(t)-t\dot{\tau}(t)\neq 0$

②令 $t=\tau(t)s$，可解得 $t=\psi(s)$

③$\psi(s)$ 严格单调增加且 $t=0\Leftrightarrow s=0$

则(7.18)在变换 $t=\tau(t)s$ 之下可以把滞量化为 1，即

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\frac{dx(\psi(s))}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dx(\psi(s))}{ds}\left(\frac{\tau(t)-t\dot{\tau}(t)}{\tau^2(t)}\right)\\&=\frac{dx(\psi(s))}{ds}\left(\frac{\tau(\psi(s))-\psi(s)\dot{\tau}(\psi(s))}{\tau^2(\psi(s))}\right)\end{aligned}$$

由 $x(t-\tau(t))=x(\tau(t)(s-1))=x(\psi(s-1))$，(7.18)化为

$$\begin{aligned}\dot{y}(s)&=\frac{\tau^2(\psi(s))}{\tau(\psi(s))-\psi(s)\dot{\tau}(\psi(s))}f(\psi(s),y(s),y(s-1))\\&\triangleq\bar{f}(s,y(s),y(s-1))\end{aligned} \tag{7.19}$$

其中 $y(s)\triangleq x(\psi(s))$.

**例 6** 设(7.18)中 $\tau(t)=\dfrac{1+t}{2+t}$，$t\geqslant 0$，则

$$\dot{\tau}(t)=\frac{1}{(2+t)^2},\tau(t)-t\dot{\tau}(t)=\frac{1}{(2+t)^2}(t^2+2t+2)$$

$$t=\psi(s)=\frac{1}{2}(s-2+\sqrt{s^2+4})$$

它完全满足条件①②③，记 $y(s)=x(\psi(s))$，(7.18)写成

$$\dot{y}(s)=\frac{(s+\sqrt{s^2+4})^2}{1+(s+\sqrt{s^2+4})^2}f(\frac{1}{2}(s-2)+\sqrt{s^2+4}),y(s),$$
$$y(s-1))\triangleq\bar{f}(s,y(s),y(s-1))$$

滞量化为 1 的目的有二，其一是把常数滞量问题简化为单位时滞问题. 其二是讨论系统以滞量为参数的性质时，把问题化为显含参数的系统加以研究.

### 6. RFDE 解的平展性

以 RDDE 的 Cauchy 问题为例，设 $x\in R$，

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))\\ x(t)=\psi(t), \qquad t\in[t_0-\tau,t_0]\end{cases}\tag{7.20}$$

其中 $\psi,f$ 可微足够多次（例如 $K$ 次），则通常在点 $t_0+(K-1)\tau$ 处的 $K$ 阶导数有第一类间断点，但低于 $K$ 阶的导数在此点都是连续的.

事实上，在 $t_0$ 处通常一阶导数 $\dot{x}(t)$ 有第一类间断点，因为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\psi(t-\tau)) \qquad t\in[t_0,t_0+\tau]\tag{7.21}$$

的积分要求满足条件 $x(t_0)=\psi(t_0)$，但未必成立 $\dot{x}(t_0+0)=\dot{\psi}(t_0-0)$，只有特别选取 $\psi(t)$时才可能. 换言之，必须选取 $\psi$ 满足条件

$$\dot{\psi}(t_0-0)=\dot{x}(t_0+0)=f(t,\psi(t_0),\psi(t_0-\tau))\tag{7.22}$$

在点 $t_0+\tau$ 处，解的一阶导数是连续的，因为 $\dot{x}(t)$由(7.21)确定，而(7.21)右端在 $t_0+\tau$ 处是连续的. 但二阶导数一般在 $t_0+\tau$ 处是间断的，因为在式

$$\ddot{x}(t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x(t)}\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial x(t-\tau)}\dot{x}(t-\tau)\tag{7.23}$$

的右端里，导数 $\dot{x}(t-\tau)$（即 $\dot{x}(t)$ 在 $t_0$ 处）可能是间断的．但 $\dot{x}(t-\tau)$ 和 $x(t-\tau)$ 在 $t_0+2\tau$ 处都是连续的，所以 $\dot{x}(t)$ 在 $t_0+2\tau$ 处是连续的，依此类推，随着时间的推移越来越光滑．这一性质叫做解的"平展性"．

对中立型方程，例如 NDDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau)) \\ x=\psi,\dot{x}=\dot{\psi} \quad t\in[t_0-\tau,t_0] \end{cases} \tag{7.24}$$

其中 $\dot{\psi}$ 在 $E_{t_0}$ 的端点处分别为左右导数，即

$$\dot{\psi}(t_0)=\dot{\psi}(t_0-0) \quad \dot{\psi}(t_0-\tau)=\dot{\psi}(t_0-\tau+0)$$

因为要求的是连续解，故恒设 $\psi(t_0-0)=x(t_0+0)$．但对一般的 $\psi$，$\dot{\psi}$ 未必成立

$$\dot{\psi}(t_0-0)=\dot{x}(t_0+0)=f(t_0,x(t_0),\psi(t_0-\tau),\dot{\psi}(t_0-\tau)) \tag{7.25}$$

若(7.25)不成立，则由于 $f$ 中含有未知函数的导数，所以 $\dot{x}(t)$ 在 $t_0+K\tau(K=1,2,\cdots)$ 处仍是不连续的．即不管 $\psi,f$ 可微多少次，$x(t)$ 在 $t_0+K\tau$ 处的可微性并不改变，换句话说，N 型方程的解没有平展性．

平展性是 R 型方程特有的性质．

# 第二章

# 线性 DDE

线性 DDE 是 FDE 理论的基础和典范，弄清楚它的各种性态和处理方法对以后各章有重要意义. 本章的重点是线性自治系统.

## §1 线性算子的基本性质

### 1. 一维的情形

对一阶 RDDE，设 $a\neq 0, b、c、\tau>0$ 皆实数，$f: R\to R$. 引入线性算子 $L(x)$ 为

$$L(x)=a\dot{x}(t)+bx(t)+cx(t-\tau)=0 \tag{1.1}$$

$$L(x)=f(t) \tag{1.2}$$

与常微分方程类似，我们有

①若 $x_1(t,t_0,\psi_1)$，$x_2(t,t_0,\psi_2)$ 为(1.1)的两个解，$\alpha,\beta\in R$，则 $\alpha x_1+\beta x_2$ 仍为(1.1)的解，记为

$$L(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha L(x_1)+\beta L(x_2)=0, t\in[t_0-\tau,\infty)$$

其中 $\alpha x_1+\beta x_2=\alpha\psi_1+\beta\psi_2, t\in[t_0-\tau,t_0]$.

②若 $x(t,t_0,\psi)$ 为(1.1)的解，$\hat{x}(t,t_0,\hat{\psi})$ 为(1.2)的解，则 $x+\hat{x}$ 为(1.2)的解，即 $L(x+\hat{x})=L(x)+L(\hat{x})=f(t), t\in[t_0-\tau,\infty)$，而 $x+\hat{x}=\psi+\hat{\psi}$，当 $t\in[t_0-\tau,t_0]$.

③(叠加原理)$f_i(t): R\to R(i=1,\cdots,m)$，诸方程

$$L(x)=f_i(t)\quad (i=1,\cdots,m) \tag{1.3}$$

在初始条件 $x_i=\psi_i, t\in[t_0-\tau, t_0]$之下的解分别为 $x_i(t, t_0, \psi_i)$，则 $\sum_{i=1}^{m} x_i(t)$是方程 $L(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(t)$在$[t_0-\tau, \infty)$上的解，满足初始条件$\sum_{i=1}^{m} x_i(t)=\sum_{i=1}^{m} \psi_i(t), t\in[t_0-\tau, t_0]$.

④若 $a, b, c$ 为实的，$f$ 为复函数，则(1.2)以 $\psi=\psi_u+i\psi_v$ 为初始函数的解 $x(t, t_0, \psi) \triangleq u(t)+iv(t)$的实部和虚部，$u, v$ 分别为 $L(x)=\mathrm{Re}f(t), L(x)=\mathrm{Im}f(t)$的解，它们满足初始条件 $u=\psi_u$，$v=\psi_v, t\in[t_0-\tau, t_0]$.

⑤对(1.1)，(1.2)作变量的线性代换或自变量 $t$ 的代换均使 $L$ 保持线性性质.

⑥在$[t_0-\tau, \infty)$上选定(1.2)的解 $\hat{x}(t, t_0, \hat{\psi}), \hat{x}=\hat{\psi}, t\in[t_0-\tau, t_0]$，作代换 $x(t)=\hat{x}(t)+y(t)$，则可把(1.2)化为(1.1)，或者说新变量 $y(t)$满足(1.1)，若 $x(t)=\psi(t), t\in[t_0-\tau, t_0]$，则 $y(t)=\psi(t)-\hat{\psi}(t), t\in[t_0-\tau, t_0]$.

**注**　一般地说线性性与偏差变元有关，这里指的是偏差不依赖于未知函数及其导数的情形. 例如下列方程就不是线性的：

$$\dot{x}(t)=x(x(t)) \tag{1.4}$$

$$\dot{x}(t)=x(t)-x(t-\tau(x(t))) \tag{1.5}$$

### 2. 算子 $L$ 的推广

对非自治线性系统，高阶线性系统和方程组的情形，由于不致混淆仍用算子 $L$ 表示，我们有

①设 $a(t)\neq 0, \tau(t)\geqslant 0, b(t), c(t)$为 $t\in R$ 的实函，记

$$L(x)=a(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t)+c(t)x(t-\tau(t))=0 \tag{1.6}$$

$$L(x)=f(t) \tag{1.7}$$

其中 $f(t): R\to R$. 只要把$[t_0-\tau, t_0]$换为 $E_{t_0}$，则上述诸性质①～⑥保持成立.

②设 $x\in R^n$，$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$为 $n\times n$ 实函数阵，$\det|A(t)|\neq 0$，$\tau(t)\geq 0$，$t\in R$，$F:R^n\to R^n$，记

$$L(x)=A(t)\dot{x}(t)+B(t)x(t)+C(t)x(t-\tau(t))=0 \quad (1.8)$$

$$L(x)=F(t) \quad (1.9)$$

把$[t_0-\tau,t_0]$换为 $E_{t_0}$，则对(1.8)(1.9)性质①～⑥仍成立.

③对多滞量高阶方程组

$$L(x)=x^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1}A_i(t)x^{(i)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}B_{ij}(t)x^{(i)}(t-\tau_j(t))=0 \quad (1.10)$$

$$L(x)=F(t)$$

其中 $x,F\in R^n$，$\tau_j(t)\geq 0$，$A_i(t)$，$B_{ij}(t)$皆为 $n\times n$ 实阵$(i=1,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,m)$，$[t_0-\tau,t_0]$仍改为 $E_{t_0}$，则性质①～⑥仍成立.

④对中立型方程举例说明如下，记

$$L(x)=\dot{x}(t)+A\dot{x}(t-\tau(t))+Bx(t)+Cx(t-\tau(t))=0 \quad (1.11)$$

$$L(x)=F(t) \quad (1.12)$$

其中 $x,F\in R^n$，$\tau(t)\geq 0$，$A,B,C$ 为 $n\times n$ 实函数阵，在初始集 $E_{t_0}$上给出初始函数 $\varphi$，性质①～⑥保持成立.

事实上对最普遍的线性 FDE

$$L(x)=\dot{x}(t)+\sum_{i=0}^{l}(s)\int_0^{\sigma_i(t)}x(t-\tau)d_\tau R_i(t,\tau)=0 \quad (1.13)$$

$$L(x)=F(t) \quad (1.14)$$

以及用线性算子 $L(t,\varphi)$表示的方程

$$L(x)=\dot{x}(t)-L(t,x_t)=0 \quad (1.15)$$

$$L(x)=f(t) \quad (1.16)$$

也成立性质①～⑥.

## §2 特征方程及其根链

### 1. 特征根所确定的解

与常微分方程类似，线性自治系统的特征方程的根可以确定一系列独立解. 我们以一阶系统为例来阐明这一点. 方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau)+dx(t+\tau) \qquad (2.1)$$

其中 $a、b、c、d、\tau>0$ 皆实数，特征方程为

$$h(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}-c\lambda e^{-\lambda\tau}-de^{\lambda\tau}=0 \qquad (2.2)$$

我们有如下定理：

**定理** 2.1 若 $\lambda$ 是(2.2)的 $m$ 重根，$m\geqslant1$，则 $t^ke^{\lambda t}(k=0,1,\cdots,m-1)$ 都是(2.1)的解.

**证** 用 $t^ke^{\lambda t}$ 代入(2.1)得

$$\lambda t^ke^{\lambda t}+kt^{k-1}e^{\lambda t}-at^ke^{\lambda t}-b(t-\tau)^ke^{\lambda(t-\tau)}-c\lambda(t-\tau)^ke^{\lambda(t-\tau)}$$

$$-ck(t-\tau)^{k-1}e^{\lambda(t-\tau)}-d(t+\tau)^ke^{\lambda(t+\tau)}$$

$$=e^{\lambda t}[\lambda t^k+kt^{k-1}-at^k-b(t-\tau)^ke^{-\lambda\tau}-c\lambda(t-\tau)^ke^{-\lambda\tau}$$

$$-ck(t-\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}-d(t+\tau)^ke^{\lambda\tau}]$$

只要证上式括号中的式子等于零即可. 为此需要用下列诸展式：

$$(t-\tau)^k=C_k^0t^k+C_k^1t^{k-1}(-\tau)+C_k^2t^{k-2}(-\tau)^2+\cdots+C_k^k(-\tau)^k$$

$$(t+\tau)^k=C_k^0t^k+C_k^1t^{k-1}\tau+C_k^2t^{k-2}\tau^2+\cdots+C_k^k\tau^k$$

$$(t-\tau)^{k-1}=C_{k-1}^0t^{k-1}+C_{k-1}^1t^{k-2}(-\tau)+\cdots+C_{k-1}^{k-1}(-\tau)^{k-1}$$

代入括号中的式子得

$$\lambda t^k+kt^{k-1}-at^k-b(t-\tau)^ke^{-\lambda\tau}-c\lambda(t-\tau)^ke^{-\lambda\tau}-ck(t-\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}$$

$$-d(t+\tau)^ke^{\lambda\tau}$$

$$=C_k^0t^k(\lambda-a-be^{-\lambda\tau}-c\lambda e^{-\lambda\tau}-de^{\lambda t})$$

$$+C_k^1t^{k-1}(1-b(-\tau)e^{-\lambda\tau}-ce^{-\lambda\tau}-\tau c\lambda e^{-\lambda\tau}-de^{\lambda\tau^2}\tau)$$

$$+C_k^2 t^{k-2}\left(-b(-\tau)^2\lambda e^{-\lambda\tau}-c(-\tau)^2\lambda e^{-\lambda\tau}-c(-\tau)e^{-\lambda\tau}k\frac{C_{k-1}^1}{C_k^2}-de^{\lambda\tau}\tau^2\right)$$

$$+C_k^3 t^{k-3}\left(-b(-\tau)^3\lambda e^{-\lambda\tau}-c(-\tau)^3\lambda e^{-\lambda\tau}-c(-\tau)^2e^{-\lambda\tau}k\frac{C_{k-1}^2}{C_k^3}-de^{\lambda\tau}\tau^3\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+C_k^k t\left(-b(-\tau)^k e^{-\lambda\tau}-c(-\tau)^k\lambda e^{-\lambda\tau}-ck(-\tau)^{k-1}e^{-\lambda\tau}-de^{\lambda\tau}\tau^k\right)$$

由$\frac{C_{k-1}^1}{C_k^2}=2,\frac{C_{k-1}^2}{C_k^3}=3,\cdots\frac{C_{k-1}^{i-1}}{C_k^i}=n,\cdots$代入上式，则上式可记为

$$\sum_{j=0}^{k}C_k^j t^{k-j}h^{(j)}(\lambda)\qquad(k=0,1,\cdots,m-1)\tag{2.3}$$

其中 $h^{(j)}(\lambda)$ 为 $h(\lambda)$的第 $j$ 次导数. 因为 $\lambda$ 是 $h(\lambda)$的 $m$ 重根，故是 $h(\lambda)=h^{(1)}(\lambda)=\cdots=h^{(m-1)}(\lambda)=0$. 故(2.3)等于零，即 $t^k e^{\lambda t}$是(2.1)的解，证毕.

注意到方程(2.1)当 $a$、$b$、$c$、$d$ 取不同常数时分别可以是滞后型、超前型、中立型与混合型方程，可见结论是普遍的.

### 2. 特征根分布定理的推广

首先注意到上章的一个提法："对线性自治 DDE 的特征方程中 $h(\lambda)$是亚纯函数，一般地说有无限多个零点"，问题是有没有例外？这个问题的正确理解应该是：是否存在线性自治 DDE 使特征方程是代数方程？回答是肯定的，例如

**例 1** 对 RDDE

$$\dot{x}(t)=x(t-\tau)+y(t-\tau)$$
$$\dot{y}(t)=-x(t-\tau)-y(t-\tau)$$

其中 $\tau=\text{const.}>0$，特征方程为 $\lambda^2=0$，只有二重根 $\lambda=0$.

上一章已给出一阶方程特征根分布的概况，并以此说明分型法则的数学特征. 对 $n$ 阶系统可以推广这些结论，记 $n$ 阶系统及其特征方程为

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=0}^{m}A_jx(t-\tau_j) \tag{2.4}$$

$$H(\lambda)\overset{\text{def}}{=}|\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_je^{-\lambda\tau_j}|=0 \tag{2.5}$$

其中 $\tau_0=0,\tau_j\geqslant0,A_j$ 为 $n\times n$ 阵$(j=1,\cdots,m)$，则有

**引理** 2.2　对每一个给定的 $p\in R$，(2.5)至多有有限个 $\lambda$ 使 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant p$.

**证**　把(2.5)展开，依 $\lambda$ 的幂次写成

$$\lambda^n+P_{n-1}(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})\lambda^{n-1}+\cdots+P_0(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})=0 \tag{2.6}$$

其中 $P_i(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})$ 都是 $e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m}$ 的多项式.

设 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant p$，则 $|e^{-\lambda\tau_j}|=e^{-\tau_j\mathrm{Re}\lambda}\leqslant e^{-p\tau_j}\Rightarrow\exists\ B_K$ 使

$$|P_K(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})|\leqslant B_K,(K=0,1,\cdots,n-1)$$

由此选到适当大的正数 $M$ 使

$$\frac{B_{n-1}}{M}+\cdots+\frac{B_0}{M^n}<1$$

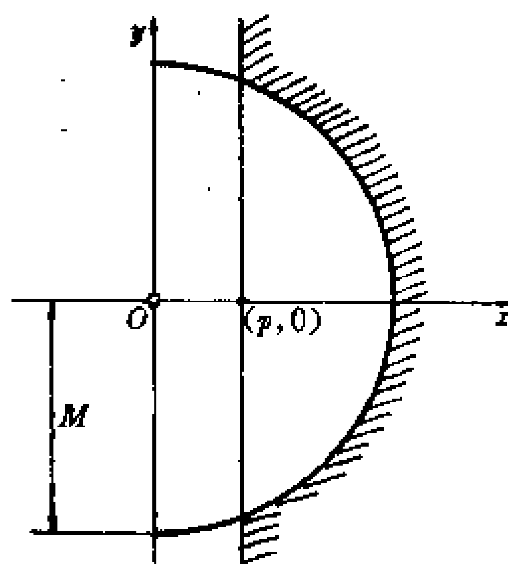



图 2.1

于是当 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant p$，$|\lambda| \geqslant M$ 时(2.6)左边恒不等0，即 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant p$ 且在半圆 $|\lambda| = M$ 之外(2.6)无零点，如图2.1所示.

又由零点的孤立性推知在 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant p$，$|\lambda| < M$ 中有有限个零点，证毕.

**定理 2.2** 设(2.5)的根全体为 $\{\lambda_j\}$，则

(1) $|\lambda_j| \to \infty \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda \to -\infty$，$j \to \infty$.

(2) $\exists\ \beta \in R$，使 $\forall\ \lambda_j \in \{\lambda_j\}$ 成立 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta$.

(3)在复平面的任何条形域 $\alpha_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_1$ 中只有有限个 $\lambda_j \in \{\lambda_j\}$，$\alpha_1, \beta_1 \in R$.

**证** 由引理2.1⇒(2)成立. 对(3)，在 $\alpha_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_1$ 中成立不等式

$$0 < h_i \triangleq e^{-\tau_i \beta} \leqslant |e^{-\lambda \tau_i}| = e^{-\tau_i \mathrm{Re}\lambda} \leqslant e^{-\alpha \tau_i} \triangleq H_i$$

其中 $h_i, H_i (i=1,\cdots,m)$ 皆常数，由此存在 $b_k, B_k \in R_+$ 使

$$b_k \leqslant |P_k(e^{-\lambda \tau_1}, \cdots, e^{-\lambda \tau_m})| \leqslant B_K, (K=0,1,\cdots,n-1) \quad (2.7)$$

再由零点的孤立性，若条形域 $\alpha_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_1$ 中有无穷子列 $|\lambda'_j|$，则 $|\lambda'_j| \to \infty \Leftrightarrow \mathrm{Im}\lambda'_j \to \infty$，$j \to \infty$. 不妨设 $\lambda'_j$ 皆不等于零，由(2.6)得到估计式：

$$1 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |P_i(e^{-\lambda'_j \tau_1}, \cdots, e^{-\lambda'_j \tau_m})| |\lambda'_j|^{i-n}$$

上式右端为 $j \to \infty$ 时趋于0，导出导盾，即(3)成立. 由(2)(3)⇒(1)成立.

类似地对超前型方程组及其特征方程

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t+\tau_i) \quad (2.8)$$

$$\det|\lambda I - \sum_{i=0}^{m} A_i e^{\lambda \tau_i}| = 0 \quad (2.9)$$

其中 $\tau_0 = 0$，$\tau_i > 0$，$A_i$ 为 $n \times n$ 阵 $(i=1,\cdots,m)$，我们有：

**定理 2.3** 记(2.9)的根全体为 $\{\lambda_j\}$，则

(1) $|\lambda_j|\to\infty,\Rightarrow \mathrm{Re}\lambda_j\to+\infty,\ j\to\infty$.

(2)$\exists\ \alpha\in R$,使$\forall\ \lambda_j\in\{\lambda_j\}$成立 $\mathrm{Re}\lambda_j\geqslant\alpha$.

(3)在复平面的任何条形域 $\alpha_1\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant\beta_1$ 中只有有限个 $\lambda_j\in\{\lambda_j\},\alpha_1,\beta_1\in R$.

**证** 令 $\lambda=-Z$,用定理 2.2 立即推出定理 2.3.

对中立型方程组及其特征方程

$$\dot{x}(t)+\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{m}C_i\dot{x}(t-\tau_i)=0 \tag{2.10}$$

$$\det|\lambda I-\sum_{i=0}^{m}A_ie^{-\lambda\tau_i}+\sum_{i=1}^{m}C_i\lambda e^{-\lambda\tau_i}|=0 \tag{2.11}$$

同样设 $\tau_0=0,\tau_i>0,A_i,C_i$ 为 $n\times n$ 阵$(i=1,\cdots,m)$,我们有:

**定理 2.4** 记(2.11)的根全体为$\{\lambda_j\}$,则

(1)$\exists\ \alpha,\beta\in R$,使$\forall\ \lambda_j\in\{\lambda_j\}$成立 $\alpha\leqslant\mathrm{Re}\lambda_j\leqslant\beta$.

(2)存在$\{\lambda_j\}$的子序列$\{\lambda'_j\}$使成立 $\mathrm{Im}\lambda'_j\to\infty,\ j\to\infty$.

**证** 不妨设 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_m$,且 $\det|C_m|\neq0$,把(2.11)展开记为

$$\lambda^n(1+P_n(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m}))+\lambda^{n-1}P_{n-1}(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})+$$
$$\cdots+P_0(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})=0 \tag{2.12}$$

诸 $P_K(Z_1\cdots Z_m)$同样是 $Z_i$ 的多项式,次数不超过 $n$ 但 $P_n$ 是 $n$ 次的(由 $\det|C_m|\neq0$ 保证),故(2.12)写成

$$1+P_n(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})+\frac{1}{\lambda}P_{n-1}(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})+\cdots$$
$$+\frac{1}{\lambda^n}P_0(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})=0 \tag{2.13}$$

其中设 $\lambda\neq0$,(2.13)可进一步写成

$$P_{10}+e^{n\lambda\tau_m}+\overline{P}_ne^{n\lambda\tau_m}+\frac{1}{\lambda}P_{n-1}(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})e^{n\lambda\tau_m}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\lambda^n}P_0(e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})e^{n\lambda\tau_m}=0 \tag{2.14}$$

其中记 $P_n=P_{10}e^{-n\lambda\tau_m}+\overline{P}_n$. 若 (2.11)有一根列$\{\lambda'_j\}$使 $\mathrm{Re}\lambda'_j\to\infty$,

$j\to\infty$，则由(2.13)立即导出矛盾，同理由(2.14)推知不可能有子根列$\{\lambda''_j\}$使$\mathrm{Re}\lambda''_j\to-\infty, j\to\infty$，即$\exists\ \alpha,\beta\in R$使(1)成立，由零点的孤立性即得(2)成立，证毕.

### 3. 渐近根链

如上一段所述，诸特征方程的根全体$\{\lambda_j\}$通常是可列无限集，要一一求出它们一般是不可能的. 本段所说的办法是对集$\{\lambda_j\}$而言给出某种意义下的近似"求得根链"($\{\lambda_j\}$称为根链，方法的特点不是对每一个$\lambda_j$作近似求解，而是作出根链的逼近链). 设原特征方程的根链为$\{\lambda_j\}$，找出另一列可以写出的$\{\lambda'_j\}$，使成立

$$|\lambda_j-\lambda'_j|\to 0, j\to\infty, \text{记为 } \lambda_j\approx\lambda'_j$$

其中$\{\lambda'_j\}$可以用有限步骤得到.

考虑高阶线性自治 R 型与 N 型方程，其特征方程写成

$$h(\lambda)=\sum_{p=0}^{n}a_p\lambda^p+\sum_{q=0}^{m}b_q\lambda^q e^{-\tau\lambda}=0 \tag{2.15}$$

其中$\tau>0, n\geqslant m, a_n>0, b_m\neq 0$，(2.15)第一个和式中关于$\lambda$的模足够大时的首项为$a_n\lambda^n$，而第二个和式则是$b_m\lambda^m e^{-\lambda\tau}$，所以当$|\lambda|\gg 1$时，特征方程$h(\lambda)=0$可近似地代之以方程

$$a_n\lambda^n+b_m\lambda^m e^{-\lambda\tau}=0 \tag{2.16}$$

$n=m$时为 N 型，$n>m$时为 R 型，(2.16)的根可以方便地全部写出，它就是我们所指的$\{\lambda'_j\}$.

(1)若$n=m$，(2.16)为

$$\lambda^n(a_n+b_n e^{-\lambda\tau})=0\Rightarrow a_n+e^{-\lambda\tau}b_n=0$$

即$e^{-\lambda\tau}=-\dfrac{a_n}{b_n}\Rightarrow\mathrm{Re}\lambda=-\dfrac{1}{\tau}\ln\left|\dfrac{-a_n}{b_n}\right|$.

① $b_n<0$，$\lambda'_j=-\dfrac{1}{\tau}\ln\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|+\dfrac{2j\pi i}{\tau}\quad(j=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$.

② $b_n>0$，$\lambda'_j=-\dfrac{1}{\tau}\ln\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|+\dfrac{(2j+1)\pi i}{\tau}\quad(j=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$.

(2)$n>m$ 时，(2.16)为

$$a_n\lambda^n+b_m\lambda^m e^{-\lambda\tau}=0\Rightarrow e^{\lambda\tau}\lambda^P=a \tag{2.17}$$

其中 $P=n-m>0$，$a=-\dfrac{b_m}{a_n}$，记 $\lambda'_j=x_j+iy_j$，则

$$e^{\tau x_j}|\lambda_j^P|=|a|\Rightarrow e^{\frac{2\tau x_j}{P}}(x_j^2+y_j^2)=|a|^{\frac{2}{P}} \tag{2.18}$$

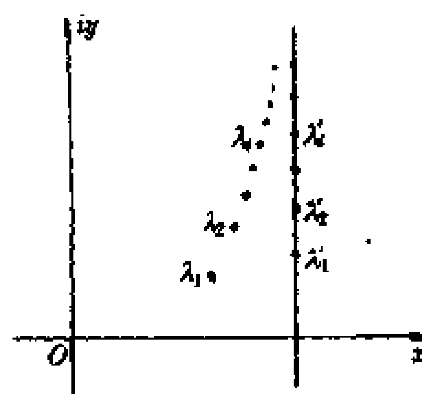



图 2.2($n=m$)




图 2.3($n>m$)

于是由 $\lim\limits_{x_j\to-\infty}\left(e^{\frac{2\tau x_j}{P}}\right)x_j^2=0$ 推出(2.18)，可写成

$$\left(e^{\frac{2\tau x_j}{P}}\right)y_j^2=|a|^{\frac{2}{P}}+\varepsilon_1 \tag{2.19}$$

其中 $\varepsilon_1\to0$，$j\to\infty$(或 $x_j\to-\infty$)，把(2.19)再改写为

$$x_j^2\left(e^{\frac{2\tau x_j}{P}}\right)\frac{y_j^2}{x_j^2}=|a|^{\frac{2}{P}}+\varepsilon_1$$

由 $a\neq0$，$x_j^2e^{\frac{2\tau x_j}{P}}\to0$，$x_j\to-\infty\Rightarrow\dfrac{y_j^2}{x_j^2}\to\infty$，$x_j\to-\infty$. 此时有

$$\arg\lambda'_j=\operatorname{arctg}\frac{y_j}{x_j}=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2$$

其中 $\varepsilon_2\to0$，$x_j\to-\infty$. 由(2.17)取对数并比较虚部得到

$$\tau\lambda'_j+P\ln|\lambda'_j|+iP\arg\lambda'_j=\ln|a|+i\arg a+2j\pi i$$

$$\tau y_j+P\arg\lambda'_j=\arg a+2j\pi$$

或者

$$y_j=\frac{1}{\tau}(2j\pi-P\ \frac{\pi}{2})+\varepsilon_3 \qquad (a>0) \tag{2.20}$$

$$y_j=\frac{1}{\tau}(2j\pi-P\ \frac{\pi}{2}+\pi)+\varepsilon_3 \qquad (a<0) \tag{2.21}$$

其中 $\varepsilon_3\to0$，当 $j\to\infty$. 再由(2.19)取对数得

$$\frac{2\tau x_j}{P}+2\ln y_j=\ln\{|a|^{\frac{2}{P}}+\varepsilon_3\}$$

$$x_j=\frac{1}{\tau}(-P\ln y_j+\ln|a|)+\varepsilon_4 \tag{2.22}$$

其中 $\varepsilon_4\to0$，$j\to\infty$. (2.22)中的 $y_j$ 用(2.20)(2.21)代入，并注意到 $\lambda'_j=x_j+iy_j$ 得到

$$\lambda'_j=\frac{1}{\tau}(-P\ln(2j-\frac{P}{2})\frac{\pi}{\tau}+\ln|a|)\pm(2j-\frac{P}{2})\frac{\pi}{\tau}i$$

$$(a>0) \tag{2.23}$$

$$\lambda'_j=\frac{1}{\tau}(-P\ln(2j+1-\frac{P}{2})\frac{\pi}{\tau}+\ln|a|)\pm(2j+1-\frac{P}{2})\frac{\pi}{\tau}i$$

$$(a<0) \tag{2.24}$$

即得到渐近根链的最终表达式(2.23)或(2.24)

## §3 庞特里亚金定理

### 1. 问题的实质

对线性自治 DDE 引进了特征方程以后，首先引起人们注意的问题便是根的分布状况，本世纪四十年代以前人们一直期望能得到与常微分方程里的 Routh—Hurwitz 定理平行的结果. 1942年庞特里亚金(Л. С. Понтрягин)比较完整地解决了这一问题. 这就是本节阐述的诸定理. 然而对特征根分布状况的研究目的——稳定性而言，这些定理只是理论上的成就，离实际应用还有很大距离. 而且对中立型方程来说，即使在理论上也还有缺点.

前面列出的所有特征方程都是 $\lambda, e^{-\lambda\tau}, e^{\lambda\tau}$ 的多项式. 如果乘上 $e^{\lambda\tau}$ 的适当次幂便可写成

$$h^*(\lambda, e^{\lambda\tau})=0 \qquad (\tau>0) \tag{3.1}$$

(3.1)中令 $\lambda\tau=z$,则

$$h^*(\frac{1}{\tau}\lambda\tau, e^{\lambda\tau}) \overset{\text{def}}{=} h(z, e^z)=0 \tag{3.2}$$

以后只讨论(3.2),它当然代表 R,N,A,C 各型. 为叙述方便,下文中有时记 $e^z=w$,(3.2)为 $h(z,w)=0$.

用 $r$ 记多项式 $h(z,w)$ 关于 $z$ 的次数,$s$ 记它关于 $w$ 的次数. 称 $h(z,w)$ 中形如 $az^rw^s$ 的项为"主项". $a=\text{const.}\neq 0$.

Понтрягин 的结果可以概述如下:

①若 $h(z,w)$ 没有主项,则函数

$$H(z)=h(z,e^z) \tag{3.3}$$

必有无限的零点集合 $\{\lambda_j\}$,使得 $\text{Re}\lambda_j\to\infty, j\to\infty$.

事实上,在§2 中提到的 A 型和 C 型 DDE 的特征方程正好都是缺主项的,这个结论上面从另一个角度已经给出证明.

②若 $h(z,w)$ 有主项,这相当于§2 中对应于 R 型和 N 型 DDE 的特征方程. 是我们的主要研究对象. Понтрягин 的主要贡献在于他认识到,这种情形必须研究函数 $H(z)=h(z,e^z)$ 的零点在虚轴上的分布状况,并且他找到了很普遍的研究方法.

要讨论 $H(z)$ 在虚轴上零点的分布状况,须把 $z=iy(y\in R)$ 代入,分开 $H(iy)$ 的实部和虚部得

$$H(iy)=F(y)+iG(y) \tag{3.4}$$

其中

$$F(y)=f(y,\cos y,\sin y)$$

$$G(y)=g(y,\cos y,\sin y)$$

且 $f(y,u,v)$,$g(y,u,v)$ 都是变元 $y,u,v$ 的三元多项式. 庞特里亚金的主要结果写成:

函数 $H(z)$的所有零点皆具负实部的充要条件是：函数 $F(y)$ 和 $G(y)$的零点都是实的，而且对每一个 $y$ 成立不等式

$$G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0 \tag{3.5}$$

这个结果形式上是 Routh—Huwitz 准则的复述．但涉及的条件是超越的．

### 2. $h(z,e^z)$没有主项时的零点分布

记 $e^z$ 为 $t$，把 $h(z,e^z)$展开为

$$h(z,t)=\sum_{m,n}a_{mn}z^m t^n \tag{3.6}$$

我们有如下的普遍定理：

**定理 3.1** 若(3.6)缺主项，则 $h(z,e^z)$必有无穷多个具正实部的零点集合$\{\lambda'_j\}$且 $\mathrm{Re}\lambda'_j\to\infty, j\to\infty$.

**证** 为了说明下文中引入的一个形式解，我们先考察最简单的 $h(z,t)=t-z$，即 $e^z-z=0$，设 $z=x+iy$，代入后分开实部和虚部得

$$e^x\cos y=x,\qquad e^x\sin y=y$$

当 $x$、$y$ 足够大时，由 $\cos y=e^{-x}x\Rightarrow y\approx 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，而由 $e^x\sin y=y\Rightarrow e^x\approx 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x\approx\ln(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$. 所以方程 $h(z,t)=t-z=0$ 的解可以写成

$$z=\ln(2k\pi+\frac{\pi}{2})+i(2k\pi+\frac{\pi}{2})+\xi$$

其中 $k\to\infty$时 $\xi\to 0$.

由此得到启发，对一般不含主项的 $h(z,e^z)=0$，设想有如下形式的解

$$z=\alpha\ln 2k\pi+2k\pi i+\ln\theta+\xi \tag{3.7}$$

其中 $\alpha$ 为正有理数，$\theta$ 为非零复数，都可由(3.6)确定，而 $\xi$ 当 $k\to\infty$时趋于 0. 由(3.7)我们有

$$e^{z}=(2k\pi)^{a}\theta e^{\xi}$$

$$z=i2k\pi(1+\delta_1(\xi)) \tag{3.8}$$

其中

$$\delta_1(\xi)=\frac{a\ln 2k\pi+\ln\theta+\xi}{2k\pi i}$$

故当 $k\to\infty$ 时 $\delta_1(\xi)\xrightarrow{一致}0$，且 $\delta_1(\xi)$ 为 $\xi$ 的解析函数，代入(3.6)得

$$h(z,e^{z})=\sum_{m,n}a_{mn}z^{m}e^{nz}=\sum_{m,n}a_{mn}[i2k\pi(1+\delta_1(\xi))]^{m}$$

$$\cdot[(2k\pi)^{a}\theta e^{\xi}]^{n}=\sum_{m,n}(2k\pi)^{m+an}a_{mn}i^{m}\theta^{n}e^{n\xi}(1+\delta_1(\xi))^{m} \tag{3.9}$$

将(3.9)的右端按 $2k\pi$ 的降幂排列，首项的次数用 $\beta$ 记之(设 $a_{mn}\neq 0$)，则(3.9)写成

$$h(z,e^{z})=\sum_{\substack{n\\ m+an=\beta}}(2k\pi)^{\beta}a_{mn}i^{m}\theta^{n}e^{n\xi}+(2k\pi)^{\beta}\delta_2(\xi)$$

$$=\sum_{\substack{n\\ m+an=\beta}}(2k\pi)^{\beta}b_n\theta^{n}e^{n\xi}+(2k\pi)^{\beta}\delta_2(\xi) \tag{3.10}$$

式(3.10)是把(3.9)中次数等于 $\beta$ 的项汇集在一起的记法，其中 $\delta_2(\xi)$ 是 $\xi$ 的解析函数，且当 $|\xi|\leqslant 1$，$k\to\infty$ 时一致收敛于零. 由于 $\beta$ 是可以取到的最大值，故至少有一个 $n$ 使得对 $(m,n)$ 既有 $m+an=\beta$，又有 $a_{mn}\neq 0$.

现在证明至少有两个不同的 $n$ 适合条件：$\beta=an+m$ 且 $a_{mn}\neq 0$. 取 $s=\max\limits_{a_{mn}\neq 0}\{n\}$，$r=\max\limits_{a_{ms}\neq 0}\{m\}$，由于无主项，必存在 $(p,q)$ 使 $p>r$，$q<s$，$a_{pq}\neq 0$. 在展式 $\sum\limits_{m,n}a_{mn}z^{m+an}$ 中，当 $a$ 充分大时 $a_{rs}z^{r+as}$ 是首项，而 $a=0$ 时不是首项，故 $a$ 从 $+\infty$ 减到 0 的过程中 $\exists\ a$，使 $r+as=m+an=\beta$，显然 $a$ 是有理数. 由于存在两个 $n$，故方程

$$\sum_{n}b_n\theta^{n}=0 \tag{3.11}$$

存在非零根 $\theta$，代入(3.10)得

$$\sum_{n}b_n\theta^{n}e^{n\xi}+\delta_2(\xi)=0 \tag{3.12}$$

当 $k\to\infty$(3.12)一致收敛于方程

$$\sum_n b_n \theta^n e^{n\xi}=0 \tag{3.13}$$

(3.13)与(3.11)比较得 $\xi=0$ 是(3.13)的一个根.由一致收敛性,当 $k$ 很大时(3.12)有根 $\xi_k\to 0, k\to\infty$.故 $h(z,e^z)$有解

$$z=a\ln 2k\pi+2k\pi i+\ln\theta+\xi_k \tag{3.14}$$

注意到 $k\to 0, \xi_k\to 0, a, \theta$ 与 $k$ 无关,则当 $k$ 适当大时(3.14)具正实部.

3.函数 $f(z,\cos z,\sin z)$的零点

为了研究 $f(y,\cos y,\sin y)$的零点分布,我们考虑一般的复函数 $f(z,u,v)$.它是 $z,u,v$ 的实系数多项式.则

$$F(z)=f(z,\cos z,\sin z) \tag{3.15}$$

是 $z$ 的整函数.$z$ 取实值时 $F(z)$取实值.为了研究 $F(z)$仅有实根的充要条件,把(3.15)改写为

$$f(z,u,v)=\sum_{m,n} z^m \psi_m^{(n)}(u,v) \tag{3.16}$$

其中 $\psi_m^{(n)}(u,v)$是 $u,v$ 的 $n$ 次齐次式. $u=\cos z$, $v=\sin z\Rightarrow |u|\leqslant 1$, $|v|\leqslant 1, u^2+v^2=1$.

下面假定 $\psi_m^{(n)}(u,v)$不能被 $u^2+v^2$ 除尽,亦即

$$\psi_m^{(n)}(1,\pm i)\neq 0 \tag{3.17}$$

设(3.16)中最高幂次为 $r,s$ 的项为 $z^r\psi_r^{(s)}(u,v)$,仍称之为主项,若把(3.16)中含有 $z^r$ 的项记为 $z^r\psi_*^{(s)}(u,v)$,叫做首项.当然首项中含有主项,即

$$\psi_*^{(s)}(u,v)=\sum_{n\leqslant s}\psi_r^{(n)}(u,v) \tag{3.18}$$

于是(3.16)可记为

$$f(z,u,v)=z^r\psi_*^{(s)}(u,v)+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}} z^m\psi_m^{(n)}(u,v) \tag{3.19}$$

当 $u=\cos z, v=\sin z$ 时，记 $\varphi_*^{(s)}$ 为

$$\varphi_*^{(s)}(z)\triangleq\psi_*^{(s)}(\cos z,\sin z)$$

它以 $2\pi$ 为周期. 首先有

**引理 3.1** 函数 $\varphi_*^{(s)}(z)$ 在条形域 $a\leqslant x<2\pi+a$ 中有且仅有 $2s$ 个零点($k$ 重零点作为 $k$ 个零点计). 因而存在无穷点集$\{\alpha\}$，当 $\varepsilon\in\{\alpha\}$时，对$\forall\ y\in R$ 成立 $\varphi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0$.

**证** 先证在条形域 $a\leqslant x<2\pi+a$ 中函数 $\varphi_*^{(s)}(z)$ 有 $2s$ 个根，这里 $z=x+iy$，设

$$u=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), v=\frac{1}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right) \tag{3.20}$$

则当 $t=e^{iz}$时有 $u=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z, v=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sin z$，把(3.20)代入 $\psi_*^{(s)}(u,v)$，得到 $\psi_*^{(s)}(t)$是 $t$ 和 $t^{-1}$的有限级数. 注意到 $\frac{1}{i}=-i\Rightarrow t$ 的最高次项的系数为 $\psi_*^{(s)}\left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2}\right)$，$t^{-1}$的最高次项的系数为 $\psi_*^{(s)}\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)$，由(3.17)推出

$$\psi_*^{(s)}\left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2}\right)\neq 0,\psi_*^{(s)}\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)\neq 0$$

所以用 $t^s$ 乘上 $\psi_*^{(s)}(t)$以后是一个具有 $t^{2s}$的项与非零常数项的 $2s$ 次多项式. 它正好有 $2s$ 个零点：$t_1,t_2,\cdots,t_{2s}$，回到函数 $\varphi_*(z)$，对指定的 $t_j$，方程 $t_j=e^{iz}$在 $a\leqslant x<2\pi+a$ 中恰有一个根，若 $t_j$ 是 $k$ 重零点，则对应的 $e^{iz_j}$是 $\varphi_*^{(s)}(z)$的 $k$ 重零点. 引理的后半部是前半部的自然推论.

**推论 3.1** $F(z)$的主项 $z^r\psi_*^{(s)}$ 与首项 $z^r\psi_*^{(s)}$在条形域 $a\leqslant x<2\pi+a$ 中有相同的零点数目.

**引理 3.2** 设 $f(z,u,v)$有主项 $z^r\psi_*^{(s)}(u,v)$并存在 $\varepsilon$ 对$\forall\ y\in R$ 成立 $\varphi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0$. 则在条形域

$$-2k\pi+\varepsilon\leqslant x<2k\pi+\varepsilon \tag{3.21}$$

中自某一足够大的 $k$ 开始 $F(z)$有 $4sk+r$ 个零点，故要使 $F(z)$只

有实根的充要条件是：由某个大的 $k$ 开始在(3.21)中有 $4sk+r$ 个实根.

**证** 由引理 3.1 及推论 3.1 推知 $z^r\varphi_s^{(s)}(z)$ 在条形域(3.21)中有 $2k(2s)+r=4ks+r$ 个零点. 这只要把(3.21)分为 $2k$ 个宽为 $2\pi$ 的条形域即可看出.

再证 $F(z)$ 与首项 $\varphi_s^{(s)}(z)$ 在(3.21)中有相同数目的零点，注意到 $z=x+iy, e^{iz}=e^{-y+ix}, e^{-iz}=e^{y-ix}, (e^{iz})^n=e^{-ny+inx}, (e^{-iz})^n=e^{ny-inx}$，当 $|y|$ 充分大时有

$$\begin{aligned}\varphi_m^{(n)}(x+iy)&=e^{ny-inx}\left[\psi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)+\delta_1\right]\\ \varphi_m^{(n)}(x+iy)&=e^{-ny+inx}\left[\psi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2}\right)+\delta_2\right]\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中 $\varphi_m^{(n)}(z)\triangleq\psi_m^{(n)}(\cos z,\sin z)$，当 $y\to\infty$ 时有：$\delta_1\to0$，$y\to-\infty$ 时 $\delta_2\to0$，事实上，因为 $\delta_1$ 含有因子 $e^{-y}$，$\delta_2$ 含有因子 $e^{y}$，所以(3.22)在(3.21)中一致成立. 由此推得

$$\begin{aligned}\varphi_s^{(s)}(x+iy)&=e^{sy-isx}\left[\psi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right)+\delta_3\right]\\ \varphi_s^{(s)}(x+iy)&=e^{-sy+isx}\left[\psi_r^{(n)}\left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2}\right)+\delta_4\right]\end{aligned}\tag{3.23}$$

其中 $y\to\infty,\delta_3\to0$ 及 $y\to-\infty,\delta_4\to0$ 在(3.21)中一致成立.

取 $b>0$ 充分大，使当 $|y|>b$ 时 $\varphi_s^{(s)}(x+iy)\neq0$，且 $\delta_3,\delta_4$ 足够地小. 合并(3.22)(3.23)，当 $|y|>b$ 时

$$\left|\frac{\varphi_m^{(n)}(x+iy)}{\varphi_s^{(s)}(x+iy)}\right|<C_1\qquad(s>n)\tag{3.24}$$

$$\left|\frac{\varphi_m^{(n)}(\pm2k\pi+\varepsilon+iy)}{\varphi_s^{(s)}(\pm2k\pi+\varepsilon+iy)}\right|<C_2\tag{3.25}$$

其中 $C_1,C_2$ 是与 $b$ 和(3.16)有关的常数. 至此我们已意识到 $F(z)$ 零点的数目将由其首项决定. 为证明这一事实，考虑矩形

$$P_{kb}:-2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant2k\pi+\varepsilon,\ -b\leqslant y\leqslant b$$

把 $F(z)$ 写成

$$F(z)=z^r\varphi_*^{(s)}(z)\left(1+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}} z^{m-r}\frac{\varphi_m^{(n)}(z)}{\varphi_*^{(s)}(z)}\right)\quad 其中\ m-r<0.$$

故由(3.24)(3.25)，当 $b$、$k$ 适当大时有

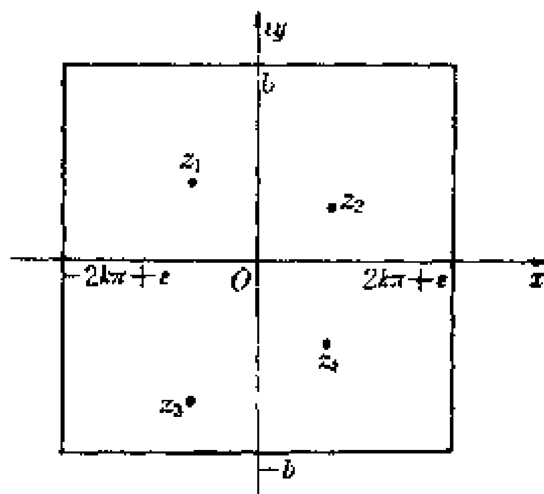



图 2.4

$$F(z)=z^r\varphi_*^{(s)}(z)(1+\delta_5) \tag{3.26}$$

其中 $\delta_5\to0$，当 $k\to\infty$，$b\to\infty$. 此外，由 $b$，$k$ 充分大可使 $z^r\varphi_*^{(s)}(z)$在 $P_{kb}$边界上无零点，由复分析中的 Rouché 定理及(3.26)式$\Rightarrow F(z)$与它的首项 $z^r\varphi_*^{(s)}(z)$在 $P_{kb}$内的零点数目相同.

当$|y|>b$ 时 $z^r\varphi_*^{(s)}(z)$与 $F(z)$均无零点(由于此时 $\varphi_*^{(s)}(z)$无零点，由(3.24)(3.25)$\Rightarrow F(z)$也无零点). 固定 $k$、令 $b\to\infty$，则 $F(z)$与 $z^r\varphi_*^{(s)}(z)$在条形域

$$-2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2k\pi+\varepsilon$$

中零点数目都等于 $4sk+r\Rightarrow$二者在(3.21)中零点数目都等于 $4sk+r$. 证毕.

**引理** 3.3　若(3.16)无主项，则 $F(z)$必有无限多个非实的根.

**证**　由(3.16)无主项，记 $s=\max n$，$r=\max m$，不妨设有形如 $z^r\psi_r^{(s_1)}(u,v)$与 $z^{r_1}\psi_{r_1}^{(s)}(u,v)$的两项，这里 $s_1<s$，$r_1<r$. 把(3.20)代入

(3.16)并乘以 $t^{s_1}$，记

$$h(z,t)\overset{\text{def}}{=}t^{s_1}f(z,u,v)$$

则对应于 $z^r\psi_r^{(s_1)}(u,v)$ 的项为 $z^r t^{2s_1}\psi_r^{(s_1)}(\frac{1}{2},\frac{-i}{2})$，而对应于 $z^{r_1}\psi_{r_1}^{(s)}(u,v)$ 的项为 $z^{r_1}t^{s+s_1}\psi_{r_1}^{(s)}(\frac{1}{2},\frac{-i}{2})$. 这里 $u,v$ 用(3.20)代入. 当 $z^r$ 的系数中 $t$ 的最高次项为 $s_1$，$t^s$ 为 $\psi_m^{(s)}(u,v)=\psi_m^{(s)}(t)$ 的最高次项，与它相乘的 $z$ 的最高次数为 $r_1$ （$r_1<r$，否则(3.16)有主项)时，表明 $h(z,t)$ 没有主项 $\Rightarrow h(-iz,t)$ 没有主项，由定理 3.1 $\Rightarrow h(-iz,t)$ 存在零点的集合 $\{z_j\}$ 且 $\mathrm{Re}z_j\to+\infty$，$j\to\infty\Rightarrow h(z,e^{iz})$ 有无限多个非实的根 $\Rightarrow$ 引理结论.

**引理 3.4** 设 $f(z,u,v)$ 写成(3.19)形式. 具有由(3.18)定义的首项 $\psi_*^{(s)}(u,v)$. 我们有

①若 $\varphi_*^{(s)}(z)$ 有非实零点，则 $F(z)$ 有无限多个非实零点.

②若 $\varphi_*^{(s)}(z)$ 的零点都是实的、单重的，则 $F(z)$ 至多有有限个非实零点.

**证** 由(3.19)乘 $z^{-r}$ 得

$$F^*(z)\overset{\text{def}}{=}\varphi_*^{(s)}(z)+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}}z^{m-r}\varphi_m^{(n)}(z)=0 \tag{3.27}$$

对①，设 $\varphi_*^{(s)}(c)=0$，$c$ 是非实的根. 我们来求(3.27)形如 $z=2k\pi+c+\eta$ 的解. 这里 $k$ 充分大，$\eta$ 充分小. 注意到 $\varphi_*^{(s)}(z)$，$\varphi_m^{(n)}(z)$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，用 $z=2k\pi+c+\eta$ 代入(3.21)得

$$\varphi_*^{(s)}(c+\eta)+\delta(\eta)=0 \tag{3.28}$$

$c$ 非实 $\Rightarrow c$ 非零，已设 $\eta$ 充分小，由(3.27)的构造 $\Rightarrow\delta(\eta)$ 是 $\eta$ 的解析函数. 另一方面(3.27)的和式中含有 $z$ 的负次幂 $\Rightarrow k\to\infty$ 时 $\delta(\eta)\to0$. 故 $k\to\infty$ 时(3.28)一致收敛于 $\varphi_*^{(s)}(c+\eta)$，而 $\varphi_*^{(s)}(c+\eta)=0$ 有明显解 $\eta=0\Rightarrow$ 方程(3.28)当 $k\to\infty$ 时有解 $\eta_k\to0$. 由 $c$ 非实 $\Rightarrow z_k=2k\pi+c+\eta_k$ 也非实($k$ 适当大以后).

现在证②，设 $\varphi_*^{(t)}(z)=0$ 的根皆实的、单重的，由引理 3.2，在条形域(3.21)中有 $4sk$ 个：$a_1,\cdots,a_{4sk}$，$\varphi_*^{(t)}(a_j)=0\Rightarrow a_j$ 也是实函数 $\varphi_*^{(t)}(x)(x\in R)$ 的零点. 当 $k$ 足够大时实函数 $F^*(x)$ 与 $\varphi_*^{(t)}(x)$ 的零点充分接近，记为 $a'_1,\cdots,a'_{4sk}$，由 $F^*(a'_j)=0\Rightarrow a'_j$ 也是 $F^*(z)$ 的零点(引理 3.2 说明 $F^*(z)$ 只有 $4sk$ 个零点).

现在说明 $a'_1,\cdots,a'_{4sk}$ 是实的. 由所设，实函数 $\varphi_*^{(t)}(x)$，$F^*(x)$ 所描绘的连续曲线如图 2.5 所示，注意到 $k$ 充分大，$F^*(x)$ 充分接近 $\varphi_*^{(t)}$，二者都有 $4sk$ 个实根($W=F^*(x)$ 用虚线表示).

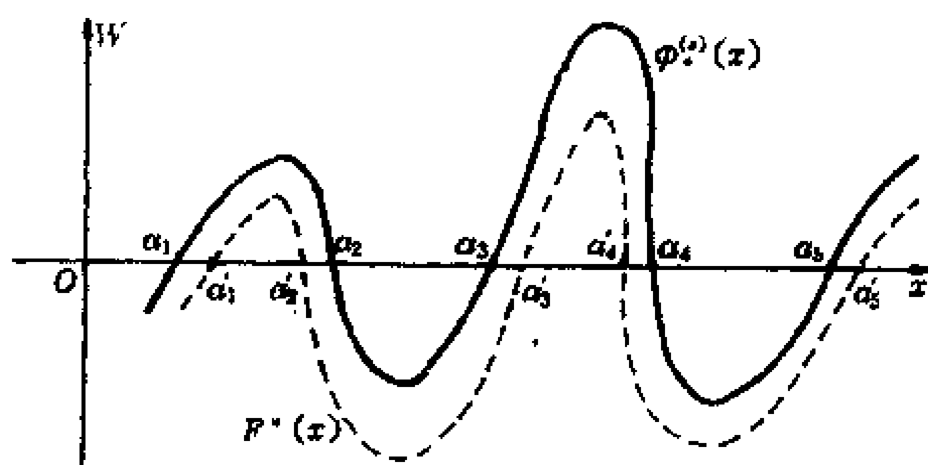



图 2.5

最后再由引理 3.2，$F(z)$ 有 $4sk+r$ 个零点. 如上所述，$F(z)=z^rF^*(z)\Rightarrow$ 其中有 $4sk$ 个实的，于是非实零点不超过 $r$ 个. 证毕.

**4. 函数 $h(z,e^z)$ 有主项时零点的分布**

记 $t=e^z$ 时 $h(z,t)$ 可写成(3.6)形式如下

$$h(z,t)=\sum_{m,n}a_{m,n}z^m t^n$$

$z$ 与 $t$ 的最高次幂分别记为 $r,s$，主项为 $a_{r,s}z^rt^s$，若把 $z^r$ 的系数汇总在一起，则

$$h(z,t)=z^r\psi_s^{(r)}(t)+\sum_{m<r,n\leqslant s}a_{m,n}z^m t^n \tag{3.29}$$

其中 $z^r\psi_s^{(r)}(t)$是首项. $\psi_s^{(r)}(e^z)$以 $2\pi i$ 为周期.

**引理 3.5** $\psi_s^{(r)}(e^z)$在 $b\leqslant y<b+2\pi(b\in R)$中有且仅有 $s$ 个零点，因而存在无穷点集$\{\beta\}$，当 $\varepsilon\in\{\beta\}$时 $\psi_s^{(r)}(e^{x+i\varepsilon})\neq 0$.

**证** 与引理1类似，由 $t=e^z$，$\psi_s^{(r)}(t)$是 $t$ 的 $s$ 次多项式，其零点记为 $t_1,\cdots,t_s$($k$ 重零点以 $k$ 个零点计). $\Rightarrow z_j=\ln t_j+2k\pi i(i=1,2,\cdots,s)\Rightarrow$在 $b\leqslant y<b+2\pi$ 中 $\psi_s^{(r)}(e^z)$只有 $s$ 个零点 $z_1,\cdots,z_s$，只要 $\beta$ 不取 $I_m z_j$，必成立 $\psi_s^{(r)}(e^{x+i\beta})\neq 0$，对$\forall\ x\in R$.

**引理 3.6** $z=x+iy, x>0$ 时，以 $N_k$ 记 $H(z)=h(z,e^z)$在$-2k\pi+\varepsilon\leqslant y\leqslant 2k\pi+\varepsilon$ 中的零点个数. 设 $H(z)$在虚轴上无零点(即 $H(iy)\neq 0$). 当 $y$ 由 $-2k\pi+\varepsilon$ 变到 $2k\pi+\varepsilon$ 时，向量 $W=H(iy)$所转的角度记为 $\theta_k$，则

$$\theta_k=2\pi(2sk-N_k+\frac{1}{2}r)+\delta_k$$

其中 $\delta_k\to 0, k\to 0$.

**证** 如图 2.6 所示，考虑矩形 $P_{ka}$

$$P_{ka}:\quad \begin{matrix}0\leqslant x\leqslant a\\ -2k\pi+\varepsilon\leqslant y\leqslant 2k\pi+\varepsilon\end{matrix}$$

由(3.29)有

$$H(z)=z^r\psi_s^{(r)}(e^z)(1+\delta_1(z))$$

当 $k\to\infty, a\to\infty$时，$H(z)$在 $P_{ka}$的边界上(除虚轴以外)有 $\delta_1(z)\to 0\Rightarrow H(z)$与 $z^r\psi_s^{(r)}(e^z)$在这三条边上的辐角转动之差为 $\delta_2$，当 $k\to\infty, a\to\infty$时，$\delta_2\to 0$，而 $z^r\psi_s^{(r)}(e^z)$的转角等于 $z^r$ 的转角 $r\pi$ 与 $\psi_s^{(r)}(e^z)$的转角之和，在 $P_{ka}$的上、下两条边 $\psi_s^{(r)}(e^z)$的辐角变化抵消，而在 $x=a$ 的一边上 $\psi_s^{(r)}(e^z)$的转

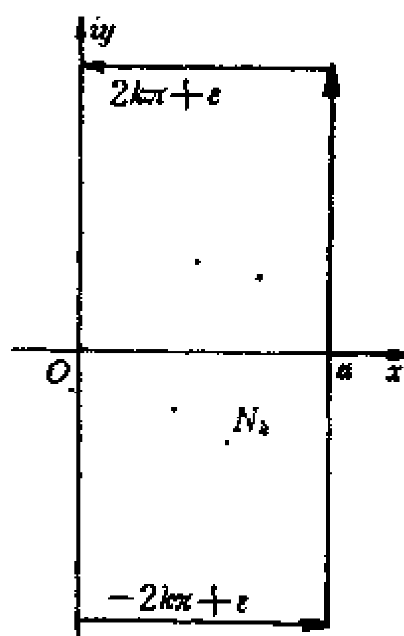


图 2.6

角近似于 $a_n e^{iz}$ 的转角，后者显然为 $4ks\pi$，合并之即得证.

此引理表明 $H(z)$ 在虚轴上的性态十分重要. 为了对 $H(iy)$ 应用引理 3.1～3.5，这里需要做一些推导. $e^{iy}=\cos y+i\sin y=u+iv$ 记

$$(u+iv)^n=\alpha^{(n)}(u,v)+i\beta^{(n)}(u,v) \tag{3.30}$$

其中 $\alpha^{(n)}(u,v)$，$\beta^{(n)}(u,v)$ 是 $u$，$v$ 的实多项式.

**引理 3.7** 若 $a$，$b\in R$，不同时为零，则

$$\rho^{(n)}(u,v)=a\alpha^{(n)}(u,v)+b\beta^{(n)}(u,v) \tag{3.31}$$

满足 $\rho^{(n)}(1,\pm i)\neq 0$.

**证** 事实上，由

$$\alpha^{(n)}(u,v)=\frac{1}{2}(u+iv)^n+(u-iv)^n$$

$$\beta^{(n)}(u,v)=\frac{1}{2i}(u+iv)^n-(u-iv)^n$$

把 $u=1$，$v=\pm i$，直接代入

$$\rho^{(n)}(1,\pm i)=a\alpha^{(n)}(1,\pm i)+b\beta^{(n)}(1\pm i)$$

$$=\frac{a}{2}[(1\pm i^2)^n+(1\mp i^2)^n]+\frac{b}{2i}[(1\pm i^2)^n-(1\mp i^2)^n]$$

$$=\frac{a+ib}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}(a+bi)\neq 0$$

证毕

为了最后证明零点分布定理，需要进一步分析 $H(z)=h(z,e^z)$ 在虚轴上的性状. 把 $iy$ 代入(3.6)分开实部和虚部写成

$$H(iy)=h(iy,e^{iy})=\sum_{m,n}y^m\psi_m^{(n)}(u,v)+i\sum_{m,n}y^m r_m^{(n)}(u,v)$$

$$\overset{\text{def}}{=}f(y,u,v)+ig(y,u,v) \tag{3.32}$$

由此得

$$f(y,u,v)=\sum_{m,n}y^m\psi_m^{(n)}(u,v)$$

$$g(y,u,v)=\sum_{m,n}y^m\gamma_m^{(n)}(u,v)$$

**引理 3.8** 设 $h(z,t)$ 有主项 $a_{rs}z^r t^s$，则 $\lambda f(y,u,v)+\mu g(y,u,$

$v$)的主项为 $y^r(\lambda\psi_r^{(s)}(u,v)+\mu\gamma_r^{(s)}(u,v))$. 沿用(3.31)的记号可写成

$$y^r\rho_r^{(s)}(u,v)=y^r(a\alpha^{(n)}(u,v)+b\beta^{(n)}(u,v)) \tag{3.33}$$

其中 $a,b=\text{const}$. $\lambda,\mu=\text{const}$. 不同时为零.

**证** 在(3.5)中记 $a_{mn}=a'_{mn}+ia''_{mn}$, $a'_{mn},a''_{mn}\in R$, 由(3.6), (3.30), $H(iy)$又可写成

$$\begin{aligned}H(iy)&=\sum_{m,n}(a'_{mn}+ia''_{mn})i^m y^m(\alpha^{(n)}(u,v)+i\beta^{(n)}(u,v))\\&=\sum_{m,n}i^m y^m(a'_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)-a''_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\\&\quad+\sum_{m,n}i^{m+1}y^m(a''_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)+a'_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\end{aligned} \tag{3.34}$$

比较(3.32)与(3.34)得当 $m=2k$ 时

$$\begin{aligned}\psi_m^{(n)}(u,v)&=\pm(a'_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)-a''_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\\\gamma_m^{(n)}(u,v)&=\pm(a''_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)+a'_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\end{aligned} \tag{3.35}$$

当 $m=2k-1$ 时

$$\begin{aligned}\psi_m^{(n)}(u,v)&=\pm(a''_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)+a'_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\\\gamma_m^{(n)}(u,v)&=\pm(a'_{mn}\alpha^{(n)}(u,v)-a''_{mn}\beta^{(n)}(u,v))\end{aligned} \tag{3.36}$$

设 $\lambda,\mu\in R$, 不同时为零, 则

$$\begin{aligned}&\lambda f(y,u,v)+\mu g(y,u,v)\\&=\sum_{m,n}y^m(\lambda\psi_m^{(n)}(u,v)+\mu\gamma_m^{(n)}(u,v))\end{aligned} \tag{3.37}$$

另一方面

$$\begin{vmatrix}a'_{mn} & -a''_{mn}\\ a''_{mn} & a'_{mn}\end{vmatrix}=(a'_{mn})^2+(a''_{mn})^2=|a_{mn}|^2$$

由 $a_{mn}\neq 0\Rightarrow|a_{mn}|^2\neq 0$, 故线性方程组(3.35)(3.36)可解出

$$\begin{aligned}&\lambda\psi_m^{(n)}(u,v)+\mu\gamma_m^{(n)}(u,v)=a_1\alpha^{(n)}(u,v)+b_1\beta^{(n)}(u,v)\quad m=2k\\&\lambda\psi_m^{(n)}(u,v)+\mu\gamma_m^{(n)}(u,v)=a_2\alpha^{(n)}(u,v)+b_2\beta^{(n)}(u,v)\quad m=2k-1\end{aligned} \tag{3.38}$$

代入(3.37)即得(3.33).　　　　证毕

同理把 $y'$ 的系数汇集在一起记为 $\lambda\psi_*^{(i)}(u,v)+\mu\gamma_*^{(i)}(u,v)$，即首项为 $y'(\lambda\psi_*^{(i)}(u,v)+\mu\gamma_*^{(i)}(u,v))$

与上一段类似，记

$$\varphi_*^{(i)}(z)=\psi_*^{(i)}(\cos z,\sin z)$$

$$\Gamma_*^{(i)}(z)=\gamma_*^{(i)}(\cos z,\sin z)$$

这样便可得到和引理 3.1 类似的结果：

**推论 3.2**　$\exists\ \varepsilon\in R$，使对 $\forall\ y\in R$ 成立

$$\lambda\varphi_*^{(i)}(\varepsilon+iy)+\mu\Gamma_*^{(i)}(\varepsilon+iy)\neq 0 \tag{3.39}$$

对 $\forall\ x\in R$ 成立

$$\psi_*^{(i)}(e^{x+ix})\neq 0 \tag{3.40}$$

若记 $F(y)=f(y,\cos y,\sin y)$，$G(y)=g(y,\cos y,\sin y)$，则 $H(z)$ 在虚轴上的辐角——$H(iy)$ 的辐角为

$$\arg H(iy)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{G(y)}{F(y)}\qquad y\in R \tag{3.41}$$

我们有

**引理 3.9**　$a,b\in R$，$y\in[a,b]$ 时，$W=H(iy)$ 的辐角改变量简记为 $v(a,b)$，则

(1) $\dfrac{d}{dy}v(0,y)$ 与 $G'(y)F(y)-G(y)F'(y)$ 同号

$$(2)\ v(a+\varepsilon,b+\varepsilon)=v(a,b)+\delta_1 \tag{3.42}$$

当 $\varepsilon$ 固定，$a\to\pm\infty$，$b\to\pm\infty$ 时，$\delta_1\to 0$.

**证**　事实上，由(3.41)对 $y$ 求导

$$\frac{d}{dy}v(0,y)=\frac{G'(y)F(y)-G(y)F'(y)}{F^2(y)+G^2(y)}$$

即得(1). 对(2)，首先有

$$v(a,b)=v(a,c)+v(c,b)$$

其次由 $H(z)$ 的结构，我们有

$$v(a,a+\varepsilon)=\varepsilon+\delta_2$$

其中当 $\varepsilon$ 固定，$a\to\pm\infty$ 时 $\delta_2\to 0$，把(3.42)写成 $v(a+\varepsilon,b+\varepsilon)=v(a,b)+v(a+\varepsilon,a)+v(b,b+\varepsilon)$ 即得(3.42)。

**引理** 3.10 设 $\lambda,\mu\in R$，不同时为零，则存在实数 $\varepsilon$ 使对 $\forall\ y\in R$ 同时成立

$$\begin{aligned}&\lambda\varphi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)+\mu\Gamma_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0\\&\mu\varphi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)-\lambda\Gamma_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0\\&\varphi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0\\&\Gamma_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0\end{aligned}\tag{3.43}$$

这由引理 3.1 及推论 3.2 立即得出。

显然，当 $k$ 充分大时，点 $H(-2k\pi+\varepsilon i)$ 不在 $W$ 平面的三条直线上；若 $W=W'+iW''$，则三直线为 $W'=0$，$W''=0$，$\lambda W'+\mu W''=0$（$\lambda,\mu$ 均非零）（其中 $\lambda W'+\mu W''=0\Leftrightarrow\arg W=-\frac{\mu}{\lambda}=\text{const}.(\pm 2k\pi)$ 为过原点的直线）。

**引理** 3.11 设 $H(iy)$ 的辐角改变量为 $v(-2k\pi,2k\pi)=\sigma(4ks\pi+\pi r)+\delta_3$，这里 $\sigma=\pm1$，当 $k\to\infty$ 时 $\delta_3\to 0$。则 $\lambda F(y)+\mu G(y)$ 只有单实根且

$$\sigma(G'(y)F(y)-F'(y)G(y))>0\tag{3.44}$$

其中 $\lambda,\mu\in R$ 不同时为零。

**证** $\lambda,\mu$ 给定，选取 $\varepsilon\in R$ 满足引理 3.10，由(3.42)$\Rightarrow y$ 由 $-2k\pi+\varepsilon$ 变到 $2k\pi+\varepsilon$ 时 $W=H(iy)$ 的辐角改变量为 $\sigma(4ks\pi+\pi r)+\delta_4$，所以 $W=H(iy)$ 当 $y$ 由 $-2k\pi+\varepsilon$ 变到 $2k\pi+\varepsilon$ 时穿过直线 $\frac{W''}{W'}=\frac{\lambda}{\mu}=\text{const}.$ 的不同 $y$ 值不少于 $4ks+r$ 个，由引理 3.2 函数 $\lambda F(y)+\mu G(y)$ 在 $[-2k\pi+\varepsilon,2k\pi+\varepsilon]$ 中的零点不多于 $4ks+r$ 个，所以 $\lambda F(y)+\mu G(y)$ 的一切零点都是实的单根。另一方面，由于无重根，所以 $W=H(iy)$ 不切于直线 $\frac{W''}{W'}=\frac{\lambda}{\mu}$。亦即 $W$ 向量总是以非

零速度作定向旋转. 即(3.44)成立(沿正向旋转 $\sigma=1$,沿负向则 $\sigma=-1$).

**定理** 3.2 设 $h(z,t)$ 有主项 $a_{rs}z^r t^s$,若 $H(z)=h(z,e^z)$ 的所有根都在虚轴左边,则当 $y$ 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时 $W=H(iy)$ 总以正速度旋转,即 $G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0$, 且 $y$ 由 $-2k\pi$ 变到 $2k\pi$ 时 $W=H(iy)$ 的辐角改变量为 $4ks\pi+\pi r+\delta(k\to\infty,\delta\to 0)$,反之亦然.

**证** 若 $H(z)$ 的所有零点都在虚轴的左边. 由引理 3.6 及引理 3.9 知 $H(iy)$ 的辐角改变量

$$v(-2k\pi,2k\pi)=4ks\pi+\pi r+\delta_5 \tag{3.45}$$

又由引理 3.11⇒$F(y)$,$G(y)$ 的所有零点都是单重的正实根且

$$G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0$$

即 $W$ 向量总以正速度正向旋转,其中 $k\to\infty$ 时 $\delta_5\to 0$. 反之若(3.45)成立,由引理 3.6 及 3.9⇒$N_t=0$,即零点都在虚轴左边.

在证明定理 3.3 之前先介绍一个术语:

$F(y)$,$G(y)$ 为两个实变数的实函数,我们说它们的零点是交错的,如果满足下列三个条件:

(1)零点都是单重的.

(2)$F(y)$ 和 $G(y)$ 无相同的零点.

(3)在其中每一个函数的两个零点之间必有另一函数的一个零点.

**定理** 3.3 设 $h(z,t)$ 有主项 $a_{rs}z^r t^s$,若 $H(z)$ 的所有零点在虚轴的左边,则 $F(y)$,$G(y)$ 的零点是实的、交错的,且对 $\forall\ y\in R$ 成立.

$$G'(y)F(y)-G(y)F'(y)>0 \tag{3.46}$$

反之,欲使 $H(z)$ 的零点都位于虚轴左边,只需成立下列三个条件之一即可.

(1)若 $F(y)$,$G(y)$ 的零点是实的、交错的,且(3.46)至少对一

个 $y$ 成立.

(2)若函数 $F(y)$ 的所有零点是实的，且对它的每一个零点成立 $F'(y_0)G(y_0)<0$.

(3)若函数 $G(y)$ 的所有零点是实的，且对它的每一个零点成立 $G'(y_0)F(y_0)>0$.

**证** 若 $H(z)$ 的所有零点都在虚轴左边，由定理 3.2⇒零点都是实的、单重的且(3.46)成立. 因而 $F(y)$ 和 $G(y)$ 必无公共零点. 只要证 $F(y)$(或 $G(y)$)的两零点之间必有 $G(y)$(或 $F(y)$)的零点即可. 若不然，例如设 $F(y)$ 的两个相邻零点为 $y_0^1, y_0^2$，而当 $y\in(y_0^1, y_2^2)$ 时 $G(y)>0(<0)$，由(3.46)⇒$F'(y_0^1)<0(>0)$⇒$y\in(y_0^1, y_0^2)$ 时，$F(y)<0$⇒$F(y_0^2)\neq 0$⇒矛盾.

反之，若条件(1)成立，由 $F(y)$，$G(y)$ 的零点是实的、交错的⇒对$\forall\ y\in R$，$H(iy)\neq 0$，故引理 3.2⇒$\lambda F(y)+\mu G(y)$($\lambda,\mu\in R$ 不同时为零)，对充分大的 $k$ 有 $4ks+r$ 个零点，而引理 3.9⇒$H(iy)$ 的辐角改变量为 $v(-2k\pi, 2k\pi)=\sigma(4ks\pi+\pi r)+\delta_b$，$\delta_b\to 0$，当 $k\to\infty$. 再由引理 3.11⇒$\sigma(G'(y)F(y)-F'(y)G(y))>0$，但(3.42)至少对某一个 $y$ 成立⇒$\sigma=1$⇒定理 3.2 的条件全部满足⇒$H(z)=0$ 的所有零点都在虚轴的左边.

若条件(2)或(3)成立，则对$\forall\ y\in R$，$H(iy)\neq 0$. 同理可证定理成立.

**定理 3.4** 设 $h(z,t)$ 有首项 $a_{rs}z^rt^s$，且 $h(z,t)$ 中 $z^r$ 的系数记为 $\phi_*^{(r)}(t)$，则有

(1)若 $\phi_*^{(r)}(e^z)$ 至少有一个零点在虚轴右方，那末 $H(z)$ 便有无限多个零点在虚轴右方.

(2)若 $\phi_*^{(r)}(e^z)$ 的零点都在虚轴左方，则 $H(z)$ 在虚轴右方零点至多有有限个.

**证** 与引理 3.4 类似，我们记 $H(z)=h(z,e^z)$ 为

$$H(z)=z^r\{\psi_*^{(s)}(e^z)+\sum_{m<r,n\leqslant s} z^{m-r}\psi_m^{(n)}(z)\}$$
$$=z^r\{\psi_*^{(s)}(e^z)[1+\Delta(z)]\}$$

其中$|z|\to\infty$时$\Delta(z)\to 0\Rightarrow$若$H(z)$与$z^r\psi_*^{(s)}(e^z)$的零点集分别为$\{\lambda_j\},\{\lambda'_j\}$，则$|\lambda_j-\lambda'_j|\to 0$，当$j\to\infty$.

另一方面，若$\psi_*^{(s)}(e^z)$有一个零点实部大于零，即$z=u+iv$，$u>0$，则由于$t=e^z=e^{u+iv}=e^{u+i(v+2k\pi)}\Rightarrow\psi_*^{(s)}(e^z)$有无限多个零点实部大于零. 合并二者即得定理的两个结论.

## §4 线性DDE解的估计

这里仅提出DDE解的指数估计，主要目的是说明对线性定常DDE可以施行Laplace变换.

### 1. 线性RDDE解的指数估计

**引理4.1**(Gronwall) 若$u(t)$与$\alpha(t)$都是$[a,b]$上连续的实函数，$\beta(t)\geqslant 0$，在$[a,b]$上可积且成立

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)u(s)ds \quad t\in[a,b] \tag{4.1}$$

则必有

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(s_1)ds_1}ds \tag{4.2}$$

若加上$\alpha(t)$非减，则成立

$$u(t)\leqslant\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds} \tag{4.3}$$

**证** 记$R(t)=\int_a^t\beta(s)u(s)ds$，则由(4.1)有

$$\dot R(t)=\beta(t)u(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)R(t)$$

或

$$\dot R(t)-\beta(t)R(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t) \tag{4.4}$$

(4.4)两边乘以 $\exp(-\int_a^t \beta(s_1)ds_1)$，并把 $t$ 改为 $s$ 得

$$\frac{d}{ds}[R(s)\exp(-\int_a^s \beta(s_1)ds_1)] \leqslant \beta(s)\alpha(s)\exp(-\int_a^s \beta(s_1)ds_1)$$

上式自 $a$ 到 $t$ 积分之后得

$$R(t) \leqslant \int_a^t [\beta(s)\alpha(s)\exp(\int_s^t \beta(s_1)ds_1)]ds \tag{4.5}$$

由(4.5)与(4.1)⇒(4.2)成立.

若 $\alpha$ 非减，则由(4.2)

$$u(t) \leqslant \alpha(t)(1+\int_a^t [\beta(s)\exp(\int_s^t \beta(s_1)ds_1)]ds)$$

$$=\alpha(t)(1+\int_a^t (-de^{\int_s^t \beta(s_1)ds_1}))=\alpha(t)\exp\int_a^t \beta(s)ds$$

对线性自治 RDDE

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m} B_i x(t-\tau_i)+f(t) \tag{4.6}$$

其中 $x, f \in R^n$，$A, B_i$ 为 $n\times n$ 常数阵，$|\cdot|$ 为 $R^n$ 中的范数，但 $|\varphi| = \sup\limits_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|$，$r=\max\tau_i$，$\varphi$ 为初始函数. $\|\cdot\|$ 为阵的模即 $\|A\| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

**定理 4.1** 若(4.6)过 $(t_0,\varphi)$ 的解为 $x(t,t_0,\varphi)$，则存在正常数 $a, b$ 成立

$$|x(t,t_0,\varphi)| \leqslant ae^{bt}(|\varphi|+K\int_0^t |f(s)|ds) \tag{4.7}$$

其中 $t\geqslant 0$，$K=a^{-1}$.

**证** 不妨设 $t_0=0$，解为 $x(t)=x(t,0,\varphi)$，由(4.6)有

$$x(t)=\varphi(0)+\int_0^t Ax(s)ds+\int_0^t \sum_{i=1}^{m} B_i x(s-\tau_i)ds+\int_0^t f(s)ds$$

注意到 $t\in[-r,0]$ 时 $x(t)=\varphi(t)$，我们有

$$|x(t)| \leqslant |\varphi(0)| + \int_0^t |f(s)| ds + \int_0^t \| A \| \, |x(s)| ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{-\tau_i}^{t} \| B_i \| \, |x(s)| ds \tag{4.8}$$

其中最后和式中每一项为

$$\int_{-\tau_i}^{t} \| B_i \| \, |x(s)| ds = \int_0^t \| B_i \| \, |x(s)| ds$$

$$+ \int_{-\tau_i}^{0} \| B_i \| \, |x(s)| ds \leqslant \int_0^t \| B_i \| \, |x(s)| ds + \tau_i \| B_i \| \, |\varphi|$$

再注意到$|\varphi(0)| \leqslant |\varphi| = \sup\limits_{\theta \in [-\tau, 0]} |\varphi(\theta)|$，则(4.8)为

$$|x(t)| \leqslant [(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \| B_i \|) |\varphi| + \int_0^t |f(s)| ds] +$$

$$+ \int_0^t (\| A \| + \sum_{i=1}^{m} \| B_i \|) |x(s)| ds \tag{4.9}$$

由引理 4.1 并记 $a = 1 + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \| B_i \|$，$b = \| A \| + \sum_{i=1}^{m} \| B_i \| \geqslant 0$，由此即得(4.7).

**推论 4.1** 若 $f(t) \equiv 0$，则相应的(4.7)为$|x(t)| \leqslant a e^{bt} |\varphi|$.

## 2. 线性 NDDE 解的指数估计

对中立型方程组

$$\frac{d}{ds}[x(t) - c x(t-\tau)] = A x(t) + B x(t-\tau) + f(t) \tag{4.10}$$

**定理 4.2** 设 $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$为(4.10)的解，则存在正常数 $a$ 和 $b$ 使成立

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant a e^{bt} (|\varphi| + K \int_{t_0}^{t} |f(s)| ds), a = \frac{1}{K}, t \geqslant t_0 \tag{4.11}$$

**证** 不妨设 $t_0 = 0$，记 $a = (1 + 2 \| C \|)$，$b_1 = \| A \| + \| b \|$，由(4.10)得积分方程

$$x(t)=\varphi(0)-c\varphi(-\tau)+cx(t-\tau)+\int_0^t f(s)ds$$

$$+\int_0^t [Ax(s)+Bx(s-\tau)]ds$$

$$|x(t)|\leqslant|\varphi(0)|+\|c\|\ |\varphi(-\tau)|$$

$$+\|c\|\ |x(t-\tau)|+\int_0^t [|f(s)|ds$$

$$+\int_0^t \|A\|\ |x(s)|ds+\int_0^t \|B\|\ |x(s-\tau)|ds \tag{4.12}$$

注意到 $|\varphi|=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}|\varphi(\theta)|\Rightarrow|\varphi(0)|<|\varphi|,|\varphi(-\tau)|<|\varphi|$. 再定义实函数

$$y(t)=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}|x(t+\theta)|,t\in[0,\frac{\tau}{2}]$$

并记(4.12)为

$$|x(t)|\leqslant a|\varphi|+\int_0^t|f(s)|ds+b_1\int_0^t y(s)ds,t\in[0,\frac{\tau}{2}]$$

由于 $a\geqslant1,x(t)=\varphi(t),t\leqslant0$,并注意上式中两个积分都是 $t$ 的增加函数,我们有 $t\in[0,\frac{\tau}{2}]$时成立

$$|x(t)|\leqslant|y(t)|\leqslant a|\varphi|+\int_0^t|f(s)|ds+b_1\int_0^t y(s)ds$$

由引理 4.1 得

$$y(t)\leqslant[a|\varphi|+\int_0^t|f(s)|ds]e^{b_1t}\quad t\in[0,\frac{\tau}{2}] \tag{4.13}$$

类似地有估式

$$y(t)\leqslant[ay(\tau_0)+\int_{\tau_0}^t|f(s)|ds]e^{b_1(t-\tau_0)}$$

$$t\in[\tau_0,\tau_0+\frac{\tau}{2}],\tau_0\geqslant0$$

选取 $b>b_1$ 使 $ae^{(b_1-b)\frac{\tau}{2}}<1$,我们用归纳法证明

$$y(t)\leqslant[a|\varphi|+\int_0^t|f(s)|ds]e^{bt}\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{K\tau}{2} \tag{4.14}$$

其中 $K$ 为正整数. 当 $K=1$ 时由(4.13)⇒(4.14)成立. 设对某个 $K$(4.14)成立,则对 $K+1$ 的情形考察区间$[\frac{\tau}{2},\frac{(K+1)\tau}{2}]$,记 $t_1=t-\frac{\tau}{2}\in[0,\frac{K\tau}{2}]$,由(4.14)得到

$$y(t)\leqslant[ay(t-\frac{\tau}{2})+\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}|f(s)|ds]e^{\frac{b_1\tau}{2}} \tag{4.15}$$

另一方面,在 $t-\frac{\tau}{2}$ 处(4.14)成立,即

$$y(t-\frac{\tau}{2})\leqslant[a|\varphi|+\int_0^{t-\frac{\tau}{2}}|f(s)|ds]e^{b(t-\frac{\tau}{2})} \tag{4.16}$$

合并(4.15)(4.16)有

$$y(t)\leqslant\{a[a|\varphi|+\int_0^{t-\frac{\tau}{2}}|f(s)|ds]e^{b(t-\frac{\tau}{2})}+\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}|f(s)|ds\}e^{\frac{b_1\tau}{2}}$$

$$\leqslant[a|\varphi|+\int_0^{t-\frac{\tau}{2}}|f(s)|ds]e^{bt}\cdot ae^{(b_1-b)\frac{\tau}{2}}+e^{b_1\frac{\tau}{2}}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}|f(s)|ds$$

由于 $t\geqslant\frac{\tau}{2}$,$b>b_1$,$ae^{b-b_1\frac{\tau}{2}}<1$⇒

$$y(t)\leqslant[a|\varphi|+\int_0^t|f(s)|ds]e^{bt}$$

证毕

**注 4.1** 由于 A 型和 C 型线性自治系统存在可列个零点 $\lambda_j$,使 $\mathrm{Re}\lambda_j\to\infty$,所以不存在与 $|\varphi|$ 无关的 $a,b$ 使成立类似于定理(4.1)和(4.2)的结论.

## §5 Laplace 变换下解的表示与估计

### 1. Laplace 变换的性质

给定 $f:R_+\to R$,且存在常数 $a,b$ 使 $|f(t)|<ae^{bt}$,$t\in R_+$,$f(t)$ 除了有限个第一类间断点以外处处连续,若

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt \tag{5.1}$$

存在，则称 $F(\lambda)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换式（由于对 $f(t)$ 的假定，的确存在 $\sigma_0$，当 $\mathrm{Re}\lambda>\sigma_0$ 时(5.1)存在），它是把定义于 $R_+$ 上的实函数映成为定义在复平面上 $\mathrm{Re}\lambda>\sigma_0$ 上的复函数的变换. 称 $F(\lambda)$ 为 $f(t)$ 的象函数，$f(t)$ 为 $F(\lambda)$ 的原象. 记

$$F(\lambda)=L[f(t)] \tag{5.2}$$

有些场合 $f(t)$ 要求定义在 $R$ 上而不是 $R_+$ 上，且 $t<0$ 时 $f(t)\neq 0$. 通常对它乘以 Heaviside 函数 $H(t)$ 以后再作为原象. 这里

$$H(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{5.3}$$

若 $f'(t)$ 除去有限个第一类间断点以外，处处连续，则成立反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\overset{\Delta}{=}\int_c F(\lambda)e^{\lambda t}dt$$

这一逆变换公式记为

$$f(t)=L^{-1}[F(\lambda)] \tag{5.4}$$

显然算子 $L[\cdot]$ 是线性的，并有如下几个重要性质：

(1)微分、积分性质

$$L[f^{(n)}(t)]=\lambda^n L[f(t)]-\lambda^{n-1}f(0)-\lambda^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$L\left[\int_0^t f(s)ds\right]=\frac{1}{\lambda}L[f(t)]$$

(2)延迟性质

$$L[f(t-\tau)H(t-\tau)]=e^{-\lambda\tau}L[f(t)]$$

其中 $H(t-\tau)=\begin{cases}1 & t\geqslant\tau\\ 0 & t<\tau\end{cases}$

(3)卷积定理

给定 $F(\lambda)=L[f(t)]$，$G(\lambda)=L[g(t)]$，则

$$L^{-1}[F(\lambda)G(\lambda)]=\int_0^t g(t_1)f(t-t_1)dt_1=\int_0^t f(t_1)g(t-t_1)dt_1 \tag{5.5}$$

由(5.5)定义了 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的一个"乘积"——"$*$",称为卷积或折积,记为

$$f*g=\int_0^t g(t_1)f(t-t_1)dt_1$$

显然"$*$"满足交换律,且有

$$L[f*g]=F(\lambda)G(\lambda)=L[f(t)]L[g(t)]=L[g*f]$$

(4)若 $f(t)$ 在 $R_+$ 的任何紧集上是有界变差的,对给定的常数 $b>0$,$f(t)e^{-bt}$ 在 $R_+$ 上 Lebesque 可积,则对任何 $c>b$ 成立

$$\int_{(c)} L[f(t)]e^{\lambda t}d\lambda=\int_{(c)} F(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(f(t+0)-f(t-0)) & t>0\\[2mm] \dfrac{1}{2}f(0_+) & t=0\end{cases} \tag{5.6}$$

以上几个性质可以在一般积分变换的专著中查到.在应用中通常把常用的各种初等函数的 Laplace 变换式汇成表格备查,而不是直接计算反演公式.

### 2. 用 $L$ 变换求解线性自治 DDE

对 DDE 的求解,迄今为止只涉及分步法.对线性自治的情形我们用 $L$ 变换求解是可能的,这种解法的特点是连同初始函数一起考虑进去了,此外,还把积分这一困难的手续化为简单的代数运算与查变换表.

**例 1** 对非齐次 ODE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)+f(t)\\ x(0)=c \qquad (a,c\ \text{为常数},t\geqslant 0)\end{cases} \tag{5.7}$$

原方程两边施行 Laplace 变换得

$$L[x(t)]=\frac{c}{\lambda-a}+\frac{L[f(t)]}{\lambda-a}$$

第一项的原函数为 $ce^{at}$(查表),第二项里视 $L[f(t)]=F(\lambda)$,$\frac{1}{\lambda-a}=G(\lambda)$,由卷积定理有

$$L^{-1}[F(\lambda)G(\lambda)]=\int_0^t e^{a(t-t_1)}f(t_1)dt_1$$

由此得(5.7)的解为

$$x(t)=ce^{at}+\int_0^t e^{a(t-t_1)}f(t_1)dt_1$$

**例 2** 求解 RDDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t-1)\\ x(t)=\varphi(t)\qquad t\in[-1,0]\end{cases}\tag{5.8}$$

可以对(5.8)施行 $L$ 变换,即两边乘 $e^{-\lambda t}$并从 0 到$\infty$积分之,得

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-\lambda t}dt=\int_0^\infty x(t-1)e^{-\lambda t}dt\tag{5.9}$$

(5.9)左边用微分性质,右边代换 $t-1=t'_1$,并改变积分上下限,则

$$-x(0)+\lambda\int_0^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda}[\int_0^\infty x(t')e^{-\lambda t'}dt'$$

$$+\int_{-1}^0 x(t')e^{-\lambda t'}dt']$$

$$(\lambda-e^{-\lambda})L[x(t)]=x(0)+e^{-\lambda}\int_{-1}^0 x(t)e^{-\lambda t}dt$$

设 $\lambda-e^{-\lambda}\neq 0$,则由 $t\in[-1,0]$时 $x(t)=\varphi(t)$,我们有

$$L[x(t)]=\frac{x(0)}{\lambda-e^{-\lambda}}+\frac{1}{\lambda e^{\lambda}-1}\int_{-1}^0\varphi(t)e^{-\lambda t}dt$$

由反演公式得

$$x(t)=\int_{(c)}\frac{x(0)}{\lambda e^{\lambda}-1}e^{\lambda t}d\lambda+\int_{(c)}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda e^{\lambda}-1}(\int_{-1}^0\varphi(s)e^{-\lambda s}ds)d\lambda$$

在第一章中已指出,为了得到连续解一般要求 $x(0)=\varphi(0)$,(5.10)表明 $x(t)$依赖于 $\varphi(t)e^{-\lambda t}$在$[-1,0]$上的积分值. 当 $\varphi=$con-

st. 特别是 $\varphi\equiv 0$ 时可以求得 $x(t)$ 的解析表达式.

**例 3** 求解初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t-1)+1 \\ x(t)=0 \qquad t\in[-1,0] \end{cases} \tag{5.10}$$

对方程施行 $L$ 变换且把初值代入得

$$X(\lambda)=L[x(t)]=X(\lambda)e^{-\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$

$$X(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda-e^{-\lambda}}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\lambda}/\lambda}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}(1+\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}+\frac{e^{-2\lambda}}{\lambda^2}+\cdots+\frac{e^{-n\lambda}}{\lambda}+\cdots)$$

查表或计算反演公式得

$$x(t)=t\eta(t)+\frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}$$

$$\eta(t-n)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k)$$

其中 $t\geqslant 0$,且

$$\eta(t-a)=\begin{cases}1 & t\geqslant a \\ 0 & t<a\end{cases} \tag{5.11}$$

**例 4** 求解 NDDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t-\tau)+\dot{x}(t-\tau) \\ x(t)=\varphi(t) \quad \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t) \quad t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{5.12}$$

同样可以对(5.12)施行 Laplace 变换得

$$-x(0)+\lambda L[x(t)]=\int_0^{\infty}x(t-\tau)e^{-\lambda t}dt+\int_0^{\infty}\dot{x}(t-\tau)e^{-\lambda t}dt \tag{5.13}$$

上式右边作积分变量代换 $t_1=t-\tau$,则右边为

$$e^{-\lambda\tau}[\int_0^{\infty} x(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1+\int_{-\tau}^{0}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1]$$

$$+e^{-\lambda\tau}[\int_0^{\infty}\dot{x}(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1+\int_{-\tau}^{0}\dot{\varphi}(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1]$$

$$=e^{-\lambda\tau}[\lambda L[x(t)]-x(0)+L[x(t)]+e^{-\lambda\tau}[\int_{-\tau}^{0}(\varphi(t_1)+\dot{\varphi}(t_1))e^{-\lambda t_1}dt_1]$$

由此(5.13)为

$$(\lambda-e^{-\lambda\tau}-\lambda e^{-\lambda\tau})L[x(t)]=x(0)(1-e^{-\lambda\tau})$$

$$+e^{-\lambda\tau}[\int_{-\tau}^{0}(\varphi(t_1)+\dot{\varphi}(t_1))e^{-\lambda t_1}dt_1]$$

$$x(t)=\int_c h^{-1}(\lambda)[x(0)(1-e^{-\lambda\tau})$$

$$+e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0}(\varphi(t_1)+\dot{\varphi}(t_1))e^{-\lambda t_1}dt_1] \tag{5.14}$$

若 $\varphi=0,\dot{\varphi}=0$,则(5.14)化为

$$x(t)=\int_c h^{-1}(\lambda)(1-e^{-\lambda\tau})(1+\frac{1}{\lambda})d\lambda$$

**3. 通解的表示**

以一阶系统为例.对滞后型和中立型方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{5.15}$$

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau) \tag{5.16}$$

(5.15)的特征方程为

$$h(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}=0 \tag{5.17}$$

§2 中指出,$h(\lambda)$的可列个零点能够决定(5.15)可列个独立解.由§1 的基本性质推出这些独立解的有限组合和一致收敛的无限组合$\sum_{i=1}^{\infty}c_i e^{\lambda_i t}$($c_i$ 为常数,$\lambda_i$ 是互不相等的可列个特征根)都是(5.15)的解,但是我们没有也难以证明(5.15)的一切解都可用这些独立解的组合表示.换句话说我们没有得到通解的表达式.现在

用 Laplace 变换法来给出通解.

**定义** 5.1 由于(5.15)是自治的,不妨设 $t_0=0$,称初始条件

$$x(t)=\varphi_0=\begin{cases}0 & -\tau\leqslant t<0\\ 1 & t=0\end{cases} \tag{5.18}$$

所决定的解为(5.15)的基础解. 记为 $X(t)=X(t,0,\varphi_0)$.

用分步法可以证明解 $X(t)$ 存在唯一, 并且 §4 中的指数估计公式仍成立, $X(t)$ 在任何紧集上是有界变差的. 我们有

**定理** 5.1 (5.15)的基础解 $X(t)$ 满足

$$X(t)=\int_{-c} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda, t>0 \tag{5.19$_1$}$$

$$L(X(t))=h^{-1}(\lambda) \tag{5.19$_2$}$$

其中 $c>b$, $b$ 是 $X(t)$ 的指数界限.

**证** 由(5.15)两边施行 Laplace 变换得

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-\lambda t}dt=a\int_0^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt+b\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-\lambda t}dt$$

注意到 $[-\tau,0]$ 上 $\varphi\equiv 0$, 我们有

$$h^{-1}(\lambda)L(X)=X(0)=1, L(X)=h^{-1}(\lambda)$$

由反演公式即得(5.19).

**定理** 5.2 (5.15)的通解写成

$$x(t,0,\varphi)=X(t)\varphi(0)+b\int_{-\tau}^0 X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta \tag{5.20}$$

**证** 对 $\forall\ \varphi\in C([-\tau,0],R)$, 由(5.15)两边施行 Laplace 变换并把 $\varphi$ 代入得

$$\lambda L(x)-x(0)=aL(x)+be^{-\lambda\tau}L(x)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta$$

整理得

$$h(\lambda)L(x)=\varphi(0)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta$$

或 $$L(x)=h^{-1}(\lambda)\varphi(0)+h^{-1}(\lambda)e^{-\lambda\tau}b\int_{-\tau}^0 \varphi(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta \tag{5.21}$$

对(5.21)两边施行 Laplace 逆变换,左边即 $X(t)$,右边第一项即 $X(t)\varphi(0)$,右边第二项的计算稍复杂一点,为此我们定义 $\omega$: $[-\tau,\infty]\to[0,1)$为

$$\omega(\theta)=\begin{cases}0 & \theta\geq 0\\ 1 & \theta<0\end{cases}$$

再把初始函数扩充定义为

$$\hat{\varphi}(\varphi)=\begin{cases}\varphi(\theta) & \theta\in[-\tau,0]\\ \varphi(0) & \theta\geq 0\end{cases}$$

此时右边第二项写成

$$\begin{aligned}&bh^{-1}(\lambda)e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{\infty}\hat{\varphi}(\varphi)\omega(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta\\ &=bh^{-1}(\lambda)\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}\hat{\varphi}(s-\tau)\omega(s-\tau)ds \qquad (5.22)\\ &=bL(\varphi(s-\tau)\omega(s-\tau)h^{-1}(\lambda))\end{aligned}$$

由卷积定理得出(5.22)的原函数为

$$b\int_{0}^{t}X(t-t_1)\hat{\varphi}(t_1-\tau)\omega(t_1-\tau)dt_1=b\int_{0}^{\tau}X(t-t_1)\varphi(t_1-\tau)dt_1$$

令$t_1=\tau+\theta$,上式即化为 $b\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta$. 证毕

对中立型方程(5.16),由初始函数(5.18)确定的解仍定义为基础解,也记做 $X(t)$,它在任一紧集上是有界变差的.(5.16)的特征方程为

$$H(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}-c\lambda e^{-\lambda\tau}=0$$

我们还可以得出§4的结果:(5.16)的解存在指数估计,并且有

**定理** 5.3 若 $X(t)$是(5.16)的基础解,$c>b$,$b$ 是由 $X(t)$的指数估计确定的,则

$$X(t)=\int_{(c)}H^{-1}(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda \qquad (5.23)$$

或

$$L(X(t))=H^{-1}(\lambda)$$

证明完全类似，从略.

**定理** 5.4　设 $X(t)$ 为(5.16)的基础解，$X(t,0,\varphi)$是(5.16)以 $\varphi$ 为初始函数的解，它必满足通解公式

$$x(t,0,\varphi)=X(t)[\varphi(0)-c\varphi(-\tau)]+b\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta$$
$$+c\varphi(t-\tau)\omega(t-\tau)+c\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta \tag{5.24}$$

其中对 $\theta<0,\omega(\theta)=1;\theta\geqslant0,\omega(\theta)=0$. 若 $t\geqslant\tau$，则出现含有 $\omega$ 的项；若 $t<\tau$，则这种项为 $c\varphi(t-\tau)$，它正好是 Stieltjes 积分$-\int_{-\tau}^{t-\tau}[dX(t-\theta-\tau)]\varphi(\theta)$的值，所以 $x(t,0,\varphi)$的表达式(5.24)可以写成

$$x(t,0,\varphi)=X(t)[\varphi(0)-c\varphi(-\tau)]+b\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta$$
$$-c\int_{-\tau}^{0}[dX(t-\theta-\tau)]\varphi(\theta) \tag{5.25}$$

#### 4. 常数变易公式

与(5.15)(5.16)一起，考虑非齐次方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+f(t) \tag{5.26}$$

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau)+f(t) \tag{5.27}$$

其中 $f(t)$可积且$|f(t)|\leqslant a_0e^{b_0t},a_0,b_0\in R$，所以对(5.26)(5.27)可施行Laplace变换，记相应的齐次方程的基础解为$X(t)$，通解为 $x(t,0,\varphi)$，我们有

**定理** 5.5　(5.26)的通解记为 $x^*(t,0,\varphi)$. 则有

$$x^*(t,0,\varphi)=x(t,0,\varphi)+\int_0^t X(t-s)f(s)ds \tag{5.28}$$

**证**　对(5.26)两边施行 Laplace 变换，与定理 5.2 的做法类似，可得

$$L(x^*)=h^{-1}(\lambda)[\varphi(0)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0}e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta]+h^{-1}(\lambda)L(f)$$

由(5.21)及 $h^{-1}(\lambda)=L(X)$得

$$L(x^*)=L(x)+L(x)L(f) \tag{5.29}$$

对(5.29)用反演公式和卷积定理即得(5.28).

式(5.28)亦称常数变易公式,对中立型方程(5.27)有类似定理.

**定理** 5.6 对非齐次中立型方程(5.27),设 $f$ 有指数估计 $|f(t)|\leqslant a_0e^{b_0t}$, $a_0,b_0\in R$, $\widetilde{x}(t,0,\varphi)$是(5.27)过$(0,\varphi)$的解,则它满足通解公式

$$\widetilde{x}(t,0,\varphi)=x(t,0,\varphi)+\int_0^t X(t-s)f(s)ds \tag{5.30}$$

其中 $x(t,0,\varphi)$是相应的齐次方程(5.16)的通解,$X(t)$是(5.16)的基础解,(5.30)也是常数变易公式.

证明与定理 5.5 类似,从略.

5. **解的精确指数界限**

根据特征方程零点实部的上确界可以给出(5.15)(5.16)解的精确估计.

**定理** 5.7 设(5.15)的特征方程(5.17)零点的集合为$\{\lambda_j\}$,$\alpha_0=\max\{\mathrm{Re}\lambda_j\}$,则对$\forall\ \alpha>\alpha_0$,存在常数 $K(\alpha)$使基础解满足不等式

$$|X(t)|\leqslant Ke^{\alpha t},t\geqslant 0 \tag{5.31}$$

**证** 由定理 5.1 有

$$X(t)=\int_{(c)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

其中 $c$ 是充分大的实数,我们先证

$$X(t)=\int_{(\alpha)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda \tag{5.32}$$

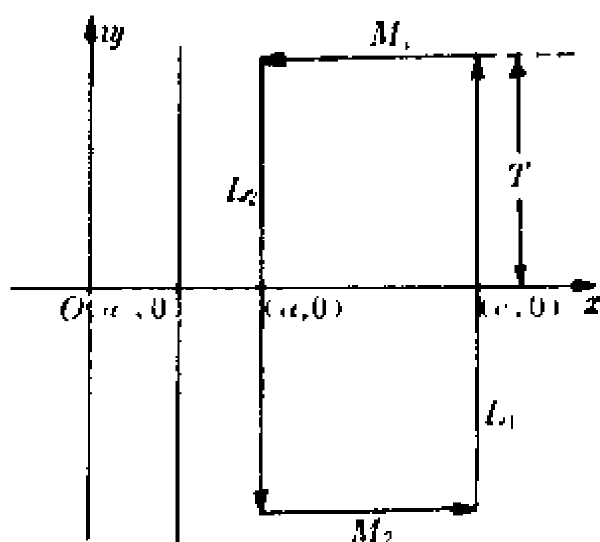



图 2.7

注意到在矩形 $L_1M_1L_2M_2$ 的内部和边界上 $h(\lambda)$均无零点$\Rightarrow h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}$解析，即

$$\int_{L_1}+\int_{M_1}+\int_{L_2}+\int_{M_2}=0$$

$L_1$、$M_1$、$L_2$、$M_2$ 作为点集表示成

$$L_1:\{c+it_1:-T\leqslant t_1\leqslant T\}$$

$$L_2:\{\alpha+it_1:-T\leqslant t_1\leqslant T\}$$

$$M_1:\{\sigma+iT:\alpha\leqslant\sigma\leqslant c\}$$

$$M_2:\{\sigma-iT:\alpha\leqslant\sigma\leqslant c\}$$

要证(5.32)，只要证 $T\to\infty$时

$$\int_{M_1}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\to 0,\int_{M_2}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\to 0$$

即可，选择 $T_0$，使当 $T\geqslant T_0$ 时有

$$(1+\frac{\alpha^2}{T^2})^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{T}(|a|+|b|e^{-\alpha\tau})\geqslant\frac{1}{2}$$

若 $\lambda\in M_1$，且 $T\geqslant T_0$ 则由 $h(\lambda)$的表达式得

$$|h^{-1}(\lambda)|\leqslant\frac{1}{(\sigma^2+T^2)^{\frac{1}{2}}-|a|+|b|\exp(-\sigma\tau)}\leqslant\frac{2}{T}$$

于是有

$$\left|\int_{M_1} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant \frac{2}{T}e^{at}(c-a) \to 0,$$ 当 $T\to\infty$，同理可证

$\int_{M_2} \to 0$，当 $T\to\infty$. 对这样的 $T_0$，作函数

$$g(x)=h^{-1}(\lambda)-(\lambda-\alpha_0)^{-1}$$

则由 $\lambda=\alpha+iT, T\geqslant T_0$ 时成立

$$|g(\lambda)|=\left|h^{-1}(\lambda)\frac{a+be^{-\lambda r}-\alpha_0}{\lambda-\alpha_0}\right| \leqslant \frac{2}{T^2}(|a|+|b|e^{-\alpha r}+|\alpha_0|)$$

从而有

$$\int_{(\alpha)}|g(\lambda)|d\lambda<\infty \text{ 且 } \left|\int_{(\alpha)} g(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant K_1 e^{\alpha t}, t\geqslant 0$$

其中 $K_1=\text{const}$. 又已知积分 $\int_{(\alpha)}(\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ 存在，由反演公式即得估计

$$\left|\int_{(\alpha)}(\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant K_2 e^{\alpha t}, t>0$$

取 $K=K_1+K_2\Rightarrow$ 定理成立.

有了这个定理，由(5.20)对方程(5.15)的一切解便有了精确的指数估计.

现在考虑 NDDE

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau) \tag{5.33}$$

$$h(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}-c\lambda e^{-\lambda\tau} \tag{5.34}$$

与 RDDE 类似，我们有

**定理** 5.8 设(5.34)的零点全体为 $\{\lambda_j\}$，若 $\alpha_0=\text{Sup}\{\text{Re}\lambda_j\}$，则对任何的 $\alpha>\alpha_0$，$\exists\ K=K(\alpha)$ 使(5.33)的基础解满足

$$|X(t)|\leqslant Ke^{\alpha t} \text{ 及 } \overset{t}{\underset{t-r}{\text{V}}}X\leqslant Ke^{\alpha t}, t\geqslant 0 \tag{5.35}$$

其中 $\overset{t}{\underset{t-r}{\text{V}}}X$ 表示 $X$ 在 $[t-r,t]$ 上的全变差.

**证** 由§2第4段所述的 NDDE 渐近根链的性质，对 $\forall\ \alpha>\alpha_0$，$\exists$ 区间 $I$ 使在条形域 $S=\{\lambda:\text{Re}\lambda\in I\}$ 中 $1-ce^{-\lambda\tau}\neq 0$，并且一致

有界. 由定理 5.7 有

$$X(t)=\int_{(a)} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

$h^{-1}(\lambda)$可以写成

$$\frac{1}{h(\lambda)}=\frac{1}{\lambda(1-ce^{-\lambda\tau})}+\frac{a+be^{-\lambda\tau}}{\lambda(1-ce^{-\lambda\tau})h(\lambda)}$$

即

$$X(t)=\int_{(a)}\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda(1-ce^{-\lambda\tau})}d\lambda+\int_{(a)}\frac{a+be^{-\lambda\tau}}{\lambda(1-ce^{-\lambda\tau})h(\lambda)}d\lambda$$

上式中第二个积分的核与 $\lambda^{-2}$同阶,故积分绝对收敛⇒有(5.35)形式的估计. 而第一个积分由于 $\lambda^{-1}(1-ce^{-\lambda\tau})^{-1}$在 $S$ 中解析,并且若 $\lambda=\beta+i\omega,\beta\in I$,则此函数是周期为$\frac{2\pi}{\tau}$的周期函数⇒∃ 绝对收敛的 Fourier 级数使

$$(1-ce^{-\lambda\tau})^{-1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k e^{\lambda k\tau}\quad \lambda\in S$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_k|e^{\beta k\tau}<\infty,\beta\in I$$

所以若 $t>0,t+k\tau\neq 0$,则

$$\int_{(a)}\frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda(1-ce^{-\lambda\tau})}d\lambda=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\int_{(a)}e^{\lambda(t+k\tau)}\frac{1}{\lambda}d\lambda=\sum_{a(t+k\tau)>0}h_k$$

最后有

$$\left|\sum_{a(t+k\tau)>0}h_k\right|\leqslant e^{at}\sum_{a(t+k\tau)>0}|h_k|e^{ak\tau}\leqslant e^{at}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_k|e^{ak\tau}$$

于是定理的前半部分成立. 定理的第二部分即(5.35)第二式关于 $X(t)$变差的估计式. 注意到方程(5.16)的一个性质:除了点 $K\tau,K=0,1,\cdots$以外,$X$ 存在且满足方程

$$\dot{X}(t)-c\dot{X}(t-\tau)=aX(t)+bX(t-\tau)\tag{5.36}$$

记 $y(t)=\dot{X}(t),P(t)=aX(t)+bX(t-\tau)$,则(5.36)为

$$y(t)-cy(t-\tau)=P(t)\tag{5.37}$$

由定理5.7⇒(5.36)解有指数估计，即∃ $M=\text{const.}$ 使得 $|P(t)|\leqslant Me^{\alpha t}$，再记 $y(t)=Z(t)e^{\alpha t}$，$q(t)=P(t)e^{-\alpha t}$，则(5.37)为

$$Z(t)-\hat{c}Z(t-\tau)=q(t) \tag{5.38}$$

选择 $\alpha$ 适当大使 $|\hat{c}|=|ce^{-\alpha\tau}|<1$，并且 $|q(t)|$ 是有界的. 对∀ $\varphi(\theta)\in C([-1,0],R)$，我们用迭代法求解(5.38)，记 $Z_0(t)=\varphi(t)$，$t\in[-1,0]$，定义序列 $Z_n(t)$ 为

$$Z_n(t)=\hat{c}Z_{n-1}(t)+q(t)=\hat{c}^nZ_0(t)+q(1+q+\cdots+q^n)$$

即 $Z_n(t)\leqslant|\hat{c}|^n|\varphi|+M\dfrac{1-|\hat{c}|^n}{1-|\hat{c}|}\Rightarrow Z(t)\leqslant\dfrac{M}{1-|\hat{c}|}\triangleq K_1\Rightarrow\dot{x}(t)\leqslant K_1e^{\alpha t}\Rightarrow$ 对∀ $t_1,t_2\in[t-\tau,t]$ 成立

$$|X(t_1)-X(t_2)|\leqslant\dot{X}(\xi)|t_1-t_2|\quad \xi\in[t-\tau,t]$$

$\Rightarrow\overset{t}{\underset{t-\tau}{\mathrm{V}}}X\leqslant K_1\tau e^{\alpha t}$，证毕.

由此推出(5.16)的所有解都有精确指数估计.

**注** 5.1　定理5.7和定理5.8表明，方程(5.15)和(5.16)，当它们的特征根上确界 $\alpha_0<0$ 时可以保证零解是一致渐近稳定的.

## §6　伴随方程

### 1. 常微分方程的导引

设 $x\in R^n$，$y,z\in R^n$，$A(t)$ 为 $n\times n$ 函数阵，考虑系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x \tag{6.1}$$

$$\dot{y}(t)=A(t)y+\omega\quad \omega\in R^n,\ y(0)=c \tag{6.2}$$

设 $X(t)$ 为(6.1)的基础解阵，满足

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)\quad X(0)=I(\text{单位阵}) \tag{6.3}$$

用常数变易法，令 $y(t)=X(t)Z(t)$. 这里 $Z(t)$ 是待定的，代入(6.2)得

$$\dot{X}(t)Z(t)+X(t)\dot{Z}(t)=A(t)X(t)Z(t)+\omega(t)$$

由此直接推出

$$Z(t)=X^{-1}(t)\omega(t),\text{或 } Z(t)=c+\int_0^t X^{-1}(s)\omega(s)ds$$

$$y(t)=X(t)c+\int_0^t X(t)X^{-1}(s)\omega(s)ds \tag{6.4}$$

为了使(6.4)不明显地用逆阵表示，我们改用下述方法：改记(6.2)为

$$\dot{Z}(t)=A(t)Z(t)+\omega(t) \quad Z(0)=0 \quad t>0 \tag{6.5}$$

用阵 $Y$ 乘(6.5)两边，并从 0 到 $t$ 积分得

$$\int_0^t Y(s)\dot{Z}(s)ds=\int_0^t Y(s)A(s)Z(s)ds+\int_0^t Y(s)\omega(s)ds,t>0 \tag{6.6}$$

用分部积分法有

$$Y(t)Z(t)=\int_0^t [\dot{Y}(s)+Y(s)A(s)]Z(s)ds+\int_0^t Y(s)\omega(s)ds \tag{6.7}$$

为简化(6.6)令 $Y(t)$ 满足方程

$$\dot{Y}(s)+Y(s)A(s)=0 \qquad 0\leqslant s\leqslant t \tag{6.8}$$

为避免使用逆阵，进一步要求

$$Y(t)=I \tag{6.9}$$

只要 $A(t)$ 连续或可积，则对 $t\geqslant s\geqslant 0$(6.8)存在唯一的解 $Y(s)$ 满足(6.9)，对这样的 $Y(s)$，由(6.7)有

$$Z(t)=\int_0^t Y^{-1}(t)Y(s)\omega(s)ds \tag{6.10}$$

**定义** 6.1 (6.1)与(6.8)互称为相伴随的系统. 更多的场合称(6.8)为(6.1)的伴随方程.

上述确立伴随方程的过程中看出，$Y$ 实际上可视为 $t,s$ 的二元函数，它由(6.8)(6.9)确定，即它所满足的方程与解表示为

$$\frac{\partial Y(s,t)}{\partial s}=-Y(s,t)A(s) \qquad 0\leqslant s\leqslant t \tag{6.11}$$

$$Y(t,t)=I \tag{6.12}$$

$$Z(t)=\int_0^t Y(s,t)\omega(s)ds \qquad t>0 \tag{6.13}$$

若 $X(t)$是(6.8)的唯一解，则 $Y(s,t)=X(t)X^{-1}(s)$.

### 2. RDDE 的伴随方程

为了简化核中变元的记法，我们视 $t_0-\tau$ 为 $t_0$，方程的基准变元记为 $t+\tau$，此时考虑线性一阶 RDDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t+\tau)+a(t)x(t+\tau)+b(t)x(t)=\omega(t) & t\geq t_0\\ x(t)=\varphi(t) & t\in[t_0,t_0+\tau]\end{cases} \tag{6.14}$$

其中 $\varphi(t)$在$[t_0,t_0+\tau]$中连续，$a(t)$，$b(t)$，$f(t)$当 $t\geq t_0$ 时连续(或可积). 现在设 $\varphi=0$ 要求(6.14)的形如(6.13)的解. 类似地引入可积函数 $u(s,t)$，用这一待定函数乘方程(6.14)的两边，关于 $s$ 从 $t_0$ 到 $t$ 积分之得

$$\int_{t_0}^t u(s,t)\dot{x}(s+\tau)ds+\int_{t_0}^t u(s,t)[a(s)x(s+\tau)+b(s)x(s)]ds$$

$$=\int_{t_0}^t \omega(s)u(s,t)ds \tag{6.15}$$

上式左边第一个积分用分部积分法，注意 $\varphi=0$，有

$$u(s,t)x(s+\tau)\Big|_{t_0}^t-\int_{t_0}^t\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}x(s+\tau)ds$$

$$=u(t,t)x(t+\tau)-\int_{t_0}^t\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}x(s+\tau)ds$$

由 $s\in[t_0,t_0+\tau]$时 $x(s)=\varphi=0$，须作如下改写

$$\int_{t_0}^t b(s)u(s,t)x(s)ds=\int_{t_0}^{t-\tau}u(s+\tau,t)b(s+t)x(s+\tau)ds$$

这样一来(6.15)可改写为

$$u(t,t)x(s+\tau)+\int_{t_0}^{t-\tau}[\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+b(s+\tau)u(s+\tau,t)$$
$$+a(s)u(s,t)]x(s+\tau)ds+\int_{t-\tau}^{t}[\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+u(s,t)a(s)]$$
$$\cdot x(s+\tau)ds=\int_{t_0}^{t}u(s,t)\omega(s)ds \quad t\geqslant t_0 \tag{6.16}$$

我们要求 $u(s,t)$ 满足伴随方程

$$\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+u(s+\tau,t)b(s+\tau)+u(s,t)a(s)=0$$
$$t\geqslant t_0+\tau,t_0<s<t-\tau \tag{6.17}$$

而且满足

$$\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+u(s,t)a(s)=0 \qquad t-\tau<s<t$$
$$u(s,t)=0,\text{当 } s=t \text{ 时} \tag{6.18}$$

此时由(6.16)有

$$x(t+\tau)=\int_{t_0}^{t}u(s,t)\omega(s)ds \quad t>t_0 \tag{6.19}$$

又由(6.18)积分可以确定 $u(s,t)$ 为

$$u(s,t)=\exp\int_s^t a(s_1)ds_1 \quad t-\tau\leqslant s\leqslant t \tag{6.20}$$

在$[t_0,t-\tau]$上由于(6.17)的沿负向求解相当于 RDDE，所以当 $t\geqslant t_0$ 时满足的(6.17)(6.18)的 $u(s,t)$ 存在唯一.

现在考虑 RDDE 为线性多滞量方程组的情形，设 $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m$，$x\in R^n$，$f\in R^n$，$A_i$ 为 $n\times n$ 阵，对 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t+\tau_m)+\sum_{i=0}^{m}A_i(t)x(t+\tau_i)=f(t),t>t_0 \tag{6.21}$$
$$x(t)=\varphi(t) \quad t\in[t_0,t_0+\tau_m]$$

可以用类似的办法求 $x(t)=\varphi(t)=0$，$t\in[t_0,t_0+\tau_m]$时的解.当 $t>t_0+\tau_m$ 时 $A_i(t)$，$f(t)$连续$\Rightarrow\dot{x}(t)$连续，且设矩阵函数 $u(s,t)$定义在

$t>t_0, s\in[t_0,t_0+\tau_m]$上，当 $s\in[t_0,t]$时关于 $s$ 连续，满足条件

$$\begin{aligned} &u(s,t)=0 \quad s\in[t,t+\tau_m] \\ &u(t,t)=1 \quad s=t \end{aligned} \tag{6.22}$$

定义伴随方程为

$$\begin{cases} \dfrac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+\sum_{i=0}^{m}u(s+r_i,t)A_i(s+r_i)=0 \\ r_i=\tau_m-\tau_i \quad t>t_0, s\in(t_0,t) \end{cases} \tag{6.23}$$

上式中当 $s\in(t_0,t)$时，点 $s=t-r_i(i=0,1,\cdots,m)$处的导数定义为右导数. 同样可沿负向求解得唯一的 $u(s,t)$.

**注** 6.1　$u(s,t)$不仅在 $s\in[t_0,t]$上有定义而且在 $s\in(t,t+\tau_m]$上由(6.22)定义(这本质上并不需要，这里仅仅为了简化). 我们把类似的结果写成定理：

**定理** 6.1　设 $t>t_0$ 时 $f(t), A_i(t)(i=0,1,\cdots,m)$都是连续的，$u(s,t)$是由(6.23)确定的矩阵函数，则(6.21)满足初始条件

$$x(t)=\varphi(t)=0 \qquad t\in[t_0,t_0+\tau_m]$$

的唯一连续解可表示为

$$x(t+\tau_m)=\int_{t_0}^{t}u(s,t)f(s)ds \quad t>t_0 \tag{6.24}$$

**证**　用 $u(s,t)$乘(6.21)并从 $t_0$ 到 $t$ 关于 $s$ 积分，注意到 $\dfrac{\partial u(s,t)}{\partial s}$关于 $s$ 是分段连续，$u(s,t)$关于 $s$ 是连续的，用分部积分法有

$$\begin{aligned} &u(t,t)x(t+\tau_m)-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}x(s+\tau_m)ds \\ &+\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0}^{t}u(s,t)A_i(s)x(s+\tau_m)ds=\int_{t_0}^{t}u(s,t)f(s)ds \end{aligned} \tag{6.25}$$

由于 $s\in[t_0,t_0+\tau_m]$时 $x(s)=0$，故

$$\int_{t_0}^{t}u(s,t)A_i(s)x(s+\tau_m)ds=\int_{t_0+r_i}^{t}u(s,t)A_i(s)x(s+\tau_m)ds$$

$$=\int_{t_0+r_i}^{t-r_i} u(s+r_i,t)A_i(s+r_i)x(s+\tau_i)ds \quad (i=0,1,\cdots,m) \qquad (6.26)$$

由得出与(6.18)类似的公式⇒(6.26)中$\int_{t_0}^{t-r_i}\cdot=\int_{t_0}^{t}\cdot$故(6.25)为

$$x(t+\tau_m)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}+\sum_{i=0}^{m}u(s+r_i,t)A_i(s+r_i)\right]$$

$$\cdot x(s+\tau_m)ds=\int_{t_0}^{t}u(s,t)f(s)ds$$

$$(6.27)$$

由于 $u(s,t)$满足(6.23)⇒定理成立.

现在给出定理 6.1 在稳定性方面的一个应用:

**定理** 6.2 设 $A_i(t),B_i(t)(i=0,1,\cdots,m)$当 $t>t_0$ 时连续，则方程

$$\dot{x}(t+\tau_m)+\sum_{i=0}^{m}[A_i(t)+B_i(t)]x(t+\tau_i)=0 \quad t>t_0$$

$$(6.28)$$

的一切连续解当 $t\to\infty$时为有界的充分条件为

(1)无扰动方程

$$\dot{x}(t+\tau_m)+\sum_{i=0}^{m}A_i(t)x(t+\tau_i)=0 \qquad (6.29)$$

的所有连续解当 $t\to\infty$时有界.

(2)$\int_{t_0}^{\infty}\|B_i\|dt<\infty \quad (i=0,1,\cdots,m)$

(3)$\|u(s,t)\|<C_1=\text{const}.\ t\geqslant t_0,s\in[t_0,t]$

其中 $u(s,t)$是由(6.23)和(6.22)确定的函数.

**证** (6.28)中记

$$-\sum_{i=0}^{m}B_i(t)x(t+\tau_i)\overset{\text{def}}{=}f(t)$$

便可写成(6.21)形式,设 $y(t+\tau_m)$为(6.29)的一个解,那末由线性

叠加原理及定理 6.1,(6.28)的解可以写成

$$x(t+\tau_m)=y(t+\tau_m)-\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0}^{t}u(s,t)B_i(s)x(s+\tau_i)ds \tag{6.30}$$

其中 $t>t_0$,由条件(1)(3)有 $|y(t+\tau_m)|\leqslant C_0$ 及

$$|x(t+\tau_m)|\leqslant C_0+C_1\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0}^{t}\|B_i(s)\|\ |x(s+\tau_i)|ds$$

$$\leqslant C_0+C_1\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0-r_i}^{t-r_i}\|B_i(s+r_i)\|\ |x(s+\tau_i)|ds$$

用 Gronwall 不等式得

$$|x(t+\tau_m)|\leqslant C_0\exp\left[C_1\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0-r_i}^{t-r_i}\|B_i(s+r_i)\|ds\right] \tag{6.31}$$

再由(2)⇒定理结论成立.

### 3. NDDE 的伴随方程

考虑一阶系统的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t+\tau)+a(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t)+c(t)x(t+\tau)=f(t)\\ x(t)=\varphi(t)\quad t\in[t_0,t_0+\tau]\end{cases} \tag{6.32}$$

其中设 $\varphi(t)$ 及 $\dot{\varphi}(t)$ 在 $[t_0,t_0+\tau]$ 上连续,$a(t)$,$b(t)$,$f(t)$ 当 $t\geqslant t_0$ 是连续的($\dot{\varphi}(t)$ 在 $t_0$ 及 $t_0+\tau$ 处视为单侧导数),如第一章所述,$\dot{\varphi}(t)$ 除 $t_0+k\tau(k=0,1,\cdots)$ 外连续.

设 $a(s)$ 连续可微,伴随方程的核 $u(s,t)$ 的定义如下:

函数 $u(s,t)$ 当 $s\in(t_0,t)$,$s\neq t-n\tau(n=0,1,2,\cdots)$ 时满足伴随方程

$$\frac{-\partial u(s,t)}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}[u(s+\tau,t)a(s+\tau)]+u(s+\tau,t)b(s+\tau)$$
$$+u(s,t)c(s)=0 \tag{6.33}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} u(s,t)=0 & s\in(t,t+\tau] \\ u(s,t)=1 & s=t \end{cases} \tag{6.34}$$

并且进一步满足条件：函数

$$u(s,t)+u(s+\tau,t)a(s+\tau) \tag{6.35}$$

当 $s\in[t_0,t]$时是连续的，于是(6.33)沿负向用分步法可求得唯一解 $u(s,t)$，当然$\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}$在 $t,t-\tau,t-2\tau,\cdots$处可能有有限个间断点，同理(6.34)只是为了简化，本质上并不需要 $u(s,t)=0,s\in(t,t+\tau]$.

现在由(6.32)两边乘 $u(s,t)$从 $t_0$ 到 $t$ 关于 $s$ 积分之

$$\int_{t_0}^{t} u(s,t)[\dot{x}(s+\tau)+a(s)\dot{x}(s)]ds+\int_{t_0}^{t} u(s,t)b(s)x(s)ds$$
$$+\int_{t_0}^{t} u(s,t)c(s)x(s+\tau)ds=\int_{t_0}^{t} u(s,t)f(s)ds \tag{6.36}$$

由于每个被积函数都只有有限个第一类间断点，所以它们在 $s\in[t_0,t]$上是有界变差的⇒(6.36)每个积分表达式是 $t$ 的连续函数，故用分部积分法并注意到 $x(t)=0\quad t\in[t_0,t_0+\tau]\quad u(s,t)=0,s\in(t,t+\tau]$有

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s}[u(s,t)+a(s+\tau)u(s+\tau,t)]x(s+\tau)ds$$
$$=x(t+\tau)-\int_{t_0}^{t} [u(s,t)+a(t+z)u(s+\tau,t)]\dot{x}(s+\tau)ds \tag{6.37}$$
$$=x(t+\tau)-\int_{t_0}^{t} u(s,t)[\dot{x}(s+\tau)+a(s)\dot{x}(s)]ds$$

又由(6.34)有

$$\int_{t_0}^{t} u(s,t)b(s)x(s)ds=\int_{t_0}^{t} u(s+\tau,t)b(s+\tau)x(s+\tau)ds \tag{6.38}$$

故(6.36)化为

$$
\begin{aligned}
& x(t+\tau)+\int_{t_0}^{t}\{-\frac{\partial}{\partial s}[u(s,t)+a(s+\tau)u(s+\tau,t)] \\
& +u(s+\tau,t)b(s+\tau)+u(s,t)c(s)\}u(s+\tau)ds \qquad (6.39) \\
& =\int_{t_0}^{t}u(s,t)f(s)ds \quad t>t_0
\end{aligned}
$$

用(6.33)代入即得

$$
x(t+\tau)=\int_{t_0}^{t}f(s)u(s,t)ds \qquad t>t_0 \qquad (6.40)
$$

现在的情形与 RDDE 不同，为了给出解的稳定性的充分准则还需要估计 $x(s+\tau)$. 若 $u(s,t)$关于 $t$ 连续可微，则由(6.40)可直接得出

$$
\dot{x}(s+\tau)=f(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}f(s)ds \qquad (6.41)
$$

但实际上$\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}$在诸点 $t-n\tau$ 处通常是不连续的，于是(6.41)要修正如下：

由于 $f(s)$当 $s\in[t_0,t]$, $s=t_0+n\tau(n=0,1,\cdots)$时连续，而 $u(s,t)$当 $s\in[t_0,t]$, $s\neq t-n\tau(n=0,1,\cdots)$时连续. 只要 $t-t_0$ 不是 $\tau$ 的倍数，则点集$\{t_0+n\tau\}$与$\{t-n\tau\}$是互相交错的，且(6.40)可记为

$$
x(t+\tau)=
$$

$$
\left(\int_{t_0}^{t_0-N\tau}+\int_{t-N\tau}^{t_0+\tau}+\int_{t_0+\tau}^{t-(N-1)\tau}+\cdots+\int_{t-\tau}^{t_0+N\tau}+\int_{t_0+N\tau}^{t}\right)u(s,t)f(s)ds \qquad (6.42)
$$

其中 $N$ 选得使 $t\geq t_0+N\tau>t-\tau$. 由式

$$
\int_{t_0+j\tau}^{t-j\tau}u(s,t)f(s)ds \text{ 或} \int_{t-j\tau}^{t_0+j\tau}u(s,t)f(s)ds
$$

对 $t$ 求导数分别有

$$u(t+i\tau,t)f(t+i\tau)+\int_{t_0+j\tau}^{t+i\tau}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}f(s)ds$$

$$-u(t+i\tau,t)f(t+i\tau)+\int_{t_0+i\tau}^{t+j\tau}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}f(s)ds$$

其中 $i,j$ 是(6.42)中出现的整数. 所以由(6.42)两边关于 $t$ 求导数得到

$$\dot{x}(t+\tau)=$$

$$\left(\int_{t_0}^{t-N\tau}+\int_{t-N\tau}^{t_0+\tau}+\int_{t_0+\tau}^{t-(N-1)\tau}+\cdots+\int_{t-\tau}^{t_0+N\tau}+\int_{t_0+N\tau}^{t}\right)\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}f(s)ds$$

$$+f(t)-\sum_{n=1}^{N}f(t-n\tau)[u(t-n\tau+0,t)-u(t-n\tau-0,t)]$$

$$=f(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}f(s)ds$$

$$-\sum_{n=1}^{N}f(t-n\tau)[u(t-n\tau+0,t)-u(t-n\tau-0,t)]$$

$$t>t_0,t\neq t_0+k\tau,k=1,2\cdots \tag{6.43}$$

**注** 6.2 对$\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}$的存在性和连续性应当作点说明，方法与证明与下一章类似(参看[4]第10章).

**定理** 6.3 设 $a(t),a_1(t),b(t),b_1(t),c(t),c_1(t)$当 $t\geqslant t_0$ 时连续，且 $a(t)$当 $t>t_0$ 时有连续导数，则方程

$$\dot{x}(t+\tau)+[a(t)+a_1(t)]\dot{x}(t)+[b(t)+b_1(t)]x(t)$$
$$+[c(t)+c_1(t)]x(t+\tau)\quad t\geqslant t_0 \tag{6.44}$$

的所有连续解当 $t\to\infty$时为有界的一个充分条件是

(1)$\dot{x}(t+\tau)+a(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t)+c(t)x(t+\tau)=0$ 的连续解当 $t\to\infty$时是有界的.

(2)$t\to\infty$时 $a_1(t),b_1(t),c_1(t)\to 0$.

(3) $\int^{\infty}(|a_1(t)|+|b_1(t)|+|c_1(t)|)dt<\infty$.

(4) $|u(s,t)|\leqslant k_0\left|\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\right|\leqslant k_0=\text{const}.\ t>t_0, s\in[t_0,t]$

且 $t-t_0\neq n\tau,(n=0,1,2,\cdots)$.

其中 $u(s,t)$ 是由方程(6.33)决定的二元函数.

**证** 设 $y(t+\tau)$ 是条件(1)中齐次方程的解,记

$$f(t)=-a_1(t)\dot{x}(t)-b_1(t)x(t)-c_1(t)x(t+\tau)$$

由(6.40)⇒(6.44)的通解为

$$x(t+\tau)=y(t+\tau)+\int_{t_0}^{t}u(s,t)f(s)ds \tag{6.45}$$

故(6.44)写成积分方程为

$$x(t+\tau)=y(t+\tau)-\int_{t_0}^{t}u(s,t)[a_1(s)\dot{x}(s)+b_1(s)x(s)+c_1(s)x(s+\tau)]ds \tag{6.46}$$

又由(6.43)有

$$\begin{aligned}\dot{x}(t+\tau)=&-a_1(t)\dot{x}(t)-b_1(t)x(t)-c_1(t)x(t+\tau)+\dot{y}(t+\tau)\\&-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}[a_1(s)\dot{x}(s)+b_1(s)x(s)+c_1(s)x(s+\tau)]ds\\&+\sum_{n=1}^{N}[a_1(t-n\tau)\dot{x}(t-n\tau)+b_1(t-n\tau)x(t-n\tau)\\&+c_1(t-n\tau)x(t-n\tau+\tau)][u(t-n\tau+0,t)-u(t-n\tau-0,t)]\\&\qquad t>t_0, t\neq t_0+k\tau, k=1,2\cdots\end{aligned} \tag{6.47}$$

这里 $N$ 是使 $t-N\tau>t_0$ 成立的最大整数.

由定理条件(4)有

$$|x(t+\tau)|\leqslant|y(t+\tau)|+K_0\int_{t_0}^{t}|a_1(s)\dot{x}(s)+b_1(s)x(s)$$

$$+c_1(s)x(s+\tau)|ds$$

$$|\dot{x}(t+\tau)|\leqslant|\dot{y}(t+\tau)|+|a_1(t)\dot{x}(t)+b_1(t)x(t)+c_1(t)x(t+\tau)$$

$$+K_0\int_{t_0}^{t}|a_1(s)\dot{x}(s)+b_1(s)x(s)+c_1(s)x(s+\tau)|ds$$

$$+2K_0\sum_{n=1}^{N}|a_1(t-n\tau)\dot{x}(t-n\tau)+b_1(t-n\tau)x(t-n\tau)$$

$$+c_1(t-n\tau)x(t-n\tau-\tau)|\quad(t>t_0,t\neq t_0+k\tau,k=1,2\cdots)$$

由条件(3)⇒存在函数 $g(t)\to0,t\to\infty$ 且满足条件

$$g(t)\geqslant\max(|a_1(t)|,|b_1(t)|,|c_1(t-\tau)|,|c_1(t)|)$$

对∀ $t>t_0$ 成立，而且有 $\int^{\infty}g(s)ds<\infty$，由 $y$ 和 $\dot{y}$ 的有界性有

$$|x(t+\tau)|\leqslant K_1+K_0\int_{t_0}^{t}g(s)(|x(s)+\dot{x}(s)|)ds$$

$$+K_0\int_{t_0}^{t+\tau}g(s)|x(s)|ds,t>t_0$$

$$|\dot{x}(t+\tau)|\leqslant K_1+g(t)(|x(t)|+|\dot{x}(t)|)+g(t)(|x(t+\tau)|$$

$$+K_0\int_{t_0}^{t}g(s)(|x(s)+\dot{x}(s)|)ds+K_0\int_{t_0}^{t+\tau}g(s)|x(s)|ds$$

$$+4K_0\sum_{n=0}^{N}g(t-n\tau)[|\dot{x}(t-n\tau)|+|x(t-n\tau)|]\tag{6.48}$$

$$t>t_0,t\neq t_0+k\tau,k=1,2\cdots$$

记 $\|x(t)\|=|\dot{x}(t)|+|x(t)|$，并取 $t_0$ 充分大，则综合上述各式有

$$\begin{aligned}\|x(t+\tau)\|\leqslant K_3+K_2\int_{t_0}^{t+\tau}g(s)\|x(s)\|ds\\+K_3\sum_{n=0}^{N}g(t-n\tau)\|x(t-n\tau)\|\end{aligned}\tag{6.49}$$

设 $x_1(t)=\max\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|x(s)\|$，则 $x_1(t)$ 是单调增加的，故有

$$\sum_{n=0}^{N} g(t-n\tau)\| x(t-n\tau)\| \leqslant \sum_{n=0}^{N} g(t-n\tau)x_1(t-n\tau)$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{N}\int_{t-n\tau}^{t-(n-1)\tau} g(s_1-\tau)x_1(s_1)ds_1 \tag{6.50}$$

其中最后一个不等式是因为 $g(t)\searrow$，$x_1(t)\nearrow$，故

$$\frac{1}{\tau}\int_{t-n\tau}^{t-n\tau+\tau} g(s_1-\tau)x_1(s_1)ds_1 \geqslant g(t-n\tau-\tau)x_1(t-n\tau+\tau)$$

$$\geqslant g(t-n\tau)x_1(t-n\tau+\tau) \geqslant g(t-n\tau)x_1(t-n\tau)$$

由(6.50)及(6.49)有

$$\| x(t+\tau)\| \leqslant K_3+K_2\int_{t_0}^{t+\tau} g(s)x_1(s)ds$$

$$+\frac{K_3}{\tau}\int_{t_0}^{t+h} g(s_1-h)x_1(s_1)ds_1$$

或者

$$x_1(t+\tau) \leqslant K_3+K_4\int_{t_0}^{t+\tau} g(s-\tau)x_1(s)ds \tag{6.51}$$

由 Gronwall 不等式，有

$$x_1(t+\tau) \leqslant K_3\exp(K_4\int_{t_0}^{t+\tau} g(s-\tau)ds) \tag{6.52}$$

$\Rightarrow x_1(t)$有界．定理证毕.

对中立型方程组不难推出类似定理.

关于线性 DDE 的稳定性理论、振动性与渐近性、周期解与概周期解的存在性等等将在相应各章阐述.

# 第三章

# 线性 FDE

本章阐述的线性 FDE 基本性质是上一章关于 DDE 相应结果的直接推广.

## §1 线性性质与整体存在定理

### 1. 线性性质

记$\sigma$为初始时刻,取$E_\sigma=[\sigma-r,\sigma]$,初始函数为$\varphi(\theta),\theta\in[-r,0]$,$L_1^{loc}([\sigma,\infty),R^n)$是$[\sigma,\infty)$上局部 Lebesque 可积向量函数全体构成的空间,算子 $L(t,\varphi):R\times C\rightarrow R^n$ 关于 $\varphi$ 是线性的,则线性 FDE 的齐次与非齐次形式为

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t) \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+h(t) \tag{1.2}$$

其中 $\dot{x}$ 是右导数,$h\in L_1^{loc}([\sigma,\infty),R^n)$.

(1.2)过$(\sigma,\varphi)\in R\times C$ 的初值问题等价于积分方程

$$x(t)=\varphi(0)+\int_\sigma^t L(s,x_s)ds+\int_\sigma^t h(s)ds,\ x_\sigma=\varphi,t\geqslant\sigma \tag{1.3}$$

若 $x_1(t,\sigma,\varphi_1)$,$x_2(t,\sigma,\varphi_2)$分别为(1.1)过$(\sigma,\varphi_1)$,$(\sigma,\varphi_2)$的解,$\alpha,\beta\in R$,则 $x(t)=\alpha x_1+\beta x_2$ 是(1.1)过$(\sigma,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)$的解. 若 $\hat{x}(t,\sigma,\hat{\varphi})$是(1.2)过$(\sigma,\hat{\varphi})$的解,则 $\alpha x_1+\beta x_2+\hat{x}$ 是(1.2)的解,凡此等等,可以验证第二章 §1 中指出的性质①～⑥对方程(1.1)(1.2)

仍成立.

对线性算子 $L(t,\varphi)$，由 Riese 表示定理存在满足第一章 §4 中的基本假定的 $n\times n$ 阵函数 $R(t,\theta)$ 和 $m(t)\in L_1^{loc}(R,R)$，使对 $\forall\, t\in R,\varphi\in C$ 有

$$L(t,\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta R(t,\theta)]\varphi(\theta) \tag{1.4}$$

$$|L(t,\varphi)|\leqslant m(t)|\varphi| \tag{1.5}$$

后文需要扩展 $R(t,\theta)$ 关于 $\theta$ 的定义范围——$\theta\in R$，用 $\eta(t,\theta)$ 表示之

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\geqslant 0\\ R(t,\theta) & \theta\in(-r,0)\\ R(t,-r) & \theta\leqslant -r\end{cases}$$

显然，$\underset{[-r,0]}{\mathrm{Var}}\,\eta(t,\cdot)\leqslant m(t)$.

(1.2)的经典形式中最典型的方程是

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k x(t-\omega_k)+\int_{-r}^{0}A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta+h(t) \tag{1.6}$$

其中 $A(t,\theta)$ 对每一个 $t$ 关于 $\theta$ 是可积的，且存在函数 $a(t)\in L_1^{loc}(R,R)$ 使得

$$\left|\int_{-r}^{0}A(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta\right|\leqslant a(t)|\varphi|$$

对 $\forall\, t\in R,\varphi\in C$ 成立.

方程(1.6)是(1.2)最典型的特例，由于其中有分布时滞的项，它不是 DDE，但第二章的有关结论基本上都可以推广到(1.6)上去.

## 2. 解的指数估计

设系统(1.2)中 $L(t,\varphi)$ 满足条件(1.5)，则由(1.2)对应的积分方程(1.3)有如下估计

$$|x(t)|\leqslant|\varphi(0)|+\int_{\sigma}^{t}|L(t,x_t)|+\int_{\sigma}^{t}|h(s)|ds,t\in[\sigma,b)$$

由 $|\varphi(0)|\leqslant|\varphi|=\sup\limits_{\theta\in[-r,0)}|\varphi(\theta)|$ 及(1.5)有

$$|x_t|\leqslant|\varphi|+\int_{\sigma}^{t}|m(s)|x_t|ds+\int_{\sigma}^{t}|h(s)|ds$$

由 Gronwall 不等式有

$$|x_t|\leqslant[|\varphi|+\int_{\sigma}^{t}|h(s)|ds]\exp\int_{\sigma}^{t}m(s)ds \tag{1.7}$$

若 $h\equiv0$，则(1.1)的解有估式

$$|x_t|\leqslant|\varphi|\exp\int_{\sigma}^{t}m(s)ds \tag{1.7$_0$}$$

所以(1.1)(1.2)可以施行 Laplace 变换，倘若 $L$ 是自治算子的话.

### 3. 解的整体存在定理

这里给出的整体存在定理适用于 $L(t,\varphi)$ 连续或者满足 Caratheodory 条件的广泛情形.

**定义** 1.1　设 $\Omega\subseteq R\times C$ 是开集．$f:\Omega\to R^n$ 称为在 $\Omega$ 上满足 Caratheodory 条件，若(1) $f(t,\varphi)$ 对每个固定的 $\varphi$ 关于 $t$ 可测，对每个固定的 $t$ 关于 $\varphi$ 连续，(2)对任意给定的 $(t,\varphi)\in\Omega$，存在 $(t,\varphi)$ 的邻域 $V(t,\varphi)$ 和 Lebesque 可积函数 $m$ 使

$|f(s,\psi)|\leqslant m(s),(s,\psi)\in V(t,\varphi)$

若 $f(t,\varphi)$ 连续，则 $f$ 必定满足 Caratheodory 条件，对线性算子 $L(t,\varphi)$，如果(1.5)成立，则 $L(t,\varphi)$ 满足 Caratheodory 条件.

由(1.4)把(1.2)的 Cauchy 问题改写成

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta)+h(t)\\&x(t)=\varphi(t),t\in[\sigma-r,\sigma]\end{aligned} \tag{1.8}$$

相应的积分方程为

$$x(t)=\varphi(0)+\int_{\sigma}^{t}\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(s,\theta)]x(s+\theta)+h(s)]ds \tag{1.9}$$

$$x(t)=\varphi(t),t\in[\sigma-r,\sigma]$$

为方便计称 $\eta(t,\theta)$ 所满足的第一章 § 4 的全部条件为：条件 $(\eta c)$，不必费力论证便可肯定我们的问题可以化为(1.9)的存在唯一性问题. 首先有

**引理 1.1** 若 $x_1(t)$ 在 $R$ 上连续，则

$$x(t)=\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(t,\theta)]x_1(t+\theta) \tag{1.10}$$

在 $R$ 上连续.

**证** 对每一 $t'$ 和 $\theta$，由(1.10)有

$$|x(t)-x(t')|\leqslant\left|\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(t,\theta)]x_1(t+\theta)-\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(t',\theta)]x_1(t'+\theta)\right|+\left|\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(t,\theta)](x_1(t+\theta)-x_1(t'+\theta))\right| \tag{1.11}$$

由于 $\eta(t,\theta)$ 满足条件 $(\eta c)$，则由算子 $L(t,\varphi)$ 当 $t\to t'$ 时弱收敛和 $x_1(t)$ 的连续性推出(1.11)右边两项都趋于零，引理成立.

**定理 1.1** 若 $\eta(t,\theta)$ 满足条件 $(\eta c)$，(1.9)过 $(\sigma,\varphi)$ 的解在 $[\sigma,\infty)$ 上存在且唯一.

**证** 先证存在性，在 $[\sigma,\infty)$ 上作逼近序列

$$x^0(t)=\varphi(\sigma)$$

$$x^{k+1}(t)=\varphi(\sigma)+\int_{\sigma}^{t}\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(s,\theta)]x^k(s+\theta)ds+\int_{\sigma}^{t}h(s)ds \tag{1.12}$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots$$

其中 $x^k(t+\theta)=\varphi(t+\theta),\theta\in[-r,0]$. 由引理 1.1 推出诸 $x^k(t)$ 在 $[\sigma,\infty)$ 上都是连续的.

下证对每一固定的 $b\in[\sigma,\infty)$，序列 $x^k$ 在区间 $[\sigma,b]$ 上一致收敛. 事实上对一切 $k$ 有

$$|x^{k+1}(t)-x^k(t)|=\left|\int_\sigma^t\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)][x^k(s+\theta)\right.$$

$$\left.-x^{k-1}(s+\theta)]ds\right|\leqslant\int_\sigma^t\left|\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)][x^k(s+\theta)-x^{k-1}(s+\theta)]\right|ds \tag{1.13}$$

记 $v(t)$是 $\eta(t,\theta)$在$[-r,0]$上的全变差，当 $t$ 在区间$[\sigma,b]$上时，令 $\omega=\sup\limits_{t\in[\sigma,b]}v(t)$，且

$$\begin{aligned}&\alpha^k(t)=\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^{k-1}(s)|\\&t\in[\sigma,\infty),k=1,2,\cdots\cdots\end{aligned} \tag{1.14}$$

故(1.13)有

$$\begin{aligned}&|x^{k+1}(t)-x^k(t)|\leqslant\int_\sigma^t\alpha^k(s)v(s)ds\\&\alpha^{k+1}(t)=\sup_{s\in[\sigma,t]}|x^{k+1}(s)-x^k(s)|\leqslant\omega\int_\sigma^t\alpha^k(s)ds\end{aligned} \tag{1.15}$$

记 $l=\sup\limits_{[\sigma,b]}|h(t)|,g=\sup\limits_{[\sigma-r,\sigma]}|\varphi(\theta)|$，则在$[\sigma,b]$上有

$$|x^1(t)-x^0(t)|\leqslant(g\omega+l)(t-\sigma)$$

即

$$\alpha^1(t)\leqslant(g\omega+l)(t-\sigma),t\in[\sigma,b]$$

用归纳法可得

$$\alpha^k(t)\leqslant(g\omega+l)\omega^{k-1}\frac{(t-\sigma)^k}{k!},k=1,2,\cdots,t\in[\sigma,b]$$

由此得出级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x^k(t)-x^{k-1}(t)]$为收敛级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(g\omega+l)(b-\sigma)\frac{\omega^{k-1}(b-\sigma)^{k-1}}{k!}$$

为优级数，由于它的收敛性 $x^k(t)$在$[\sigma,b]$上一致收敛. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k(t)=x(t),x(t)=\varphi(t),t\in[\sigma-r,\sigma]$，我们有

$$|x(t)-\varphi(\sigma)-\int_\sigma^t\int_{-r}^0[d_\theta R(s,\theta)]x(s+\theta)ds-\int_\sigma^t h(s)ds|$$

$$\leqslant|x(t)-x^{k+1}(t)|+\int_\sigma^t|\int_{-r}^0[d_\theta R(s,\theta)][x^k(s+\theta)-x(s+\theta)|ds$$

$$\leqslant|x(t)-x^{k+1}(t)|+\int_\sigma^t\sup_{\sigma s\in[\sigma,t]}|x^k(s)-x(s)|v(s)ds \tag{1.16}$$

对每个 $t\in[\sigma,b]$，$k\to\infty$时(1.16)右边两个被加项都趋于零，由于 $b$ 是任意的，解在$[\sigma,\infty)$上存在. 唯一性的证明作为练习.

现在推广定理 1.1：若方程(1.2)中 $L(t,\varphi)$满足 Caratheodory 条件，$h\in L_1^{loc}(R,R)$，则过$(\sigma,R)$的解存在且唯一.

这里指的是广义解的存在性，即：存在 $x(t)\in C([\sigma-r,\infty),R^n)$，$x_\sigma=\varphi$，$x(t)$在$[\sigma,\infty)$上绝对连续且几乎处处满足(1.2).

## §2 线性 FDE 解的指数型衰减

**定义 2.1** $R_+$上的函数 $x(t)$叫做是"趋于零的速度快于任何指数函数"，如果对$\forall\ k\in R$，$x(t)e^{kt}\to0$，当 $t\to\infty$.

对线性常微分方程已知有如下结论：线性自治系统、线性周期系统、有界系数的线性非自治系统都不可能出现解趋于零的速度快于任何指数函数的情形. 对线性自治 FDE 这个结论保持成立，但对周期及有界系数的线性自治 FDE 则有反例.

**例 1** 考虑线性周期系数 FDE

$$\dot{x}(t)=\sin t\,x(t-2\pi) \tag{2.1}$$

$\mu=e^{2\pi\lambda}$为特征乘子的充要条件是 $\lambda=0\Rightarrow\mu=1$，因而有一基本解 $e^{-\cos t}=P(t)$. 若(2.1)的任一解在由 $\mu=1$ 所决定的子空间 $E_\mu$ 上的投影为零，则必对应 $T(\sigma+2\pi,\sigma)$的谱的零元，此时解 $x_t(0,\varphi-P\varphi)\to0$，$t\to\infty$快于任何指数函数.

**例 2** 对有界变系数线性系统

$$\dot{x}(t)=-2te^{(1-2t)}x(t-1) \tag{2.2}$$

它定义在$[-1,\infty)$，有解 $x(t)=e^{-t^2}$，显然此解趋于零的速度快于任何指数函数.

现在讨论自治线性 FDE

$$\dot{x}(t)=L(x_t) \tag{2.3}$$

其中滞量 $r$ 为常数. $L(\varphi):C\to R^n$，且$\exists$ $\eta$ 使

$$L(\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\varphi(\theta) \tag{2.4}$$

令 $x(t)=e^{st}$，代入(2.4)得

$$Is=L(e^{\lambda}\cdot I)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta(s)=SI-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}\\&h(s)=\det\Delta(s)\end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

$\Delta(s)$的逆阵 $\Delta^{-1}(s)=\mathrm{adj}\Delta(s)/\det\Delta(s)$.

**引理 2.1** 记 $\hat{X}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}x(t-r)dt$，则

$$\hat{X}(s)\det\Delta(s)=g(s) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}g(s)=&\mathrm{adj}\Delta(s)\{x(0)e^{-sr}+s\int_{-r}^{0}e^{-su-sr}x(u)du\\&-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{-r}^{\theta}e^{-su-sr+s\theta}x(u)du\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

**证** 记 $X(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}x(t)dt$，则

$$\begin{aligned}\hat{X}(s)&=\int_{0}^{\infty}e^{-st}x(t-r)dt\\&=e^{-sr}[\int_{0}^{\infty}e^{-st}x(t)dt+\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du]\\&=e^{-sr}X(s)+e^{-sr}\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du\end{aligned} \tag{2.8}$$

由(2.3)两边施行 Laplace 变换，注意到(2.4)有

$$L[\dot{x}(t)]=sX(s)-x(0)$$

$$L[L(x_t)]=L[\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]x(t+\theta)]$$

$$=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}[\int_{0}^{\infty}e^{-st}x(t)dt+\int_{\theta}^{0}e^{-su}x(u)du]$$

$$=X(s)\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}+\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{\theta}^{0}e^{-su+s\theta}x(u)du$$

合并之得

$$sX(s)-x(0)=X(s)\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}$$

$$+\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{\theta}^{0}e^{-su+s\theta}x(u)du$$

由上式及(2.8)有

$$[sI-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}]X(s)=x(0)+\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{\theta}^{0}e^{-su+s\theta}x(u)du$$

$$\Delta(s)X(s)=\Delta(s)e^{sr}\hat{X}(s)-\Delta(s)\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du$$

综合上两式得

$$\Delta(s)e^{sr}\hat{X}(s)=x(0)+\Delta(s)\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du$$

$$+\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{\theta}^{0}e^{-su+s\theta}x(u)du$$

$$=x(0)+s\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]e^{s\theta}\int_{-r}^{0}e^{-su}x(u)du$$

$$+\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{\theta}^{0}e^{-su+s\theta}x(u)du$$

最后得

$$\hat{X}(s)=\Delta^{-1}(s)\{x(0)e^{-sr}+s\int_{-r}^{0}e^{-su-sr}x(u)du$$

$$-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\int_{-r}^{\theta}e^{-su-sr+s\theta}x(u)du\} \tag{2.9}$$

注意到 $\Delta^{-1}(s)=\mathrm{adj}\Delta(s)/\det\Delta(s)$，由(2.9)⇒引理 1.1 成立.

对 $h(s)=\det\Delta(s)$，我们定义它的型和阶.

**定义** 2.2 $h(s)$的型(Type)定义为

$$\tau=\overline{\lim_{|s|\to\infty}}\frac{1}{|s|}\log|\det\Delta(s)|\stackrel{\Delta}{=}\mathrm{Type}\det\Delta(s) \tag{2.10}$$

$h(s)$的阶定义为

$$d=\inf\{A:h(s)=O(\exp|s|^A)\} \tag{2.11}$$

由 $g(s)$和 $h(s)$的定义，当$|s|\to\infty$时有

$$\begin{aligned}g(s)&=O(|s|^{n-1},e^{-m\mathrm{Re}s})\\ h(s)&=\det\Delta(s)=O(|s|^n,e^{-m\mathrm{Re}s})\end{aligned} \tag{2.12}$$

所以当 $g(s)\Delta^{-1}(s)$的分量为整函数时，$g(\cdot)\det\Delta(\cdot)$的阶$\leqslant1$，从而 $\hat{X}(s)$的阶$\leqslant1$.

**引理** 2.2 (Palay-Weiner 定理) 若 $s=\rho e^{i\theta}$，$f(s)$是整函数，在虚轴上等于 $O(|s|^k)$，记

$$\tau_f(\theta)=\overline{\lim_{\rho\to\infty}}\frac{1}{\rho}\log|f(\rho e^{i\theta})|$$

则对 $\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，$\tau_f(\theta)=-\mathrm{Type}f\cos\theta$，在 $\theta$ 的区间$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$的一个稠密集上成立

$$\tau_f(\theta)=\underline{\lim_{\rho\to\infty}}\frac{1}{\rho}\log|f(\rho e^{i\theta})|$$

**定理** 2.1 对线性自治FDE(2.3)在$[-r,\infty)$上有定义的解$x(t)$，它趋于零的速度快于任何指数函数，则当 $t\geqslant r(n-1)-\tau$ 时 $x(t)=0$，$n$ 是(2.3)的阶数.

**证** 由(2.12)，在虚轴上有

$$g(s)=\hat{X}(s)\det\Delta(s)=O(|s|^{n-1}),\ |s|\to\infty$$

$$h(s)=\det\Delta(s)=O(|s|^n),\ |s|\to\infty$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Type}\hat{X}(s)&=\mathrm{Type}g(s)-\mathrm{Type}\det\Delta(s)\\ &=\mathrm{Type}g(s)-\tau\leqslant rn-\tau\end{aligned} \tag{2.13}$$

由(2.13)及引理2.2即得定理结论.

## §3 常数变易公式

(1.2)的解 $x(t,\sigma,\varphi,h)$ 关于 $\varphi,h$ 是线性映射.

设 $h\in L_1([a,b],R^n)$，$L_1$ 中所有与 $h$ 几乎处处相等的元全体记为 $\hat{L}_1([a,b],R^n)$，即 $\hat{L}_1$ 是 $L_1$ 的一个等价类.

**引理** 3.1 设 $T:\hat{L}_1([a,b],R^n)\to R$ 是一个线性连续算子. 则存在唯一一个 $n\times n$ 函数阵 $V(\theta)$，$\theta\in[a,b]$(除了关于 $\theta$ 测度为 0 的集以外)，它是可积的且本性有界，使得

$$Th=\int_a^b V(\theta)h(\theta)d\theta,\ h\in L_1([a,b],R^n)$$

由 Riese 定理 $V(\theta)$ 存在.

**定理** 3.1 (常数变易公式) 若 $h\in L_1^{loc}([\sigma,\infty),R^n)$，方程(1.2)中 $L(t,\varphi)$ 满足条件($\eta c$)，则它的解可以表示成

$$x(t,\sigma,\varphi,h)=x(t,\sigma,\varphi,0)+\int_\sigma^t U(t,s)h(s)ds,\ t\geqslant\sigma$$

$$x_\sigma=\varphi \tag{3.1}$$

其中 $x(t,\sigma,\varphi,0)$ 是(1.1)过 $(\sigma,\varphi)$ 的解，而 $U(t,s)$ 几乎处处满足下列方程

$$U(t,s)=\begin{cases}\int_\sigma^t L(u,U_u(\cdot,s))du+I,\ t>s\\ 0,\ s-r\leqslant t<s\end{cases} \tag{3.2}$$

或者

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t}=L(t,U_t(\cdot,s)),\ t\geqslant s$$

$$U(t,s)=\begin{cases}0,\ s-r\leqslant t<s\\ I,\ t=s\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $U_t(\cdot,s)(\theta)=U(t+\theta,s)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$，$U(t,s)$ 叫做基本解阵.

**证** 由 $x(\sigma,0,\cdot)(t)\in L_1([\sigma,t],R^n)$，引理 3.1 保证存在 $n\times n$ 阵 $U^*(t,\sigma,\cdot)\in L_\infty([\sigma,t],R^{n^2})$，$t\geqslant\sigma$ 使成立

$$x(\sigma,0,h)(t)=\int_\sigma^t U^*(t,\sigma,s)h(s)ds \tag{3.4}$$

先证 $U^*(t,\sigma,s)$ 与 $\sigma$ 无关.

设 $\alpha\in[\sigma,t]$ 以及 $k\in L_1([\sigma,t],R^n)$ 满足 $k(s)=0,s\in[\sigma,\alpha]$，则 $x(\sigma,0,k)(t)=x(\alpha,0,k)(t),t\geqslant\alpha$，因为当 $t\in[\sigma-r,\alpha]$ 时 $x(\sigma,0,k)(t)=0$. 故对 $\forall\ k\in L_1([\alpha,t],R^n)$

$$\int_\alpha^t [U^*(t,\sigma,s)-U^*(t,\alpha,s)]k(s)ds=0 \tag{3.5}$$

成立 $\Rightarrow U^*(t,\sigma,s)=U^*(t,\sigma,s)$ 关于 $s$ 几乎处处成立. 由于 $\alpha\in[\sigma,t]$ 是任意的，故 $U^*(t,\sigma,s)$ 与 $\sigma$ 无关. 定义

$$U(t,s)=\begin{cases}0, s-r\leqslant t<s\\ U^*(t,\sigma,s), t\geqslant s\end{cases} \tag{3.6}$$

(3.6)使 $U(t,s)$ 定义在 $t\geqslant s-r$ 上，且略去 $\sigma$.

(1.2)在 $\varphi=0$ 时的等价积分方程为

$$x(t)=\int_\sigma^t L(s,x_s)ds+\int_\sigma^t h(s)ds \tag{3.7}$$

由(3.4)和(3.7)，得

$$\int_\sigma^t U(t,s)h(s)ds=\int_\sigma^t L(s,x_s)ds+\int_\sigma^t h(s)ds, t\geqslant\sigma \tag{3.8}$$

再由(3.4)有

$$x(\sigma,0,h)(t+\theta)=\int_\sigma^{t+\theta} U(t+\theta,s)h(s)ds \tag{3.9}$$

记

$$L(s,x_s)=\int_{-r}^0 [d_\theta\eta(s,\theta)]x(t+\theta) \tag{3.10}$$

在(3.9)中 $t$ 改为 $s$，$s$ 改为 $u$，代入(3.10)有

$$L(s,x_s)=\int_{-r}^0 [d_\theta\eta(s,\theta)]\int_\sigma^{s+\theta} U(s+\theta,u)h(u)du \tag{3.11}$$

用(3.11)代入(3.8)得

$$\int_\sigma^t U(t,s)h(s)ds=\int_\sigma^t\left\{\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)]\int_\sigma^{s+\theta}U(s+\theta,u)h(u)du\right\}ds$$
$$+\int_\sigma^t h(s)ds$$
$$=\int_\sigma^t(\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)]\int_\sigma^t U(s+\theta,u)h(u)du)ds+\int_\sigma^t h(s)ds$$

交换积分次序得

$$\int_\sigma^t U(t,s)h(s)ds=\int_\sigma^t\left(\int_u^t[\int_{-r}^0[d_\theta\eta(s,\theta)]U(s+\theta,u)]ds\right)h(u)du$$
$$+\int_\sigma^t h(s)ds$$
$$=\int_\sigma^t\left(\int_s^t[\int_{-r}^0[d_\theta\eta(u,\theta)]U(u+\theta,s)]du\right)h(s)ds+\int_\sigma^t h(s)ds$$

对一切 $h\in L_1([\sigma,t],R^n)$. 由此得出

$$U(t,s)=\int_s^t\left(\int_{-r}^0[d_\theta\eta(u,\theta)]U(u+\theta,s)\right)du+I \qquad (3.12)$$

关于 $s$ 几乎处处成立. 注意到(3.10)的表达方式⇒$U(t,s)$满足(3.2). 由线性性质

$$x(t,\sigma,\varphi,h)=x(t,\sigma,\varphi,0)+x(t,\sigma,0,h) \qquad (3.13)$$

由(3.4)代入(3.13)即得(3.1),定理证毕.

**推论** 3.1　当 $s$ 固定,方程(3.2)有唯一的解,它当 $t\geqslant s$ 时连续,且为二元可测函数.

**推论** 3.2　若系统是自治的,$L(t,\varphi)=L(\varphi)$,$r=\text{const}$. 则定理所决定的 $U$ 成立

$$U(t,s)=U(t-s,0)\overset{\text{def}}{=}U(t-s)$$

并且

$$x(\sigma,\varphi,h)(t)=x(t-\sigma,\varphi,0)(0)+\int_\sigma^t U(t-s)h(s)ds$$
$$x_\sigma=\varphi \quad t\geqslant\sigma \qquad (3.14)$$

现在把(3.1)改写为另外的形式

Ⅰ.写成 $C$ 空间元的表达式

由(3.1)有

$$\begin{aligned} &x(\sigma,\varphi,h)(t+\theta)=x(\sigma,\varphi,0)(t+\theta) \\ &+\int_{\sigma}^{t+\theta}U(t+\theta,s)h(s)ds,t+\theta\geqslant\sigma \\ &x(\sigma,\varphi,h)(t+\theta)=\varphi(t+\theta), \\ &t+\theta\in[\sigma-r,\sigma],\theta\in[-r,0] \end{aligned} \tag{3.15}$$

因为 $s>t+\theta$ 时 $U(t+\theta,s)=0$ 以及

$$x(\sigma,\varphi,0)(t+\theta)=\varphi(t-\sigma+\theta),\sigma-r\leqslant t+\theta\leqslant\sigma$$

我们有

$$x(\sigma,\varphi,h)(t+\theta)=x(\sigma,\varphi,0)(t+\theta)+\int_{\sigma}^{t}U(t+\theta,s)h(s)ds$$

$t\geqslant\sigma,-r\leqslant t\leqslant0$

或

$$x_t(\sigma,\varphi,h)=x_t(\sigma,\varphi,0)+\int_{\sigma}^{t}U_t(\cdot,s)h(s)ds,t\geqslant\sigma$$

Ⅱ.改写成解映射的表达式

记 $x_t(\sigma,\varphi,0)\triangleq T(t,\sigma)\varphi$,则 $T(t,\sigma)$ 称为解映射,是一个线性连续算子,它的详细性质将在第五章中阐述.由于 $t>s$ 时 $U(t,s)$ 关于 $t$ 连续.故由(3.2)$\Rightarrow t>s+r$ 时,$U$ 关于 $t$ 有一阶连续导数$\Rightarrow$(3.3)当 $t>s+r$ 时关于 $s$ 几乎处处成立,最后得

$$\begin{aligned} &U_t(\cdot,s)=T(t,s)X_0 \\ &X_0=\begin{cases}0,-r\leqslant\theta<0\\ I,\theta=0\end{cases} \end{aligned} \tag{3.16}$$

这里视 $s$ 为初值.此时常数变易公式写成

$$x_t(\sigma,\varphi,h)=T(t,\sigma)\varphi+\int_{\sigma}^{t}T(t,s)X_0h(s)ds,t\geqslant\sigma \tag{3.17}$$

在(3.17)中的积分表达式先在 $\theta$ 处取值,则得到 $R^n$ 中通常的 Ric-

mann 积分.

(3.17)虽然与常数变量公式等价,但它有很多方便之处,因而常被引用.

## §4 形式伴随方程

上一节述及的三种常数变易公式是等价的,它们都是由两部分组成的,即齐次方程(1.1)的解与一个(3.2)或(3.3)的解之和.这种做法是用了常微分方程的一个基本思想:由齐次方程的通解加一个非齐次方程特解以表示非齐次方程通解.如第二章中已说明的那样,为了避免常数变易公式中出现基本解阵的逆阵等原因,需要引进伴随方程的概念.

本节给出的"形式"伴随方程只是常数变易公式更详细的表示,这与下一节论述的"真实"伴随方程不同,后者是用 $C$ 空间的共轭空间中的算子直接表示伴随方程的.

本节的目标是用形式伴随方程的矩阵解来表示(1.1)和(1.2)的解.当然,表示时要用到上述的常数变易公式.

设 $x\in R^n$,考虑线性 FDE

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta) \tag{4.1}$$

其中 $\eta(\cdot,\cdot)$是 $n\times n$ 函数阵,满足条件($\eta c$).对应的非齐次方程组为

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+h(t) \tag{4.2}$$

$h:R\to R^n$ 是局部可积函数.由常数变易公式(3.1)、(4.2)的解可写成

$$x(\sigma,\varphi,h)(t)=x(\sigma,\varphi,0)(t)+\int_\sigma^t U(t,s)h(s)ds \quad t\geq\sigma \tag{4.3}$$

上一节指出 $U(t,s)$满足(3.2). 我们称

$$y(s)+\int_{s}^{\infty} y(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha)d\alpha=\text{const.} \tag{4.4}$$

为(4.2)的形式伴随方程,则 $U(t,s)$与(4.4)的解阵有关.(4.4)中 $y$ 是 $n$ 维行向量,其全体构成的空间记为 $R^n_*$.

设 $B_0$ 是 $\psi:[-r,0]\to R^n$ 的全体,$\psi$ 在$[-r,0]$上有界变差,在$(-r,0]$上左连续,在 0 处等于 0. 若定义范数为 $\underset{[-r,0]}{\text{Var}}\psi$,则 $B_0$ 是一个 Banach 空间,用压缩映象原理可证明:

**定理** 4.1　对$\forall\ t\in R,\psi\in B_0$,方程(4.4)存在唯一的 $y:R\to R^n$,使

$$y(s)=\begin{cases}0,s\in[t,\infty)\\ \psi,s\in[t-r,t]\\ \text{满足(4.4)且 } y_t=\psi,s\in(-\infty,t-r]\end{cases} \tag{4.5}$$

证明略.

类似地我们可以用映射来表示,对$\forall\ s\leqslant t$,$y_s^0$ 定义为:$y_s^0(\theta)=y(s+\theta)$,$-r\leqslant\theta<0$,$y_s^0(0)=0$,则当 $s\leqslant t$ 时(4.5)可写成

$$y_s^0=\hat{T}(s,t)y_t^0=\hat{T}(s,t)\psi$$

这里算子 $\hat{T}(s,t):B_0\to B_0$ 是有界线性的.

本节的主要结果写成

**定理** 4.2　设 $x(t,\sigma,\varphi,h)=x(t)$是(4.2)在$[\sigma,\infty)$上的解,则对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 有

$$x(t)=Y(\sigma,t)x(\sigma)+\int_{\sigma-r}^{\sigma}d_\beta\{\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\}x(\beta)$$
$$+\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha \tag{4.6}$$

其中 $Y(\sigma,t)$为 $n\times n$ 阵,定义为

$$Y(\sigma,t)=\begin{cases}0,\sigma>t\\ I-\int_\sigma^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha,\sigma\leqslant t\end{cases} \tag{4.7}$$

而且 $Y(\alpha,t)$ 在 $t\geqslant\sigma$ 的紧集上绝对连续，关于 $\sigma$ 局部有界变差，关于 $\sigma$ 几乎处处成立 $Y(\alpha,t)=U(t,\sigma)$，这里 $U(t,\sigma)$ 是上一节定理3.1中定义的函数阵.

**证** 由定理4.1⇒(4.7)存在解 $Y(\alpha,t)$ 关于 $\sigma$ 局部有界变差. 考察 $Y(\alpha,t)$，把它记为 $W(\sigma,t)$，设 $W(\sigma,t)=0,\sigma>t$.

$$W(\sigma,t)=-\eta(t,\sigma-t)-\int_\sigma^t W(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha,t\geqslant\sigma$$

上式由(4.7)两边对 $t$ 求导数即得. 不难得出估式

$$|W(\alpha,t)|\leqslant\underset{[\sigma,t]}{\mathrm{Var}}W(\cdot,t)\leqslant m(t)\exp\int_\sigma^t m(\alpha)d\alpha \tag{4.8}$$

其中 $m(t)$ 局部 $L$ 可积，满足 $|\eta(t,\cdot)|\leqslant m(t)$，对 $t\geqslant\sigma$，由(4.8)有

$$I+\int_\sigma^t W(\sigma,\tau)d\tau=I+\int_0^t[-\eta(\tau,\sigma-\tau)$$

$$-\int_\sigma^\tau W(\sigma,\tau)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha]d\tau$$

交换积分次序得

$$I+\int_\sigma^t W(\sigma,\tau)d\tau=I-\int_\sigma^t\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha$$

$$-\int_\sigma^t\left(\int_\alpha^t W(\alpha,\tau)d\tau\right)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha$$

$$=I-\int_\sigma^t[I+\int_\alpha^t W(\sigma,\tau)d\tau]\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha$$

这表明 $I+\int_\sigma^t W(\sigma,\tau)d\tau$ 和 $Y(\alpha,t)$ 一样满足方程(4.4)，对 $t\geqslant\sigma$. 由解的唯一性⇒$Y(\alpha,t)=I+\int_\sigma^t W(\sigma,\tau)d\tau$. 它关于 $t$ 在紧集上绝对连续、关于 $\sigma$ 有界变差.

设 $x(t)$ 是(4.2)过 $(\sigma,\varphi)$ 的解. 用部分积分法并注意到 $r(t)$ 是 $t$ 的连续函数. 我们有

$$\int_{\sigma}^{t^-}[d_\alpha Y(\alpha,t)]x(\alpha)+\int_{\sigma}^{t^+}Y(\alpha,t)d_\alpha x(\alpha)=-Y(\sigma,t)x(\sigma) \tag{4.9}$$

(4.9)中的积分项都可以换为$\int_{\sigma}^{t}\cdot$，因为 $x(t)$是(4.2)的解，$t\geqslant\sigma$ 时绝对连续，$\alpha>t$ 时 $Y=0\Rightarrow\lim\limits_{\alpha\to t^-}Y(\sigma,t)x(\alpha)=0$，而且 $Y(t,t)=I$，第一个积分等于$-x(t)+\int_{\sigma}^{t}[d_\alpha Y(\alpha,t)]x(\alpha)$.

再由(4.2)两边乘上 $Y(\sigma,t)$，从 $\sigma$ 到 $t$ 积分有

$$\begin{aligned}&x(t)-Y(\sigma,t)x(\sigma)-\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha\\&-\int_{\sigma}^{t}[d_\alpha Y(\alpha,t)]x(\alpha)=\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)L(\alpha,x_\alpha)d\alpha\end{aligned} \tag{4.10}$$

扩充 $\eta(\alpha,\theta)$中关于 $\theta$ 的定义范围

$$\eta(\alpha,\theta)=\begin{cases}\eta(\alpha,-r) & \theta\leqslant -r\\ \eta(\alpha,\theta) & -r\leqslant\theta\leqslant 0\\ 0 & \theta\geqslant 0\end{cases} \tag{4.11}$$

并由

$$L(\alpha,x_t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\alpha,\theta)]x(\alpha+\theta)=\int_{\alpha-r}^{\alpha}[d_\beta\eta(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)L(\alpha,x_\alpha)d\alpha=\int_{\sigma}^{t}\{Y(\alpha,t)\int_{\sigma-r}^{t}[d_\beta\eta(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)\}d\alpha\\&=\int_{\sigma-r}^{t}[d_\beta\{\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\}]x(\beta)\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中积分号的交换用到了 Cameron 与 Martin 给出的非对称富比尼定理[4].

当 $\beta\geqslant\alpha$ 时 $\eta(\alpha,\beta-\alpha)=0$，(4.12)改写成

$$\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x_{\sigma})d\alpha = \int_{\sigma-r}^{\sigma^{-}} [d_{\beta}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha]x(\beta)$$

$$+\int_{\sigma}^{t}[d_{\beta}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)]d\alpha]x(\beta)$$

再由 $Y$ 满足方程(4.7)有

$$\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha,x_{\sigma})d\alpha = \int_{\sigma-r}^{\sigma^{-}} [d_{\beta}\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\}]x(\beta)$$

$$+\int_{\sigma}^{t}[d_{\beta}\{I-Y(\beta,t)\}]x(\beta)$$

$$=\int_{\sigma-r}^{\sigma^{-}}[d_{\beta}\{\int_{\sigma}^{t}\}]x(\beta)-\int_{\sigma}^{t}[d_{\beta}Y(\beta,t)]x(\beta)$$

上式代入(4.10)⇒(4.6)成立.

最后,对 $\varphi=0$,过$(\sigma,0)$(4.1)的解恒等于 0⇒(4.3)为

$$x(t)=\int_{\sigma}^{t}U(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha \tag{4.13}$$

对每个$h$成立,$h\in L_1^{loc}([\sigma,\infty),R^n)$,另一方面,在$[\sigma-r,\sigma]$上 $x(\beta)=\varphi=0\Rightarrow\int_{\sigma-r}^{\sigma^{-}}[d_{\beta}\{\int_{\sigma}^{t}\}]x(\beta)=0$,并且由(4.11)⇒(4.6)中

$$Y(\sigma,t)x(\sigma)=0\Rightarrow$$

$$x(t)=\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha \tag{4.14}$$

合并(4.13)(4.14)⇒$Y(\sigma,t)=U(t,\sigma)$关于 $\alpha$ 几乎处处成立. 定理证毕.

公式(4.6)不便于应用,因为更多的方程取(1.6)形式,而且是变系数的,即

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k(t)x(t-\omega_k)+\int_{-\omega}^{0}A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta \tag{4.15}$$

$$0\leqslant\omega_k\leqslant r,\ 0\leqslant\omega\leqslant r,\ r=\text{const.}$$

其中 $A_k(t)$,$A(t,\theta)$关于 $t,\theta$ 连续. 设 $0\leqslant\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n<r$,定义 Riese 表示定理中的 $n\times n$ 函数阵 $\eta(t,\theta)$为

$$\eta(t,\theta)=\eta_1(t,\theta)+\eta_2(t,\theta)$$

$$\eta_1(t,\theta)=\begin{cases}0 & -\omega_1<\theta\leqslant 0\\ -A_1(t) & -\omega_2<\theta\\ -A_k(t)-A_{k-1}(t) & -\omega_{k+1}<\theta\leqslant-\omega_k,k=2,\cdots,N-1\\ -A_{N-1}(t)-A_N(t) & \theta=-\omega_N\\ 0 & -r_1\leqslant\theta<-\omega_N\end{cases}$$

$$\eta_2(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\bar{\in}[-\omega,0]\\ \int_0^\theta A(t,\theta_1)d\theta_1 & \theta\in[-\omega,0]\end{cases}$$

计算 Stieltjes 积分的值，立即推出(4.15)等于

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^0[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta)$$

现在扩展 $\eta(t,\theta)$关于 $\theta$ 的定义范围

$$\hat{\eta}(\alpha,s-\alpha)=\begin{cases}0 & s-\alpha=\theta>0\\ \eta(\alpha,s-\alpha) & s-\alpha=\theta\in[-r,0]\\ \eta(\alpha,-r) & s-\alpha=\theta\leqslant-r\end{cases}$$

为方便计，下面 $\hat{\eta}(\alpha,s-\alpha)$即略记之为 $\eta(\alpha,s-\alpha)$.

对这个 $\eta(t,\theta)$ 我们来推算形式伴随方程(4.4)相应于(4.15)应当取什么形式. $\eta(t,\theta)$代入(4.4)得

$$y(s)+\int_s^\infty y(\alpha)\eta_1(\alpha,s-\alpha)d\alpha+\int_s^\infty y(\alpha)\eta_2(\alpha,s-\alpha)d\alpha=\text{const}. \tag{4.16}$$

(4.16)对 $s$ 求导数，第一个积分为

$$\frac{d}{ds}\int_s^\infty y(\alpha)\eta_1(\alpha,s-\alpha)d\alpha=-\int_s^{s+r}y(\alpha)d\eta_1(\alpha,s-\alpha)$$

令 $s-\alpha=\theta$，上式右边为

$$-\int_0^{-r}y(s-\theta)d_\theta\eta_1(s-\theta,\theta)=\sum_{k=1}^N Y(t+\omega_k)A_k(t+\omega_k)$$

面第二个积分为

$$\frac{d}{ds}\int_s^{\infty} y(\alpha)\int_0^{s-\alpha} A(t,\theta_1)d\theta_1 d\alpha = \int_s^{s+r} y(\alpha)A(\alpha,s-\alpha)d\alpha$$

令 $\xi = s-\alpha$，则上式右边为

$$-\int_{-r}^{0} y(s-\xi)A(s-\xi,\xi)d\xi \qquad (d\xi = -d\alpha)$$

$$=\int_{-\infty}^{0} y(s-\xi)A(s-\xi,\xi)d\xi$$

合并起来得到(4.15)的形式伴随方程为

$$\frac{dy(s)}{ds} = -\sum_{k=1}^{N} Y(s+\omega_k)A_k(s+\omega_k) - \int_{-\infty}^{0} y(s-\xi)A(s-\xi,\xi)d\xi \tag{4.17}$$

方程(4.15)的常数变易公式为

$$x(t) = U(t,\sigma)\varphi(0) + \sum_{k=1}^{N}\int_{\sigma-\omega_k}^{\sigma} U(t,\alpha+\omega_k)A_k(\alpha+\omega_k)$$

$$\cdot\varphi(\alpha-\sigma)d\alpha + \int_{\sigma-\omega}^{\sigma}\left[\int_{\sigma}^{\alpha+\omega} U(t,s)A(s,\alpha-s)ds\right]\varphi(\alpha-\sigma)d\alpha \tag{4.18}$$

由 $Y(\sigma,t)x(\sigma) \overset{a.e.}{=} U(\sigma,t)\varphi(0)$，定理 4.2 中式(4.6)代替(4.18)写成

$$\begin{aligned} x(t) = {} & Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma}\left[d_\beta\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\eta_1(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\right]x(\beta) \\ & + \int_{\sigma-r}^{\sigma}\left[d_\beta\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\eta_2(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\right]x(\beta) \end{aligned} \tag{4.19}$$

**例 3** 对(4.15)的一个特别情况

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) \tag{4.20}$$

把它写成

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta)$$

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta=0\\ -A(t) & -r<\theta<0\\ -A(t)-B(t) & \theta=-r\end{cases}$$

则(4.17)简化为

$$\frac{dy(s)}{ds}=-y(s)A(s)-y(s+r)B(s+r)$$

积分方程形式的形式伴随方程(4.4)则化为

$$y(s)+\int_{s}^{s+r}[-y(\alpha)A(\alpha)]d\alpha+\int_{s+r}^{\infty}-y(\alpha)[A(\alpha)+B(\alpha)]d\alpha=\text{const.}$$

(4.21)

为了简化(4.19)和为下一节做准备，我们令 $C^*=C([0,r],R^{n*})$ 是 $[0,r]$ 上 $n$ 维行向量构成的连续函数空间，对 $\forall\ t\in R,\varphi\in C,\psi\in C^*$，设

$$(\psi,\varphi,t)=\psi(0)\varphi(0)+\sum_{k=1}^{N}\int_{0}^{\omega_k}\psi(\xi)A_k(t+\xi)\varphi(\xi-\omega_k)d\xi$$

$$-\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\theta}^{0}\psi(\xi)A(t+\xi,\theta)\varphi(\xi+\theta)d\xi\right)d\theta$$

对 $\forall\ \psi\in C^*$，令 $y(\sigma,\psi)$ 是(4.17)在 $(-\infty,\sigma+r]$ 上的解，它带有初值条件：$y(\sigma,\psi)(\sigma+s)=\psi(s),s\in[0,r]$(注意(4.17)是超前型方程，现在沿负向求解). 再记 $y^t(\sigma,\psi)\in C^*,t\leqslant\sigma$，定义为

$$y^t(\sigma,\psi)(s)=y(\sigma,\psi)(t+s),s\in[0,r].$$

若 $x$ 是(4.15)在 $[\sigma-r,T]$ 上的一个解，$y$ 是(4.17)在 $[\sigma,T+r]$ 上的一个解，则在 $\sigma\leqslant t\leqslant T$ 上有

$$(y^t,x_t,t)=y(t)x(t)+\sum_{k=1}^{N}\int_{t}^{t+\omega_k}y(\alpha)A_k(\alpha)x(\alpha-\omega_k)d\alpha$$

$$-\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{t-\theta}^{t}y(\alpha)A(\alpha,\theta)x(\alpha+\theta)d\alpha\right]d\theta$$

(4.22)

由(4.22)两边对 $t$ 求导数,并用(4.15)(4.17)代入

$$\frac{d(y^t,x_t,t)}{dt}=\dot{y}(t)x(t)+y(t)\dot{x}(t)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}y(t+\omega_k)A_k(t+\omega_k)x(t)-\sum_{k=1}^{N}y(t)A_k(t)x(t-\omega_k)$$

$$-\int_{-\omega}^{0}[y(t)A(t,\theta)x(t+\theta)-y(t-\theta)A(t-\theta,\theta)x(t)]d\theta=0$$

由此⇒

$$(y^t,x_t,t)=\text{const.}\qquad \sigma\leqslant t\leqslant T \tag{4.23}$$

亦即我们得到 $x$、$y$ 之间的一个双线性关系.

类似地,若 $Y(s,t)$是(4.17)在$(-\infty,t+r]$上的 $n\times n$ 矩阵解,它在$[t,t+r]$上的初始函数阵定义为

$$Y(s,t)=0,t\leqslant s\leqslant t+r$$

$$Y(s,s)=Y(t,t)=I \tag{4.24}$$

则$(Y^s(\cdot\ ,t),x_s,s)$不依赖于 $s$,对 $s\leqslant t$. 这里

$$Y^s(\cdot\ ,t)(\alpha)=Y(s+\alpha,t),0\leqslant\alpha\leqslant r$$

因而 $Y^s(\cdot\ ,t)(\alpha)=Y^t(\cdot\ ,t)$且

$$(Y^s(\cdot\ ,t),x_s,s)=(Y^t(\cdot\ ,t),x_t,t)\qquad s\leqslant t$$

因为 $t\leqslant\alpha\leqslant t+r$ 时 $Y=0$,由(4.22)⇒

$$(Y^s(\cdot\ ,t),x_s,s)=(Y^t(\cdot\ ,t)x_t,t)=x(t)\qquad s\leqslant t \tag{4.25}$$

若用(4.25)于阵 $U(t,s)$,则

$$U(t,s)=Y(s,t)\qquad s\leqslant t$$

当 $s=\sigma$ 时,(4.25)即(4.18).

## §5 真实伴随

考虑系统(1.1)和(1.2). 设§4 中对方程的假定皆满足,记 $B_0$ 为 $C$ 的共轭空间,由下列内积确定

$$\langle\psi,\varphi\rangle=\int_{-r}^{0}[d\psi(\theta)]\varphi(\theta),\psi\in B_0,\varphi\in C \tag{5.1}$$

若 $x(t,\sigma,\varphi,h)$ 为(1.2)过$(\sigma,\varphi)$的解，则

$$x_t(\sigma,\varphi,h)=T(t,\sigma)\varphi+K(t,\sigma)h \tag{5.2}$$

其中 $T(t,\sigma):C\to C,T(\sigma,\sigma)=I,K(t,\sigma):L_1([\sigma,t],R^n)\to C,K(\sigma,\sigma)=0,t\geqslant\sigma$ 都是线性连续算子．它们的伴随算子 $T^*,K^*$ 定义为

$$T^*(\sigma,t):B_0\to B_0,K^*(t,\sigma):B_0\to L_\infty([\sigma,t],R^n_*)$$

$$\langle T^*(\sigma,t)\psi,\varphi\rangle=\langle\psi,T(t,\sigma)\varphi\rangle \tag{5.3}$$

$$\int_\sigma^t(K^*(\sigma,t)\psi)(s)h(s)ds=\langle\psi,K(t,\sigma)h\rangle \tag{5.4}$$

其中 $h\in L_1([\sigma,t],R^n),t\geqslant\sigma$.

**定义** 5.1　空间 $B_0$ 中的算子$\Omega$叫做拟幂零的，若$\Omega$的谱只含零元．若$\Omega$是一个 Volterra 算子

$$\Omega\psi(\theta)=\int_\theta^0\psi(\alpha)\mu(\alpha,\theta)d\alpha\qquad -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

其中 $\mu(\alpha,\theta)$ 为 $n\times n$ 阵函数，满足条件$(\eta c)$，则$\Omega$是一个幂零算子．此时方程

$$(\lambda I-\Omega)\psi=\xi\qquad\lambda\neq 0,\xi\in B_0$$

有唯一解 $\psi\in B_0$，它关于 $\xi$ 是连续的．

则有如下基本结果：

**定理** 5.1　对$\forall\ t\geqslant\sigma,\hat{T}(\sigma,t)$为定理 4.1 确定的算子，$B_0$ 中拟幂零算子$\Omega(\sigma)$定义为

$$(\Omega(\sigma)\psi)(\theta)=\int_\theta^0\psi(\alpha)\eta(\sigma+\alpha,\theta-\alpha)d\alpha\quad\theta\in[-r,0] \tag{5.5}$$

则对$\forall\ \sigma\in R,\psi\in B_0$ 有

$$T^*(\sigma,t)=(I+\Omega(\sigma))\hat{T}(\sigma,t)(I+\Omega(t))^{-1} \tag{5.6}$$

**证**　对$\forall\ \varphi\in C,\psi\in B_0$，设 $x=x(t,\sigma,\varphi,0)$是(1.1)过$(\sigma,\varphi)$的解，即对$\forall\ t\geqslant\sigma,x_\sigma=\varphi,x_t=T(t,\sigma)\varphi$.

扩充 $\psi$ 的定义范围

$$\psi=\begin{cases}\psi(0) & \xi\geqslant 0\\ \psi(\xi) & -r\leqslant\xi\leqslant 0\\ \psi(-r) & \xi\leqslant -r\end{cases}$$

$x$ 也以随便什么方式连续扩充定义到 $R$ 上，由定理 4.2 有

$$\langle T^*(\sigma,t)\psi,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}[d\psi(\theta)]x(t+\theta)$$

$$=\int_{\sigma-t-r}^{(\sigma-t)^-}[d\psi(\theta)]\varphi(\theta+t-\sigma)+\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]x(t+\theta)$$

上式中第二个积分中的 $x(t+\theta)$ 由方程(4.6)确定，所以

$$\langle T^*(\sigma,t)\psi,\varphi\rangle=\int_{-r}^{0^-}[d_\xi\psi(\xi+\sigma-t)]\varphi(\xi)$$

$$+\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\sigma,t+\theta)\varphi(0)$$

$$+\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]\int_{-r}^{0}[d_\xi\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t+\theta)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha]\varphi(\xi) \quad (5.7)$$

(5.7)最后一个积分项交换积分次序得

$$\int_{-r}^{0}[d_\xi\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t+\theta)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha]\varphi(\xi)$$

$$=\int_{-r}^{0}[d_\xi\int_{\sigma}^{t}\left(\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta)\right)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha]\varphi(\xi)$$

$$=\int_{-r}^{0}[d_\xi\int_{\sigma}^{t}\left(\int_{\alpha-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta)\right)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha]\varphi(\xi)$$

因为 $Y(\sigma,t)=0,\sigma>t$，若我们定义一个函数 $y(\alpha,t)=0$，当 $\alpha>t$，以及

$$y(\alpha,t)=-\int_{\alpha-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta),\alpha\leqslant t \quad (5.8)$$

由(5.7)及交换积分次序的计算结果，对 $\forall\ \varphi\in C$ 成立

$$\langle T^*(\sigma,t)\psi,\varphi\rangle=\int_{-r}^{0}[d_\xi\psi(\xi+\sigma-t)]\varphi(\xi)-y(\sigma,t)\varphi(0)$$

$$-\int_{-r}^{0}[d_\xi\int_{\sigma}^{t}y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha]\varphi(\xi) \quad (5.9)$$

由(4.9)和内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$的定义,$[T^*(\sigma,t)\psi](\theta)$在$\theta=0$处有一个阶跃,特别地有

$$[T^*(\sigma,t)\psi][0^-]=y(\sigma,t) \tag{5.10}$$

由方程(5.8)和(4.7),对$t\geqslant\sigma$成立

$$\begin{aligned}
Y(\sigma,t)&=-\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\sigma,t+\theta)\\
&=-\int_{\sigma-t}^{0}d\psi(\theta)+\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]\int_{\sigma}^{t+\theta}Y(\alpha,t+\theta)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha\\
&=\psi(\sigma-t)+\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]\int_{\sigma}^{t}Y(\alpha,t+\theta)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha\\
&=\psi(\sigma-t)+\int_{\sigma}^{t}\{\int_{\sigma-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta)\}\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha\\
&=\psi(\sigma-t)+\int_{\sigma}^{t}\{\int_{\alpha-t}^{0}[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta)\}\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha\\
&=\psi(\sigma-t)-\int_{\sigma}^{t}y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

因而

$$Y(\sigma,t)+\int_{\sigma}^{t}y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha=\psi(\sigma-t)\quad \sigma\leqslant t \tag{5.11}$$

由于$\sigma\leqslant t-r$时,$\psi(\sigma-t)=\psi(-r)$,故有

$$Y(\sigma,t)+\int_{\sigma}^{t}y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha=\psi(-r)\quad \sigma\leqslant t-r$$

且$y(\sigma,t)$作为$\sigma$的函数是形式伴随方程(4.4)的解,由定理4.1我们有

$$y_\sigma^0(\cdot,t)=\dot{T}(\sigma,t)y_t^0(\cdot,t)$$

初始函数$y_t^0(\cdot,t)$由(5.11)确定. 在(5.11)中令$\sigma=t+\theta$

$$y(t+\theta,t)+\int_{t+\theta}^{0}y(\alpha,t+\theta)\eta(\alpha,t+\theta-\alpha)d\alpha=\psi(\theta),\ -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

或

$$y(t+\theta,t)+\int_{\theta}^{0}y(t+\alpha,t+\theta)\eta(t+\alpha,\theta-\alpha)d\alpha=\psi(\theta),\ -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

把上式与(5.5)比较即得$[I+\Omega(t)]y_t^0(\cdot,t)=\psi$,因而有

$$y_\sigma^0(\cdot,t)=\hat{T}(\sigma,t)(I+\Omega(t))^{-1}\psi \quad \sigma\leqslant t \tag{5.12}$$

由(5.11)和规范化条件(5.10),对$-r\leqslant\xi<0$(5.9)有

$$\begin{aligned}[T^*(\sigma,t)\psi](\xi)&=\psi(\xi+\sigma-t)-\int_\sigma^t y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha\\&=y(\sigma+\xi,t)+\int_{\sigma+\xi}^\sigma y(\alpha,t)\eta(\alpha,\sigma+\xi-\alpha)d\alpha\\&=y(\sigma+\xi,t)+\int_\xi^0 y(\sigma+\beta,t)\eta(\sigma+\beta,\xi-\beta)d\beta\\&=[(I+\Omega(\sigma))y_\sigma^0(\cdot,t)](\xi)\end{aligned}$$

最后,由式(4.5)和(5.12)⇒(4.6)成立.

对$K^*(\sigma,t)$,有类似结果:

**定理** 5.2 由(5.4)确定的算子$K(t,\sigma)$的伴随算子$K^*(\sigma,t)$可写成

$$\begin{aligned}[K^*(\sigma,t)\psi](\xi)&=-[T^*(\sigma,t)\psi](0^-)\\&=-\int_{-r}^0[d\psi(\theta)]Y(\xi,t+\theta)\end{aligned} \tag{5.13}$$

(5.13)对$\forall\ \psi\in B_0$在$[\sigma,t]$上关于$\xi$几乎处处成立.

**证** 对$h\in L_1([\sigma,t],R^n)$,$\psi\in B_0$,由定理4.2以及式(5.8)(5.10)有

$$\begin{aligned}&\int_\sigma^t(K^*(\sigma,t)\psi)(\alpha)h(\alpha)d\alpha=\langle\psi,K(t,\sigma)h\rangle\\&=\int_{-r}^0[d\psi(\theta)](K(t,\sigma)h)(\theta)\\&=\int_{-r}^0[d\psi(\theta)]\int_\sigma^{t+\theta}Y(\alpha,t+\theta)h(\alpha)d\alpha\\&=\int_{-r}^0[d\psi(\theta)]\int_\sigma^t Y(\alpha,t+\theta)h(\alpha)d\alpha\\&=\int_\sigma^t\left[\int_{-r}^0[d\psi(\theta)]Y(\alpha,t+\theta)\right]h(\alpha)d\alpha\end{aligned}$$

$$= -\int_{\sigma}^{t} y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha$$

$$= -\int_{\sigma}^{t} [T^*(\alpha,t)\psi](0^-)h(\alpha)d\alpha$$

因为上式对$\forall\ h \in L_1([\sigma,t],R^n)$成立．由此推出定理结论成立．这是定理 5.1 的一个自然推论．

## §6 边值问题

泛函微分方程边值问题有广泛的应用背景，特别是二阶线性系统．已知的大量研究结果都是常微分方程相应工作的推广．本节讨论非齐次线性 FDE

$$\dot{x}(t) = L(t,x_t) + h(t) \tag{6.1}$$

的两点边值问题，得出 Fredholm 择一型结果，这只是一个举例性导引，有兴趣的读者可以从所附文献中进一步扩展知识[4][7]．

设 $V$ 是一个 Banach 空间，$\sigma < \tau$ 是给定的常数，$M,N:C \to V$ 是两个线性算子，$\gamma \in V$ 是取定的，(6.1)的第 I 类边值问题写成

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = L(t,x_t) + h(t) \\ &Mx_\sigma + Nx_\tau = \gamma \end{aligned} \tag{6.2}$$

设 $V^*$ 是 $V$ 的共轭空间，$M^*$，$N^*$ 分别是 $M,N$ 的伴随算子，我们有

**定理** 6.1　为了使问题(6.2)有一个解，必要条件是：对$\forall\ \delta \in V^*$和 $y$ 成立

$$\int_{\sigma}^{\tau} y(\alpha)h(\alpha)d\alpha = -\langle \delta,\gamma \rangle, \tag{6.3}$$

其中 $y$ 是形式伴随问题

$$y(s) + \int_{s}^{\tau} y(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha)d\alpha = \text{const}, \sigma - r \leq s \leq \tau - r \tag{6.4}$$

$$y_\sigma^0 = -(I+\Omega(\sigma))^{-1}M^*\delta, \quad y_\tau^0 = (I+\Omega(\tau))^{-1}N^*\delta \tag{6.5}$$

的解，若 $\mathscr{R}(M+NT(\tau,\sigma))$ 是闭的，则条件(6.3)又是充分的.

**证** 方程(6.1)的解由上一节(5.2)表示为

$$x_\tau = T(\tau,\sigma)x_\sigma + K(\tau,\sigma)h \tag{6.6}$$

(6.2)的边界条件等价于

$$NK(\tau,\sigma)h - \gamma \in \mathscr{R}(M+NT(\tau,\sigma)) \tag{6.7}$$

这是因为由(6.6)两边乘 $N$ 代入(6.2)得

$$NK(\tau,\sigma)h - \gamma = -(M+NT(\tau,\sigma))x_\sigma$$

即 $NK(\tau,\sigma)h - \gamma \in \mathscr{R}(M+NT(\tau,\sigma))$.

对必要性以及 $\mathscr{R}(M+NT(\tau,\sigma))$ 为闭集的假定下的充分性，是使成立

$$NK(\tau,\sigma)h - \gamma \in C\mathscr{R}(M+NT(\tau,\sigma))$$

$$= \{\mathscr{N}(M^* + T^*(\sigma,\tau)N^*)\}^\perp$$

即 $\forall\, \delta \in V^*$ 有 $(M^* + T^*(\sigma,\tau)N^*)\delta = 0$. 即应当有 $\langle \delta, NK(\tau,\sigma)h - \gamma\rangle_v = 0$，或者由定理 5.2 有

$$\langle \delta, \gamma\rangle_v = \langle \delta, NK(\tau,\sigma)h\rangle_v = \langle N^*\delta, K(\tau,\sigma)h\rangle$$

$$= \int_\sigma^\tau (K^*(\sigma,\tau)N^*\delta)(s)h(s)ds$$

$$= -\int_\sigma^\tau (T^*(\xi,\tau)N^*\delta(0^-)h(\xi)d\xi \tag{6.8}$$

若 $y$ 是伴随方程(6.4)在 $[\sigma-r, \tau-r]$ 上满足条件 $y_\tau^0 = (I+\Omega(\tau))^{-1}N^*\delta$ 的解，则

$$y_\sigma^0 = \hat{T}(\sigma,\tau)y_\tau^0 = \hat{T}(\sigma,\tau)(I+\Omega(\tau))^{-1}N^*\delta$$

$$= (I+\Omega(\sigma))^{-1}T^*(\sigma,\tau)N^*\delta = -(I+\Omega(\sigma))^{-1}M^*\delta$$

因为 $\delta \in \mathscr{N}(M^* + T^*(\sigma,\tau)N^*)$，所以它的存在性等价于方程(6.4)在 $[\sigma-r, \tau-r]$ 上满足(6.5)的解的存在性，而且

$$\sigma \leqslant \xi < \tau, T^*(\xi,\tau)N^*\delta = (I+\Omega(\xi))\hat{T}(\xi,\tau)(I+\Omega(\tau))^{-1}N^*\delta$$

$$= (I+\Omega(\xi))\hat{T}(\xi,\tau)y_\tau^0$$

故

$$(T^*(\xi,\tau)N^*\delta)(0^-)=(\hat{T}(\xi,\tau)y_\tau^0)(0^-)=y(\xi)$$

代入方程(6.8)⇒(6.3)．证毕．

对第Ⅰ类边值问题：设 $P,Q:V\to C$ 是 $V$ 中稠密集上的线性算子，$p,q$ 是 $C$ 中固定的元，问题写成：求一个 $v\in V$，使满足：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=L(t,x_t)+h(t)\\&x_\sigma=Pv+p,x_\tau=Qv+q\end{aligned}\tag{6.9}$$

设 $P^*,Q^*$ 分别是 $P,Q$ 的伴随算子．

**定理** 6.2　使问题(6.9)有一个解的必要条件是对满足边界条件

$$P^*(I+\Omega(\sigma))y_\sigma^0=Q^*(I+\Omega(\tau))y_\tau^0\tag{6.10}$$

的伴随问题在$[\sigma-r,\tau-r]$上的每一个解 $y$，成立

$$\int_0^\tau y(\xi)h(\xi)d\xi=\langle(I+\Omega(\sigma))y_\sigma^0,p\rangle-\langle(I+\Omega(\tau))y_\tau^0,q\rangle\tag{6.11}$$

若 $\mathscr{R}(Q-T(\tau,\sigma)p)$ 在 $C$ 中是闭的，则条件(6.11)还是充分的．

**证**　与定理 6.1 的处理办法一样，(6.9)中的边值条件等价于

$$T(\tau,\sigma)p-q+K(\tau,\sigma)h\in\mathscr{R}(Q-T(\tau,\sigma)P)$$

所以对必要性以及 $\mathscr{R}(Q-T(\tau,\sigma)P)$ 是闭集的假定下的充分性是使成立

$$T(\tau,\sigma)p-q+K(\tau,\sigma)h\in\{\mathscr{N}(Q^*-P^*T^*(\sigma,\tau))\}^\perp$$

即对$\forall\ \psi\in B_0$ 使得 $Q^*\psi-P^*T^*(\sigma,\tau)\psi=0$，或者说

$$\begin{aligned}0&=\langle\psi,T(\tau,\sigma)p-q+K(\tau,\sigma)h\rangle\\&=\langle T^*(\sigma,\tau)\psi,p\rangle-\langle\psi,q\rangle\\&\quad+\int_\sigma^\tau\langle K^*(\sigma,\tau)\psi(s)h(s)ds\\&=\langle(I+\Omega(\sigma))\hat{T}(\sigma,\tau)(I+\Omega(\tau))^{-1}\psi,p\rangle-\langle\psi,q\rangle\\&\quad-\int_\sigma^\tau(T^*(\xi,\tau)\psi)(0^-)h(\xi)d\xi\end{aligned}\tag{6.12}$$

条件 $Q^*\psi-P^*T^*(\sigma,\tau)\psi=0$ 等价于

$$Q^*\psi-P^*(I+\Omega(\sigma))\hat{T}(\sigma,\tau)(I+\Omega(\tau))^{-1}\psi=0$$

若 $y_\tau^0=(I+\Omega(\tau))^{-1}\psi,\psi\in\mathcal{N}(Q^*-P^*T^*(\sigma,\tau))$ 的存在性等价于伴随方程(6.4)在 $[\sigma-r,\tau-r]$ 上满足条件(6.10)解的存在性.

应用 $y_\tau^0=(I+\Omega(\tau))^{-1}\psi,y_\sigma^0=\hat{T}(\sigma,\tau)y_\tau^0$ 以及定理 6.1 类似的叙述，则由(6.12)⇒(6.11)，证毕.

**例 4** 考虑差分微分方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-r)+h(t)\quad \sigma\leqslant t\leqslant\tau \tag{6.13}$$

在第 I 类边值问题是求一个(6.13)的解对 $\varphi\in C$ 使成立

$$x_\sigma=M\varphi,\quad x_\tau=N\varphi \tag{6.14}$$

其中 $(M\varphi)\theta=M\varphi(\theta)$，$(N\varphi)(\theta)=N\varphi(\theta)$，$-r\leqslant\theta\leqslant0$，$M,N$ 为 $n\times n$ 阵.

由 Riese 定理与(6.13)中 $L(t,x_t)$ 对应的阵 $\eta(t,\theta)$ 定义为

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\geqslant0\\ -A(t) & -r<\theta<0\\ -A(t)-B(t) & \theta\leqslant-r\end{cases}$$

故

$$(\Omega(t)\psi)(\theta)=-\int_\theta^0\psi(\alpha)A(t+\alpha)d\alpha\qquad -r\leqslant\theta\leqslant0 \tag{6.15}$$

而且对 $\forall\ \psi\in B_0,\varphi\in C$，$\langle\psi,M\varphi\rangle=\langle\psi M,\varphi\rangle$，这里 $(\psi M)\theta=\psi(\theta)M$，$\theta\in[-r,0]$，故

$$(M^*\psi)(\theta)=\psi(\theta)M\quad \theta\in[-r,0]$$

$$(N^*\psi)(\theta)=\psi(\theta)M\quad \theta\in[-r,0]$$

由定理 6.2 我们的问题有解的必要条件是

$$\int_\sigma^\tau y(\xi)h(\xi)d\xi=0 \tag{6.16}$$

对伴随方程

$$\dot{y}(t)+y(t)A(t)+y(t+r)B(t+r)=0 \tag{6.17}$$

满足条件(6.10)的一切解成立.若$\mathscr{R}[N-T(\tau,\sigma)M]$是闭的,则条件(6.16)还是充分的.此时(6.10)取形式

$$\left[y_\sigma(\theta)-\int_\theta^0 y_\sigma(\alpha)A(\sigma+\alpha)d\alpha\right]M=\left[y_\tau(\theta)-\int_\theta^0 y_\tau(\alpha)A(\tau+\alpha)d\alpha\right]N \tag{6.18}$$

# 第四章

# RFDE 的基本理论

本章对有界滞量 RFDE($f$)给出：存在唯一性，正、反向延拓，连续依赖性与可微性定理. 此外还讨论了广义解的存在性以及存在唯一性对滞量的依赖关系.

## §1 存在唯一性

### 1. 存在定理

设 $\sigma\in R$, $\varphi\in C([-r,0],R^n)$, $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，算子 $f:\Omega\to R^n$ 连续，初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t)\\ x_\sigma=\varphi\end{cases}\tag{1.1}$$

等价于积分方程

$$\begin{cases}x(t)=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds\\ x_\sigma=\varphi,\quad t\geqslant\sigma\end{cases}\tag{1.2}$$

**引理 1.1** 若 $x\in C([\sigma-r,\sigma+\alpha],R^n)$，则 $x_t$ 当 $t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$ 时关于 $t$ 是连续的.

**证** 由 $x(t)$ 在$[\sigma-r,\sigma+\alpha]$上一致连续 $\Rightarrow$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ 使当 $|t-s|<\delta$ 时，$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ 在区间$[\sigma,\sigma+\alpha]$上，当 $|t-s|<\delta$ 时，$|x(t+\theta)-x(s+\theta)|<\varepsilon$, $\theta\in[-r,0]$ 即 $x_t$ 在$[\sigma,\sigma+\varepsilon]$

上连续.

为了下文需要扩充$\varphi$的定义范围，引入$\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi}=\begin{cases}\varphi & \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma\\ \varphi(0) & t\geqslant\sigma\end{cases}$$

并引入零初始条件．设$x(t)$是(1.1)过$(\sigma,\varphi)$的解，令

$$x(\sigma+t)=\hat{\varphi}(\sigma+t)+y(t)\qquad t\geqslant -r \tag{1.3}$$

用(1.3)代入(1.2)，注意到$t\in[-r,0]$时，

$$y(t)=x(\sigma+t)-\hat{\varphi}(\sigma+t)=x(\sigma+t)-\varphi(\sigma+t)=0$$

而$t\geqslant 0$时，

$$y(t)=x(\sigma+t)-\hat{\varphi}(\sigma+t)=x(\sigma+t)-\varphi(0)=\int_\sigma^{\sigma+t}f(s_1,x_{s_1})ds_1$$

$$=\int_0^t f(s+\sigma,x_{s+\sigma})ds=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_{s+\sigma}+y_s)ds$$

其中令$s_1=s+\sigma$. 再记$y_0=y(0)$，则(1.2)化为零初值问题.

若干记号：

$V$为$R\times C$的子集．$f:V\to R^n$连续，$f$的全体记为$C(V,R^n)$.
$C^0(V,R^n)\subseteq C(V,R^n)$是有界泛函组成的子集，赋$C^0$以范数

$$|f|_0=\sup_{(t,\varphi)\in V}|f(t,\varphi)| \tag{1.4}$$

则$C^0(V,R^n)$是一个 Banach 空间.

对$\forall\ \alpha,\beta\in R$，定义

$$I_\alpha=[0,\alpha],\quad B_\beta=\{\psi\in C:|\psi|\leqslant\beta\}$$

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta)=\{y\in C[-r,\alpha],R^n),y_0=0,y_t\in B_\beta.t\in I_\alpha\} \tag{1.5}$$

则我们有

**引理 1.2** 设$\Omega\subseteq R\times C$是开集，$W\subseteq\Omega$是紧集，$f^0\in C(\Omega,R^n)$是给定的．则

(1)$\exists$ $W$的一个邻域$V\subseteq\Omega$使$f^0\in C^0(V,R^n)$，且$\exists$ $f^0$的一个邻域$U\subseteq C^0(V,R^n)$及正常数$M$使

$$|f(\sigma,\varphi)|<M,(\sigma,\varphi)\in V,f\in U \tag{1.6}$$

(2)对$\forall$ $(\sigma^0,\varphi^0)\in W$,$\exists$ $\alpha,\beta$,当$t\in I_\alpha,y\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$时,$(\sigma^0+t,y_t+\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$.

**证** 对(1),由$W$是紧的,$f^0$在$\Omega$中连续$\Rightarrow(\sigma^0,\varphi^0)\in W$时$\exists$ $M_1$使成立$|f^0(\sigma^0,\varphi^0)|<M_1$.同时由$f^0$的连续性,$\exists$常数$\bar{\alpha},\bar{\beta},\varepsilon$使成立

$$\begin{aligned}&|f^0(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi)|<M_1+\varepsilon\triangleq M\\&(\sigma^0,\varphi^0)\in W,(t,\psi)\in I_{\bar{\alpha}}\times B_{\bar{\beta}}\end{aligned} \tag{1.7}$$

再构造$V$为形式

$$V=\{(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi):(\sigma^0,\varphi^0)\in W,(t,\psi)\in I_{\bar{\alpha}}\times B_{\bar{\beta}}\}$$

则$V\subseteq\Omega$,$f^0$在$V$中有界,即$f^0\in C^0(V,R^n)$并且$\exists$ $f^0$的充分小邻域$U\subseteq C^0(V,R^n)$使(1.6)成立.

对(2),取$\beta\in(0,\bar{\beta})$,由$W$是紧的,故可选择$\alpha\in(0,\bar{\alpha})$使对$\forall$ $(\sigma^0,\varphi^0)\in W,t\in I_\alpha,|\varphi^0|<\beta$时成立

$$|\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t}-\varphi^0|<\bar{\beta}-\beta$$

由此推出

$$|y_t+\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t}-\varphi^0|\leqslant|y_t|+|\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t}-\varphi^0|<\beta+\bar{\beta}-\beta=\bar{\beta}$$

其中$|y_t|\leqslant\beta$,$|\varphi^0|\leqslant\beta$,即当$t\in I_\alpha,y\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$时$(\sigma^0+t,y_t+\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$

由积分方程(1.2)可以定义积分算子$T$为

$$T:W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to C([-r,\alpha],R^n)$$

$$T(\sigma,\varphi,f,y)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)ds,t\in I_\alpha$$

$$T(\sigma,\varphi,f,y)=0,t\in[-r,0]$$

**引理1.3** 设$\Omega\subseteq R\times C$为开集,$W\subseteq\Omega$为紧集,$f^0\in C(\Omega,R^n)$给定,邻域$U,V$及常数$M,\alpha,\beta$是引理1.2中取定的,则

(1)$T$是连续的.

(2)在$C([-r,\alpha],R^n)$中存在紧集$K$使

$$T: W\times U\times \mathscr{A}(\alpha,\beta)\to K$$

(3)若 $M\alpha\leqslant\beta$，则有

$$T: W\times U\times \mathscr{A}(\alpha,\beta)\to \mathscr{A}(\alpha,\beta)$$

**证** 由 $T$ 的定义显然有 $T: W\times U\times \mathscr{A}(\alpha,\beta)\to C([-r,\alpha],R^n)$，先证(2)：由(1.6)对$\forall\ t\in I_\alpha$ 有

$$|T(\sigma,\varphi,f,y)(t)-T(\sigma,\varphi,f,y)(\tau)|\leqslant M|t-\tau|$$

$$|T(\sigma,\varphi,f,y)(t)|\leqslant M\alpha$$

定义紧集 $K$ 为

$$K=\{g\in C([-r,\alpha],R^n): |g(t)-g(\tau)|\leqslant M|t-\tau|, |g(t)|\leqslant M\alpha\}$$

所以 $T: W\times U\times \mathscr{A}(\alpha,\beta)\to K$，若 $M\alpha\leqslant\beta$，则 $K\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)$. 故(3)成立. 最后证(1)：设$(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\in W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)$且当 $k\to\infty$ 时$(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\to(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)\in W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，由 $T(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\in K$ 且 $K$ 是紧的$\Rightarrow\exists$ 子序列(不妨设为它自身)以及一个 $\gamma\in K$ 使

$$T(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\to\gamma, k\to\infty$$

由于对$\forall\ s\in I_\alpha$ 有

$$f^k(\sigma^k+s,\tilde{\varphi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)\to f^0(\sigma^0+s,\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)$$

由引理 1.2$\Rightarrow$诸 $f^k$ 一致有界，故用 Lebesque 控制收敛定理推知对$\forall\ t\in I_\alpha$ 有

$$\gamma(t)=\lim_{k\to\infty}\int_0^t f^k(\sigma^k+s,\tilde{\varphi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)ds=\int_0^t f^0(\sigma^0+s,\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)ds$$
$$=T(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)(t)$$

因此所有子序列收敛的极限是 $\gamma(t)=T(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)(t)$，并且由(1.6)每个子序列都有收敛的子序列，即原序列收敛，$T$ 的连续性得证.

下面我们要用到 Schauder 不动点定理：

"设 $X$ 为 Banach 空间，$U$ 为 $X$ 的有界凸集，算子 $T: U\to U$ 是

全连续的，则 $T$ 在 $U$ 中有一个不动点”.

其中 $T$ 全连续 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 有界集 $B\subset U$，$TB$ 是准紧的，或者说 $TB$ 的闭包是紧的.

**定理 1.1** 设 $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$f^0\in C(\Omega,R^n)$，若 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$，则存在 RFDE$(f^0)$ 过 $(\sigma,\varphi)$ 的一个解.

**证** 取 $W=\{(\sigma,\varphi)\}$ 为一单点集，由于 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 是空间 $C([-r,\alpha],R^n)$ 的有界闭凸集，由引理 1.3 及 Schauder 不动点定理立即推知：全连续算子 $T=T(\sigma,\varphi,f^0,\cdot)$ 在 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 中有一个不动点，即为 (1.1) 过 $(\sigma,\varphi)$ 的解 $x(\sigma,\varphi,f^0)(t)$.

**定理 1.2** 设 $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$W\subseteq\Omega$ 是紧集，$f^0\in C(\Omega,R^n)$ 给定，则 $\exists$ $W$ 的邻域 $V\subseteq\Omega$ 使 $f^0\in C^0(V,R^n)$；$\exists$ $f^0$ 的一个邻域 $U\subseteq C^0(V,R^n)$ 和 $\alpha>0$ 使得对 $\forall$ $(\sigma,\varphi)\in W$，$f\in U$，RFDE$(f)$ 在 $[\sigma-r,\sigma+\alpha]$ 上存在过 $(\sigma,\varphi)$ 的一个解 $x(\sigma,\varphi,f)(t)$.

用 $f$ 代替 $f^0$，证明与定理 1.1 类似.

**定理 1.3** 设 $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$f\in C(\Omega,R^n)$，$f(t,\varphi)$ 在 $\Omega$ 中的每一个紧集里关于 $\varphi$ 满足 Lipschitz 条件

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant K|\varphi-\psi| \tag{1.8}$$

若 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$，则 (1.1) 过 $(\sigma,\varphi)$ 有唯一的一个解.

**证** 由定理 1.1，RFDE$(f)$ 过 $(\sigma,\varphi)$ 的解存在. 如引理 1.2 定义 $I_\alpha,B_\beta$. 设 $x,y$ 都是 (1.1) 在 $[\sigma-r,\sigma+\alpha]$ 上过 $(\sigma,\varphi)$ 的解，$x_\sigma=y_\sigma=\varphi$，则

$$x(t)-y(t)=\int_\sigma^t[f(s,x_s)-f(s,y_s)]ds$$

$$x_\sigma-y_\sigma=0 \qquad t\geqslant\sigma$$

若在任何包含轨道 $\{(t,x_t)\}$，$\{(t,y_t)\}$，$t\in I_\alpha$ 的紧集中，$f(t,\varphi)$ 在此紧集中的 Lipschitz 常数为 $K$，选取 $\alpha^*$ 使 $k\alpha^*<1$，$\alpha^*\leqslant\alpha$. 当 $t\in I_{\alpha^*}=[\sigma,\sigma+\alpha^*]$ 时有

$$|x(t)-y(t)|<\int_{\sigma}^{t}k|x_s-y_s|ds\leqslant k\alpha^*\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x_s-y_s|$$

$$<\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x_s-y_s|,t\in I_{\alpha^*}$$

由 $I_{\alpha^*}$ 是闭区间，故有

$$\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(t)-y(t)|<\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x_s-y_s|,t\in I_{\alpha^*} \tag{1.9}$$

当 $t\in[\sigma-r,\sigma]$时$|x(t)-y(t)|=0$，故有

$$\sup_{s\in I_{\alpha^*}}|x(t)-y(t)|<\sup_{s\in I_{\alpha^*}}|x_s-y_s|$$

这与(1.9)不合，重复上述论证可得在$[\sigma+\alpha^*,\sigma+2\alpha^*]$上，$x(t)=y(t)$，依此类推定理得证.

## 2. 存在唯一性与滞量的关系

定理 1.1～定理 1.3 实际上是指系统(1.1)连续解的存在唯一性，而且唯一性定理只是一个充分条件. 不仅如此，对于满足 $0\leqslant\tau(t)\leqslant r=\text{const}.$ 的滞量 $\tau(t)$，我们并没有说诸定理的条件一定成立. 换言之，可以给出一些例子说明 $\tau(t)$的特别选择可能改变某些 FDE 解的存在唯一性.

**例 1** 考虑方程族

$$\dot{x}^3(t)+\dot{x}^2(t)(1-\dot{x}(t-\tau))+\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)$$

$$-(1+\dot{x}^2(t))(x(t)-x(t-\tau))+1=0 \tag{1.10}$$

其中 $\tau\in R_+$，当 $\tau=0$ 时，(1.10)化为常微分方程

$$1+\dot{x}^2(t)=0$$

没有任何实解. 而当 $\tau>0$ 时，(1.10)可简化为

$$(1+\dot{x}^2(t))[\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)-(x(t)-x(t-\tau))+1]=0$$

即

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)=x(t)-x(t-\tau)-1 \tag{1.11}$$

这个 NDDE 的解总是存在且唯一的.

反之我们有

**例 2** 对方程

$$\dot{x}(t)=(x(t)-\dot{x}(t-\tau))g(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{1.12}$$

当 $\tau=0$ 时(1.12)为 $\dot{x}(t)=0$，不问 $g$ 如何选择、对任何初值解总是存在的，反之若 $\tau>0$，只要特别选取函数 $g(t,x(t),x(t-\tau))$，可使(1.12)对给定的初始函数 $\psi$，(1.12)解不存在.

对唯一性也有反例.

**例 3** 对 RDDE

$$\dot{x}(t)=(x(t-\tau)-k)^{\frac{1}{3}} \tag{1.13}$$

其中 $k=\text{const.}\ x\in R,\tau\in R_{+}$，当 $\tau=0$ 时(1.13)是一个常微分方程

$$\dot{x}(t)=(x(t)-k)^{\frac{1}{3}} \tag{1.14}$$

显然过$(0,k)$的(1.14)的解存在但非唯一，其中一个为 $x(t)\equiv k$，另一个解为 $x(t)=k+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t^{\frac{3}{2}},t\geqslant 0$，但只要 $\tau>0$，不问它如何地小，给定初始函数$\psi\in C([-\tau,0],R^{n})$，用分步法，只要$(\psi(t)-k)^{\frac{1}{3}}$可积，则过$(0,\psi)$的解存在且唯一.

反之有如下例子：

**例 4** 设 $\tau\in R_{+}$，方程族

$$\dot{x}(t)=(x(t)-x(t-\tau))^{\frac{1}{3}} \tag{1.15}$$

当 $\tau=0$ 时化为 $\dot{x}(t)=0$，显然解存在且唯一，而 $\tau>0$ 时对 $\psi\equiv k=\text{const.}\ t\in[-\tau,0]$，由例 3 推知在$[0,\tau]$上方程至少有两个以 $\psi$ 为初始函数的解，不再成立唯一性.

### 3. FDE 解唯一性的注释

为方便计以 RDDE 为例

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{1.16}$$

其中 $\tau=\text{const.}>0$，设(1.16)过$(t_0,\psi)$的解存在且唯一. $\psi\in C([-\tau,0],R)$，并且解定义在$[t_0-\tau,A]$上，$t_0<A=\text{const.}$ 或者 $A=$

$+\infty$.

在初始集 $E_{t_0}=[t_0-\tau,t_0]$上给定两个初始函数 $\psi_1,\psi_2$,相应的解记为 $x_1(t,t_0,\psi_1),x_2(t,t_0,\psi_2)$,所谓两个解相等是指

$$x_1(t,t_0,\psi_1)=x_2(t,t_0,\psi_2)\quad t\in[t_0-\tau,\infty) \tag{1.17}$$

这当然含有 $\psi_1(t)=\psi_2(t),t\in[t_0-\tau,t_0]$.

由于解存在且唯一,若 $\psi_1(t)=\psi_2(t),t\in[t_0-\tau,t_0]\Rightarrow x_1(t,t_0,\psi_1)=x_2(t,t_0,\psi_2)$. 当 $t\in[t_0,A]$上成立. 反之,只要 $\psi_1(t)\neq\psi_2(t),t\in[t_0-\tau,t_0]$,则两解 $x_1,x_2$ 自 $t_0$ 以后不问它们是否相交或者甚至完全相等,都应当认为二解不相等,因为(1.17)不成立.

换句话说,FDE 解的唯一性允许积分曲线相交,甚至在某区间上重合,这与常微分方程完全不同.

**例** 5　设 $x\in R$,方程 $\dot{x}(t)=-x(t)$的相异轨线必不相交. 若 $\tau=\frac{\pi}{2}$,相应的 FDE $\dot{x}(t)=-x(t-\frac{\pi}{2})$有解 $\sin t$ 和 $\cos t$,它们相交无限多次,但方程满足唯一性条件.

**例** 6　对 Winston-Yorke 方程[76]

$$\dot{x}(t)=b(t)x(t-1) \tag{1.18}$$

$$b(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ \cos 2\pi t-1, & 0<t\leqslant 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

当 $t\leqslant 0$ 时(1.18)为 $\dot{x}(t)=0\Rightarrow x(t)=k=\text{const}$. 以它们为初始函数,用分步法在[0,1]上(1.18)为

$$\dot{x}(t)=(\cos 2\pi t-1)k,x(0)=k \tag{1.19}$$

求解(1.19)得

$$x(t)=k+k\int_0^t(\cos 2\pi t-1)dt$$

$$=k(1+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t-t)\quad t\in[0,1]$$

对$\forall\ k\in R$ 有 $x(1)=0$,又当 $t\geqslant 1$ 时,$b(t)=0\Rightarrow$(1.18)为 $\dot{x}(t)=0$,

$x(1)=0\Rightarrow x(t)=0,t\geqslant 1$,即所有的解自 $t=1$ 以后全部重合于零解 $x=0$,但(1.18)满足解的存在唯一性条件.

**例 7** 考虑 FDE 的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=a(t)[x^{\frac{1}{2}}(t)-x^{\frac{1}{2}}(t-1)] \quad t\geqslant 0\\&x(t)=\psi(t), \quad t\in[-1,0]\end{aligned} \tag{1.20}$$

其中

$$a(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 1\\ t-1 & t>1\end{cases} \tag{1.21}$$

在 $E_0=[-1,0]$ 上取 $\psi(t)$ 使 $\psi(0)=0$,用分步法求[0,1]上的解,由 $\dot{x}(t)=0\Rightarrow x(t)\equiv 0$,在[1,2]上(1.20)化为初值问题

$$\dot{x}(t)=(t-1)x^{\frac{1}{2}}(t),x(1)=0 \tag{1.22}$$

求解(1.22)得 $x(t)=\frac{1}{16}(t-1)^4$ 与 $x=0$,即由 $\psi(t)$ 确定的解当 $t\geqslant 1$ 以后分为两支,从而破坏了唯一性.(这里注意到在 $t=1$ 处解 $x=0$ 与 $x=\frac{1}{16}(t-1)^4$ 的导数也相等).

唯一性的含义如此,意味着在 $R^n$ 中研究 FDE 的几何理论是十分困难的.

## §2 连续依赖性与可微性

### 1. 连续依赖性定理

这里指的是解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$ 关于 $\sigma,\varphi,f$ 的连续依赖性问题. 对 RFDE($f$),先叙述引理 1.2 的一个应用:设 $\Omega\subseteq R\times C$ 是开集,$(\sigma^k,\varphi^k)\to(\sigma^0,\varphi^0)$,其中 $(\sigma^k,\varphi^k)\in\Omega$,$(\sigma^0,\varphi^0)\in\Omega$,$k_0$ 足够大,定义

$$W=\{(\sigma^k,\varphi^k):k=0,k\geqslant k_0\} \tag{2.1}$$

$\Rightarrow W$ 是紧的. 由引理 1.2,$\exists\ \bar{\alpha},\bar{\beta}\in R^+-\{0\}$,使 $W\subseteq V\subseteq\Omega$,$V$ 也

是紧的，定义为

$$V=\{(\sigma^k+t),(\varphi^k+\psi):(\sigma^k,\varphi^k)\in W,(t,\psi)\in I_\alpha\times I_\beta\}\tag{2.2}$$

并且∃ $\beta\in(0,\bar{\beta}),\alpha\in(0,\bar{\alpha})$，使当$(t,\psi)\in I_\alpha\times I_\beta$时

$$(\sigma^k+t,\varphi^k+\psi)\in V,|f^k(\sigma^k+t,\varphi^k+\psi)|<M,k=0,k>k_0$$

或者当 $y^k\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$时，对 $\varphi^k$ 的扩张 $\hat{\varphi}^k,\psi=y_t^k$ 成立

$$\begin{aligned}&(\sigma^k+t,\hat{\varphi}^k_{\sigma^k+t}+y_t^k)\in V\\&|f^k(\sigma^k+t,\hat{\varphi}^k_{\sigma^k+t}+y_t^k)|<M\end{aligned}\qquad k=0,k\geqslant k_0\tag{2.3}$$

我们有

**定理** 2.1　设$\Omega\subseteq R\times C$是开集，$W$、$V$ 如(2.1)(2.2)定义是紧集．若$\sigma^k\to\sigma^0$，$\varphi^k\to\varphi^0$，$|f^k-f^0|_v\to0$．则由 $\sigma^k\to\sigma^0$，∃ $b_1$ 使$\sigma^k+\alpha\geqslant b_1$，我们有

(1)$k_0$ 适当大时，方程

$$\dot{x}(t)=f^k(t,x_t),k=0,k\geqslant k_0\tag{2.4}$$

过$(\sigma^k,\varphi^k)$的解 $x^k(t)$在$[\sigma^k-r,\sigma^k+\alpha]$上存在(当然也在$[\sigma^k-r,b_1]$上存在)．

(2)对∀ $\varepsilon>0$，∃ $k_*(\varepsilon)$，当 $k\geqslant k_*$时 $x^k(t)$在$[\sigma^0-r+\varepsilon,b_1]$上有定义，当 $k\to\infty$时 $x^k(t)\to x^0(t)$，当 $t\in[\sigma^0-r+\varepsilon,b_1]$时是一致的．

**证**　由定理 1.2 立即推出(1)成立．对(2)，记 $y^k=T(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)(t)\in\mathscr{K}\subset C([-r,\alpha],R^n)$，$\mathscr{K}$ 为紧集，由引理 1.3⇒$T$ 是连续的，且有

$$y^k(t)=x^k(\sigma^k+t)-\hat{\varphi}^k(\sigma^k+t)\in\mathscr{K}$$

由此推出∃ $\{y^k(t)\}$的子序列$\{y^j(t)\}$在$[-r,\alpha]$上一致收敛于某一函数 $y^*(t)$，与定理 1.1 的证明类似，我们有

$$y^*(t)=T(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)(t)=y^0(t)$$

同样由于序列$\{y^k(t)\}$的每一个子序列都有一收敛的子序列⇒$y^k(t)\to y^0(t)$，$k\to\infty$，或者

$$x^k(\sigma^k+t)=y^k(t)+\hat{\varphi}^k(\sigma^k+t)$$

$$\to y^0(t)+\hat{\varphi}(\sigma^0+t)=x^0(\sigma^0+t)$$

亦即在区间$[\sigma^0-r,\sigma^0+a]$上$x^k(t)\to x^0(t)$. 再由定理1.2每次扩展$a$长度,有限次后覆盖区间$[\sigma^0-r,b_1]$. 证毕.

### 2. 可微性定理

对RFDE$(f)$(1.1),解$x(t,\sigma,\varphi,f)$对$\sigma$的导数一般是不存在的,但对$\varphi,f$,则有如下的定理.

记$C^p(\Omega,R^n)$,$p\geqslant 0$为$\Omega$到$R^n$的连续可微$P$次函数全体构成的线性空间,赋以范数

$$|\varphi|=\max_{0\leqslant i\leqslant p,\theta\in[a,b]}\sup|\varphi^{(i)}(\theta)|,\varphi\in C^p \tag{2.5}$$

则$C^p$为一Banach空间. 先引用泛函分析的两个基本结果:

**定义 2.1** 设$U$为Banach空间$X$的子集,$T:U\to X$,若$\exists\ \lambda\in[0,1)$使得对$\forall\ x,y\in U$成立.

$$|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|$$

则映射$T$称为$U$上的一个压缩,若$V$是Banach空间$Y$的子集,$T:U\times V\to X$,若$\exists\ \lambda\in[0,1)$使得

$$|T(x_1,y)-T(x_2,y)|\leqslant\lambda|x-y|$$

对$\forall\ x_1,x_2\in U$及$y\in V$成立,则称$T$在$U$上关于$V$是一个一致压缩映射.

**引理 2.1** (压缩映象原理)若$U$是Banach空间的闭子集,$T:U\to U$是一个压缩映射,则$T$在$U$中有唯一一个不动点.

**引理 2.2** 若$U$为Banach空间$X$的闭子集,$V$为Banach空间$Y$的一个子集,$T:U\times V\to U$是关于$V$在$U$上的一致压缩且$T$是连续的. 则$T(\cdot,y)$在$U$中的唯一一个不动点$x(y)$关于$y$是连续的,而且若$U,V$是开集$U^0,V^0$的闭包,$T(x,y)$关于$x,y$有连续一阶导数,则$x(y)$关于$y$有连续一阶导数,对高阶导数有类似的结论.

**定理 2.2** 对方程(1.1),若$f\in C^p(\Omega,R^n)$,$P\geqslant 1$,则

(1)(1.1)过$(\sigma,\varphi)$的解$x(t,\sigma,\varphi,f)$存在且唯一；

(2)在$x(t)$的定义域内任一紧集中的$t$，$x$关于$(\varphi,f)$连续可微；

(3)当$t\geqslant\sigma$时，$D_\varphi x(t,\sigma,\varphi,f)$是$C\to R^n$的线性算子，且$D_\varphi x(\sigma,\sigma,\varphi,f)=I$；

(4)对$\forall\ \psi(t)\in C$，$y(t)=D_\varphi x(t,\sigma,\varphi,f)\psi(t)$满足变分方程

$$\dot{y}(t)=D_\varphi f(t,x_t(\sigma,\varphi,f))y_t \tag{2.6}$$

(5)对$\forall\ t\in\sigma$，$D_f x(t,\sigma,\varphi,f)$是$C^p(\Omega,R^n)\to R^n$的线性算子，且$D_f x(\sigma,\varphi,f)(\sigma)=0$；

(6)对$\forall\ g\in C^p(\Omega,R^n)$，$D_f x(\sigma,\varphi,f)g(t)$满足非齐次线性变分方程

$$\dot{Z}(t)=D_\varphi f(t,x_t(\sigma,\varphi,f))Z_t+g(t,x_t(\sigma,\varphi,f)) \tag{2.7}$$

**证** 由定理1.1⇒(1)成立.

设(1.1)过$(\sigma,\varphi)$的解$x(\sigma,\varphi,f)(t)$的最大存在区间是$[\sigma-r,\sigma+\omega]$，给定$b<\omega$. 先证$x(\sigma,\varphi,f)(t)$在区间$[\sigma-r,\sigma+b]$上关于$\varphi$连续可微：事实上，∃ $\varphi$的一个邻域$U$，使得当$\psi\in U$时$x(t,\sigma,\psi,f)$在$t\in[\sigma-r,\sigma+b]$上有定义. 记

$$W=\{(t,x_t):t\in[\sigma,\sigma+b]\}$$

则$W$是紧的. 沿用§1的记号，可以确定引理1.2中的诸常数$M$，$\alpha$，$\beta$，以及集$U$，$V$. 选择$\alpha$使$M\alpha\leqslant\beta$且$K\alpha<1$，$K$是$f$关于$\varphi$的导数在$\Omega$上的界限.

若$x(t_0+t)=\tilde{\varphi}(\sigma+t)+y(t)$，$t\in I_\alpha=[0,\alpha]$，则$y$是引理1.3中$T(\sigma,\varphi,f)$的一个不动点.

另一方面，由$\alpha$，$\beta$的选择⇒$T(\sigma,\varphi,f)$是$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$上的一个压缩映射，而且压缩常数$\lambda\in[0,1)$与$(\sigma,\varphi,f)\in V\times U$的选择无关. 由于$T(\sigma,\varphi,f)$关于$\varphi$，$f$连续可微，故引理2.2⇒不动点$y(\sigma,\varphi,f)$在$\Omega$上连续可微. 而

$$x(\sigma,\varphi,f)(\sigma+t)=\tilde{\varphi}(\sigma+t)+y(\sigma,\varphi,f)(t),t\in[0,b]$$

于是 $x(\sigma,\varphi,f)(t)$关于 $\varphi,f$ 也是连续可微的.(2)得证. 对(3)～(6)的证明,只要注意到 Fréchet 导数是线性算子,便容易验证. 因为 $D_\varphi x(\sigma,\varphi,f)$是 $C\to R^n$ 的线性算子,$D_f x(\sigma,\varphi,f)$是 $C^p(\Omega,R^n)\to R^n$ 的线性算子. 显然成立

$$D_\varphi x_\sigma(\sigma,\varphi,f)=\frac{d\varphi}{d\varphi}=I$$

$$D_\varphi x(\sigma,\varphi,f)(\sigma)=\frac{d\varphi(0)}{df}=0$$

由于

$$x(t,\sigma,\varphi,f)=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s(\sigma,\varphi,f))ds$$

故对$\forall\ \psi\in C$ 有

$$D_\varphi(t,\sigma,\varphi,f)\psi=\psi(0)+\int_\sigma^t D_\varphi f(s,x_s(\sigma,\varphi,f))D_\varphi x_s(\sigma,\varphi,f)\psi ds$$

即

$$\frac{d}{dt}D_\varphi x(t,\sigma,\varphi,f)\psi=D_\varphi f(t,x_t(\sigma,\varphi,f))D_\varphi x_t(\sigma,\varphi,f)\psi$$

若令 $D_\varphi x(t,\sigma,\varphi,f)\psi=y(t)$,则 $y_t=D_\varphi x_t(\sigma,\varphi,f)\psi\Rightarrow D_\varphi x(t,\sigma,\varphi,f)$ 满足线性变分方程(2.6).

对(6)可以类似证明.

我们一开始就指出 RFDE($f$)的解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$对初始时刻 $\sigma$ 的导数一般是不存在的,这一点是与常微分方程极不相同的. 例如对最简单的方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t-1) \tag{2.8}$$

其中 $a(t)$连续,设 $x(t,\sigma,\varphi)$是(2.8)过$(\sigma,\varphi)$在区间$[\sigma,\sigma+1]$上的解,则对 $h>0$ 有

$$\begin{aligned} x(t,\sigma+h,\varphi)&=\varphi(0)+\int_{\sigma+h}^t a(s)x(s-1,\sigma+h,\varphi)ds \\ &=\varphi(0)+\int_{\sigma+h}^t a(s)\varphi(s-1-\sigma-h)ds \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$x(t,\sigma,\varphi)=\varphi(0)+\int_{\sigma}^{t}a(s)x(s-1,\sigma,\varphi)ds$$
$$=\varphi(0)+\int_{\sigma}^{t}a(s)\varphi(s-1-\sigma)ds \tag{2.10}$$

由(2.9)(2.10)推出

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t,\sigma+h,\varphi)-x(t,\sigma,\varphi)}{h}=\frac{\partial x(t,\sigma,\varphi)}{\partial\sigma}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{\sigma+h}^{t}a(s)\varphi(s-1-\sigma-h)ds-\int_{\sigma}^{t}a(s)\varphi(s-1-\sigma)ds\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{\sigma}^{t-h}a(s+h)\varphi(s-1-\sigma)ds-\int_{\sigma}^{t}a(s)\varphi(s-1-\sigma)ds\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{0}^{t}a(s+h)\varphi(s-1-\sigma)ds-\int_{0}^{t-h}a(s+h)\varphi(s-1-\sigma)ds\right]+$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{\sigma}^{t}\frac{a(t+h)-a(s)}{h}\varphi(s-1-\sigma)ds$$

$$=-a(t)\varphi(t-1-\sigma)+\int_{\sigma}^{t}\dot{a}(s)\varphi(s-1-\sigma)ds \tag{2.11}$$

(2.11)表明$\frac{\partial x(t,\sigma,\varphi)}{\partial\sigma}$存在性附加了$a(t)$可微这一条件.否则(2.11)未必成立,因而$\frac{\partial x(t,\sigma,\varphi)}{\partial\sigma}$未必存在.

## §3 解的延拓

在§1中我们给出了初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t)\\ x_{\sigma}=\varphi\end{cases} \tag{3.1}$$

解的局部存在定理,其中$f$连续,由RFDE($f$)的特点和证明方法可以预期它沿$t$轴的正向有类似于常微分方程的延拓定理.

**定义 3.1** 设$x(t)$是(3.1)在$[\sigma-r,a]$上的一个解,$a>\sigma$.若存在一个$b>a$,使定义在$[\sigma-r,b)$上的函数$\bar{x}(t)$,在$[\sigma-r,a)$上等

于 $x(t)$，在$[\sigma,b)$上满足方程(3.1)，则称 $\hat{x}(t)$是 $x(t)$的一个延拓.

确切地说，$\hat{x}(t)$的定义域比 $x$ 延拓了$[a,b)$这一长度的区间. 若这种延拓不存在，则称 $x$ 是不可延拓解，$[\sigma-r,a)$叫做解的最大存在区间.

由 Zorn 引理，不可延拓解是存在的，并且最大区间必定不含有区间的右端点.

**定理** 3.1 设$\Omega\subseteq R\times C$是开集，$f\in C(\Omega,R^n)$，若 $x(t)$是(3.1)在$[\sigma-r,b)$上的一个不可延拓解，则对任何$\Omega$中的紧集 $W$，$\exists$ $t_W$ 使$(t,x_t)\notin W$，$t\in[t_W,b)$.

**证** $b=\infty$时定理显然成立. 设 $b$ 为常数，$b>\sigma$.

若 $r=0$，(3.1)为常微分方程初值问题，引用已知结果知定理结论成立. 若 $r>0$，设定理结论不真，则对紧集 $W$，存在实数序列$\{t_k\}$，$t_k\to b^-$以及$(t_k,x(t_k))\in W$. 它必有收敛子序列，为方便计即设$\{t_n\}$收敛. 且记$(t_k,x(t_k))\to(b,\psi)\in W$，对$\forall\ \varepsilon\in(0,r)$，只要 $k$ 适当大，$x(t_k+\theta)$在 $\theta\in[-r,-\varepsilon]$上都有定义，且

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\theta\in[-r,-\varepsilon]}|x(t_k+\theta)-\psi(\theta)|=0$$

由于$\varepsilon$是任意的$\Rightarrow x(b+\theta)=\psi(\theta)$，$\theta\in[-r,0)$. 故由 $\lim\limits_{\theta\to 0}x(b+\theta)=x(b)$，且定义 $x(b)=\psi(0)$，$x$ 可以延拓为$[\sigma-r,b]$上的连续函数，因$(b,x_b)\in W\subset\Omega$，以$(b,x_b)$为初值，由定理 1.1，$\exists$ $\alpha>0$ 使方程(3.1)在$[b,b+\alpha)$上有解存在，这与 $x(t)$的不可延拓性矛盾. 证毕.

**推论** 3.1 设$\Omega\subseteq R\times C$为开集，$f\in C(\Omega,R^n)$，若 $x$ 是(3.1)在$[\sigma-r,b)$上的一个不可延拓解，$W$ 为 $R\times C$ 中集 $W^0=\{(t,x_t):\sigma\leqslant t<b\}$的闭包，则 $W$ 的紧性意味着存在一个实数序列$\{t_k\}$，当 $k\to\infty$时 $t_k\to b^-$，使得$(t_k,x_{t_k})\to\partial\Omega$. 若 $r>0$，则存在一个 $\psi\in C$，使$(b,\psi)\in\partial\Omega$且当 $t\to b^-$时 $x(t,x_t)\to(b,\psi)$.

**证** 首先，由定理 3.1$\Rightarrow W$ 不完全包含在$\Omega$内，否则必有$(t,x_t)\notin W$，这与 $W$ 的定义不合. 由此推出$\exists$ 实数序列$\{t_k\}$，当 $k\to\infty$

时 $t_k \to b^-$ 使 $(t_K, x_{t_k}) \to \partial\Omega$.

若 $r>0$. 由定理 3.1 有 $x(b+\theta)=\psi(\theta)$, $(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$, 并定义 $x(b)=\psi(0)$ 使 $t\to b^-$ 时, $(t, x_t)\to(b,\psi)\in\partial\Omega$.

**定理** 3.2　设 $\Omega\subsetneq R\times C$ 为开集, $f: \Omega\to R^n$ 为全连续算子, $x(t)$ 是方程(3.1)在 $[\sigma-r, b)$ 上的一个不可延拓解, 则对 $R\times C$ 中任何有界闭集 $U\subset\Omega$, $\exists$ 一个 $t_U$, 使得对 $t_U\leqslant t<b$, $(t, x_t)\notin U$.

**证**　当 $r=0$ 时, $U$ 有界闭 $\Leftrightarrow U$ 紧, 由定理 3.1 即得本定理的结论. 当 $r>0$ 时, $b=\infty$ 定理结论显然成立. $b$ 为有限常数时, 若结论不真, 则存在一个实数序列 $\{t_k\}$, $t_k\to b^-$, 使得对一切 $k$, $(t_k, x_{t_k})\in U$. 因 $r>0$ 与定理 3.1 类似说明 $\Rightarrow x(t)$ 在 $\sigma-r\leqslant t<b$ 上是有界的. 显然, 对集 $\{(t, x_t): \sigma\leqslant r<b\}$ 的闭包中的 $(\tau,\varphi)$, 存在一个常数 $M$ 使得 $|f(\tau,\varphi)|<M$ 成立. 由(3.1)对应的积分方程得出

$$|x(t+\tau)-x(t)|=\left|\int_t^{t+\tau} f(s, x_s)ds\right|\leqslant M\tau$$

对 $\forall\ t, t+\tau<b$ 成立 $\Rightarrow x$ 在 $[\sigma-r, b)$ 上一致连续 $\Rightarrow\{(t, x_t): \sigma\leqslant t<b\}$ 属于 $\Omega$ 中的一个紧集 $\Rightarrow$ 与定理 3.1 矛盾. 证毕.

现在分析定理 3.1, 3.2 的条件. 二者不同之处在于: $f$ 连续 + $W$ 紧 $\Rightarrow$ 定理 3.1 成立, 若 $f$ 加强为全连续, 则 $W$ 可减弱为有界闭集, 即 $f$ 全连续 + $W$ 有界闭 $\Rightarrow$ 定理 3.2 成立.

**注** 3.1　在 $r=0$ 的情形, $C$ 中有界闭集可不具有紧性. 例如设 $A$ 是 $L_2$ 中一组完全的标准正交系: $\{\omega_k(t); t\in[0,1]\}$, $\rho(\omega_k, 0)=1$ $\Rightarrow A$ 有界, 但当 $i\neq k$ 时, $[\rho(\omega_i,\omega_k)]^2=\int_0^1[\omega_i^2(t)-2\omega_i(t)\omega_k(t)+\omega_k^2(t)]dt=2\Rightarrow A$ 中并不存在收敛的元素序列.

**注** 3.2　定理 3.2 给出的条件中"$f$ 是全连续算子"这一点是不可忽略的. 若 $f$ 不是全连续的, 则可把轨线 $\{(t, x_t): \sigma\leqslant t<b\}$ 本身视为 $\Omega$ 的有界闭集. 亦即可能存在曲线 $(t, x(t))$ 是不良振动的 $R\times R^n$ 的子集, 使 $t\to b^-$ 时 $(t, x_t)$ 在 $R\times C$ 中无极限点. 关于这

点，有如下例子：

**例** 8 （Л. Э. Эльсгольц）考虑方程

$$\dot{x}(t)=h(t-\tau(t),x(t-\tau(t))),t<0 \tag{3.2}$$

其中 $\tau(t)$、$h$ 及(3.2)的特别的解 $\psi(t)$ 都是特别设计的，即我们用以下步骤确定(3.2)及其解：

(1) $\tau(t)=t^2$.

(2)可以选取两个负数序列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$，使

$$a_k<a_{k+1},b_k<b_{k+1},k=1,2,\cdots \tag{3.3}$$

$$a_k\to 0,b_k\to 0,\text{当 } k\to\infty \tag{3.4}$$

$$a_k=b_k-\tau(b_k),b_k\leqslant a_{k+1}-\tau(a_{k+1}),k=1,2,\cdots \tag{3.5}$$

这是可以做到的，例如取 $b_k=-2^{-k}$，则 $a_k=-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{2k}}$，则(3.3)(3.4)成立.(3.5)第二式也成立，因为

$$b_k=\frac{-1}{2^k}\leqslant-\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)-\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)^2$$

即

$$\frac{1}{2^k}\geqslant\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}\right)$$

整理得

$$\begin{aligned}1&\geqslant\left(\frac{2^{k+1}+1}{2^{k+2}}\right)\left(\frac{2^{2k+2}+2^{k+1}+1}{2^{2k+2}}\right)\\&=\frac{1+2^{k+2}+2^{2k+3}+2^{3k+3}}{2^{3k+4}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}+\frac{1}{2^{3k+4}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6)对一切 $k=1,2,\cdots$ 成立.

(3)用这样的 $a_k$、$b_k$ 来定义(3.2)的解 $\psi(t)$.

令 $\psi(t)$ 是任意一个满足下述条件的连续可微函数

$$\psi(t)=\begin{cases}+1 & t\in(-\infty,a_1],[b_{2k},a_{2k+1}],k=1,2,\cdots\\ -1 & t\in[b_{2k-1},a_{2k}],k=1,2,\cdots\\ \hat{\psi}(t) & t\in(a_k,b_k),\dfrac{d}{dt}\hat{\psi}(t)\neq 0\end{cases}\tag{3.7}$$

如图 4.1 所示，在$[a_k,b_k]$上 $\psi$ 只要保持连续，可微，单调即可（下面 $\hat{\psi}(t)$也简记为 $\psi$）.

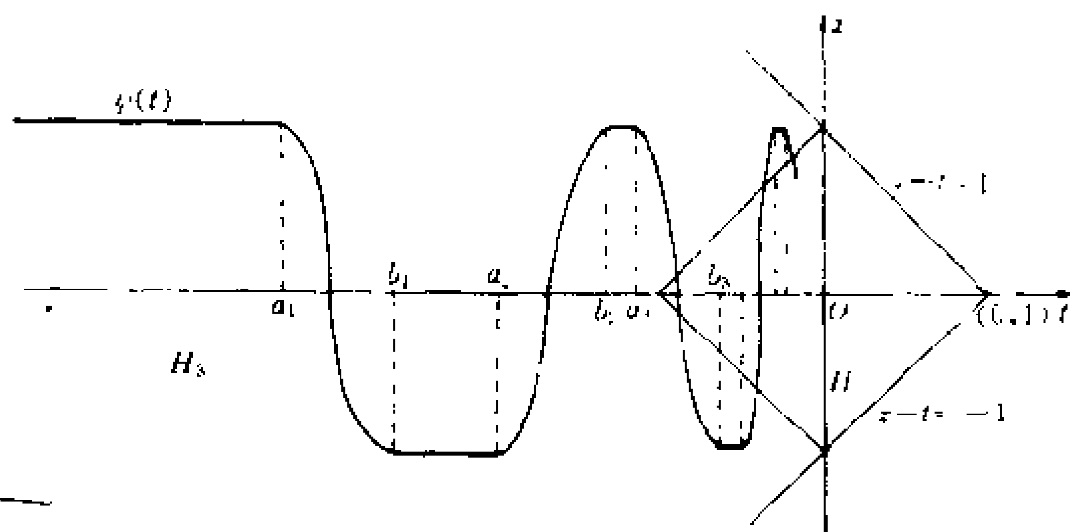



图 4.1

(4)现在定义(3.2)的右端函数 $h$.

令 $H$ 是由$|x|<1-t$ 的$(t,x)$的集合，即

$x+t<1\quad x>0$

$-x+t<-1\quad x<0$

在以(0,1)为顶点的锥域 $H$ 上定义 $h$. 我们有

$t\in(a_k,b_k)\Rightarrow t-\tau(t)\in[b_{k-1},a_k],k\geq 2$

$t\in(-\infty,b_1]\Rightarrow t-\tau(t)\in(-\infty,a_1],k\geq 2$

把 $H$ 分解成三个集合 $H_1,H_2,H_3$，使 $H=\bigcup_{i=1}^{3}H_i$

$$H_1=\{(t,x):t<0,x(t)=\psi(t)\}$$

$$H_2=\{(t,x):|t|+|x|\leqslant 1\},H_1\cap H_2\neq\varnothing(\text{空集})$$

$$H_3=H-H_1\cup H_2$$

(1)在 $H_1$ 上，亦即在曲线 $\psi(t)$上令

$$h(t-\tau(t),\psi(t-\tau(t)))=\dot{\psi}(t)$$

注意到，在$[b_{k-1},a_k]$上 $\dot{\psi}\neq 0,k\geqslant 2$. 在$(-\infty,b_1]\cup(a_k,b_k)$上 $\dot{\psi}=0$ 即 $h=0$.

(2)在 $H_2$ 上，令 $h=0$，这与(1)是相容的，因为在 $H_1$ 上 $h\neq 0$ 的点集都满足$|\psi|=1$.

(3)对 $h$ 在 $H_1,H_2$ 上的定义以任何方式延拓函数 $h$ 到 $H_3$ 上，只要保持 $h$ 在 $H$ 上的连续性即可.

至此，$\psi,h$ 已完全确定.

现在取 $\sigma<a_1,r=|\sigma-\min\{(t-t^2):\sigma\leqslant t\leqslant 0\}|$，(3.2)写成算子形式

$$\dot{x}(t)=h(t-t^2,x(t-t^2))=f(t,\varphi),t<0 \tag{3.8}$$

则 $f(t,\varphi)=h(t-t^2,\varphi(-t^2)),t\in[\sigma,0),\varphi\in C([-r,0],R)$，我们有以下几个事实：

$W=\{(t,\psi_t):\sigma\leqslant t<0\}$是有界闭集. 此因当 $t\to 0^-$时 $\psi_t$ 不存在极限，而 $W$ 的其他极限点都属于 $W\Rightarrow W$ 为闭集，由$|\psi_t|\leqslant 1\Rightarrow W$ 有界.

$x(t)=\psi(t)$是(3.2)在$[\sigma-r,0)$上的一个不可延拓解.这是我们设计 $\psi$ 与 $h$ 的本意，也可以理解为过$(\sigma,\varphi)$的一个解.这里 $x(t)=\varphi(t)=\psi(t)\equiv 1,t\in[\sigma-r,\sigma]$.

(3.8)中 $f$ 不是全连续的. 由 $h$ 的构造$\Rightarrow f(t,\varphi)$并不把有界闭集映为有界集. 而 $f(W)$是无界的，可见定理 3.2 中 $f$ 全连续条件是必不可少的.

## §4 解的反向延拓与算子的原子性

### 1. 问题的含义

上一节我们给出 RFDE($f$)(3.1)解的正向延拓定理. 而它的解的反向延拓(或者说负向延拓)则有特别含意,严格定义如下:

**定义 4.1** 设$\Omega\subseteq R\times C$是开集,$f\in C(\Omega,R^n)$,函数 $x(t)\in C([\sigma-r-a,\sigma],R^n)$,$a>0$,若

(1)$x_\sigma=\varphi$;

(2)对任何 $\sigma_1\in[\sigma-a,\sigma]$,$(\sigma_1,x_{\sigma_1})\in\Omega$;

(3)$x(t)$在$[\sigma_1-r,\sigma]$上的限制,是方程(3.1)在$[\sigma_1-r,\sigma]$上过$(\sigma_1,x_{\sigma_1})$的解,记为 $\hat{x}(t)$.

则称 $\hat{x}(t)$是(3.1)过$(\sigma,\varphi)$的解的一个反向延拓.

当初始值 $\sigma$ 取定,沿 $t\geqslant\sigma$ 的正向求解是一种积分延拓,而沿 $t\leqslant\sigma$ 求解则是微分延拓. 这和超前型方程恰恰相反. 由于初始函数 $\varphi\in C$,若 $\varphi$ 连续而不可微,则肯定不能反向延拓,即使 $\varphi$ 连续可微还必须满足一系列条件 $\hat{x}(t)$才存在. 所以,对 RFDE($f$)"一般地说"是不能沿负向求解的. 从应用前景看,RFDE($f$)与抛物型偏微分方程类似,可以描述熵增加的某种扩散过程. 这种过程是不可逆的. 在[76][592]中我们一再指出这一事实:即使对最简单的方程也是如此.

**例 9** 设 $x\in R$,$a\neq0$,$a\neq-b$,$r=0$ 皆常数,方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r) \tag{4.1}$$

选取初始时刻为 $\sigma=0$,初始函数 $\varphi\equiv k=\text{const.}\ t\in[-r,0]$. (4.1)改写为

$$x(t-r)=\frac{\dot{x}(t)-ax(t)}{b}$$

令 $t_1=t-r$，则 $x(t_1)=\frac{1}{b}(\dot{x}(t+r)-ax(t_1+r))$，当 $t_1\in[-2r,-r]$ 时，$x(t_1+r)=\varphi(t_1+r)=k$，$\dot{x}(t_1+r)=0\Rightarrow x(t_1)=-\frac{ak}{b}$，由所设 $-\frac{ak}{b}\neq k\Rightarrow x(t)$ 在 $-r$ 处不连续. 而我们所谓的反向延拓解指的是连续解，在这个意义上说，不存在满足初值 $\varphi(t)=k(t\in[-r,0])$ 的反向延拓解. 这里 $\varphi\equiv k$ 是连续可微的.

进而，若 RFDE($f$)对某一特别的连续可微的初始函数 $\varphi$ 可以反向延拓，要保证这一反向延拓的唯一性也是十分困难的，五十年代到六十年代期间，前苏联学者是做过大量探索，证实唯一性几乎是一种偶然现象. 早先人们猜想：若方程在 $(-\infty,\sigma]$ 解存在且 $x(\sigma)$ 等于指定的 $x^0$. 那末是否反向延拓解是唯一的？A. д. Мышкис 用反例否定了这个设想. 进而提出：若在 $\sigma$ 处给定 $x(t)$ 所有阶导数的值皆等于指定值

$$x(\sigma)=x^0,\dot{x}(\sigma)=x_1^0,\ddot{x}(\sigma)=x_2^0,\cdots\cdots \tag{4.2}$$

那末反向解是否唯一？ 回答仍然是否定的，如

**例** 10 （本章例 6)方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x(t-1) \tag{4.3}$$

$$b(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ \cos 2\pi t-1 & 0<t\leqslant 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

$\dot{x}(t)$ 在 $t=0$ 处等于 0，它的积分曲线分布如图 4.2.
此时反向延拓解不仅非唯一，而且有无限多个. 此外，还满足条件 (4.2)（取 $x^0=x_i^0=0,i=1,2,\cdots,\sigma=0$).

最后人们设想，对常系数线性系统，如果反向延拓解存在，在 $\sigma$ 处有任意阶导数，所给的初始函数在 $\sigma$ 处也有任意阶导数，二者之值又相等，那末反向延拓解是否唯一？ 回答仍然是否定的. 例如

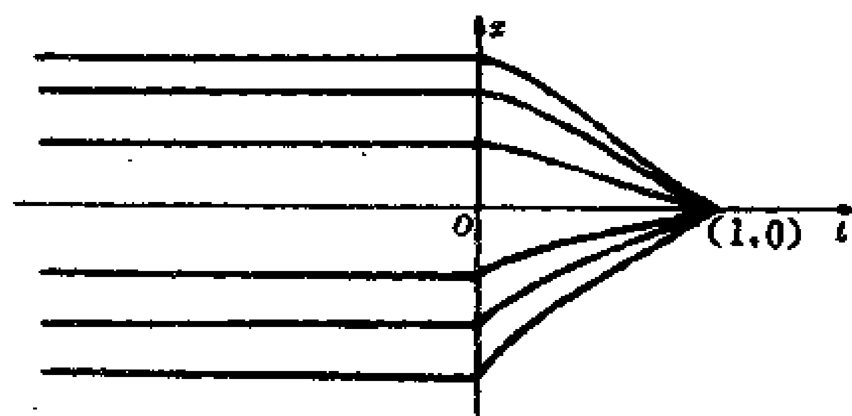



图 4.2

**例 11** 设 $a,b,r>0$ 皆为常数，$b\neq 0$，$\sigma=0$，对方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-r) \tag{4.4}$$

在$[-r,0]$上给定 $\varphi(t)$ 为

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & t=-r\\ e^{-t^{-2}}\cdot e^{-(t+r)^{-2}} & -r<t<0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

易见 $\varphi$ 在$[-r,0]$上有任意阶导数，在端点处指单侧导数，等于零.
沿负向求解有

$$x(t-r)=\frac{1}{b}(\dot{\varphi}(t)-a\varphi(t))\quad t\in[-r,0]$$

或者改记为

$$x(t)=\frac{1}{b}(\dot{\varphi}(t+r)-a\varphi(t+r))\quad t\in[-2r,-r]$$

可以验证在$[-2r,-r]$中的 $x(t)$ 仍具有 $\varphi(t)$ 在$[-r,0]$上的诸性质，于是可递推到$[-3r,-2r]$上，乃至$(-\infty,0]\Rightarrow$反向解存在. 如图 4.3 所示. 振幅越来越大，频率越来越高($t$ 的负向)，并且成立

$$x(0)=0,\dot{x}(0)=0,\ddot{x}(0)=0\cdots\cdots x^{(n)}(0)=0 \tag{4.5}$$

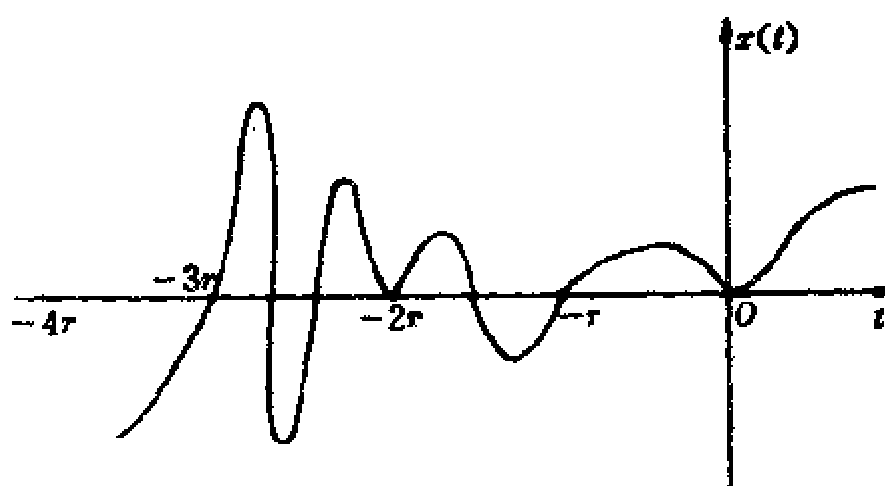



图 4.3

但是，它不是唯一的，因为 $kx(t)$ 也是其反向解（$k=\text{const.}$），本节给出一个 $\sigma$ 左方小步距内反向延拓的判断准则.

## 2. 算子的原子性与测度光滑性

**例 12**　在讨论反向延拓解时，对方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t-r) \tag{4.6}$$

若 $\sigma=0,\varphi\in C$ 是给定的，$x\in R$，过 $(\sigma,\varphi)$ 存在反向延拓解，则 $\varphi$ 必须在区间 $[-\varepsilon,0]$ 上可微（$\varepsilon>0$），并且 $\dot{\varphi}(0)=a(0)\varphi(-r)$. 反之，$t\in[-\varepsilon,0]$ 时若 $a(t)\neq0$，$\dot{\varphi}(t)$ 存在且 $\dot{\varphi}(0)=a(0)\varphi(-r)$，则我们定义

$$x(t-r)=\frac{1}{a(t)}\dot{\varphi}(t) \tag{4.7}$$

$t\in[-\varepsilon,0]$ 时 $t-r\in[-r-\varepsilon,-r]$，即 $x(t)$ 在 $[-r-\varepsilon,0]$ 上有意义并写成

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t) & t\in[-\varepsilon,0]\\ \hat{\varphi}(t) & t\in[-r-\varepsilon,-\varepsilon]\end{cases}$$

$$\hat{\varphi}=\begin{cases}\varphi & t\in[-r,-\varepsilon]\\ \dfrac{\dot{\varphi}(t+r)}{a(t+r)} & t\in[-r-\varepsilon,-r]\end{cases}$$

从这个例子注意到两点：

(1)$t\in[-\epsilon,0]$时 $a(t)\neq 0$ (4.8)

(2)$t\in[-\epsilon,0]$时 $\varphi$ 连续可微且 $\varphi(-r)=\frac{1}{a(0)}\dot{\varphi}(0)$ (4.9)

式(4.9)表明 $\varphi$ 在 $-r$ 处有特定要求，$f(t,\varphi)$ 随着 $\varphi(-r)$ 的变化形式取决于一个系数而依赖于 $t,\varphi$. 这是本节行将引入的原子性定义. 以后在中立型系统中还要遇到.

Banach 空间 $C=C([-r,0],R^n)$ 上的线性算子 $L:C\to R^n$ 记为 $L\in\mathscr{L}(C,R^n)$. 沿用第三章的记号有

$$L(\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\theta)]\varphi(\theta) \tag{4.10}$$

若 $L(\cdot):R\times C\to R^n, L(\cdot)\in\mathscr{L}(R\times C,R^n)$，则(4.6)为

$$L(\lambda,\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(\lambda,\theta)]\varphi(\theta) \tag{4.11}$$

这里 $\lambda\in R,\eta(\theta),\eta(\lambda,\theta)$ 都是 $n\times n$ 有界变差函数阵.

**定义** 4.2 称 $L(\lambda,\varphi)$ 具有测度光滑性，若对 $\forall\ \beta\in R$，$\exists$ 纯量函数 $\gamma(\lambda,s),\gamma(\lambda,0)=0$，关于 $\lambda,s\in R$ 是连续的，使得对 $\lambda\in\Lambda\subseteq R$，$s>0$ 成立

$$\left|\lim_{h\to 0}\int_{\beta+h}^{\beta+s}+\int_{\beta-s}^{\beta-h}[d_\theta\eta(\lambda,\theta)]\varphi(\theta)\right|\leqslant\gamma(\lambda,s)|\varphi| \tag{4.12}$$

$|\varphi|$ 取 $C$ 中的上确界模.

这里引用一个已知结果：

**引理** 4.1 若 $L\in C(\Lambda,\mathscr{L}(C,R^n)),\Lambda\subset R$，则 $L(\cdot,\cdot)$ 具有测度光滑性.

**定义** 4.3 对 $L(\lambda,\varphi)$ 的表示式(4.7)，若 $\beta\in R$，且阵 $A(\lambda,\beta,L)\triangleq\eta(\lambda,\beta^+)-\eta(\lambda,\beta^-)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 处是非异的 $\Leftrightarrow\det A\neq 0$，则说 $L(\lambda,\varphi)$ 在 $\lambda$ 上，于 $\beta$ 处是原子的(Atomic).

若 $A(\lambda,\beta,L)$ 在 $\Lambda\subset R$ 上是非异的，则称算子 $L(\lambda,\varphi)$ 在 $\Lambda$ 上，于 $\beta$ 处是原子的.

**注** 4.1 在下文中 $\lambda$ 往往即 $t_0$. 在定义 4.3 中：

若 $\theta=0\in[-r,0]$，$0^+$ 取为 0.

若 $\theta=-r\in[-r,0]$，$-r^-$ 取为 $-r$.

**例 13**　设 $L(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$，则 $L$ 是 $C\to R$ 的连续线性泛函. 其中 $a(t)$，$b(t)$ $t\in R$ 时连续，相应的核函数 $\eta$ 取为

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}a(t) & \theta=0\\ 0 & -r<\theta<0\\ -b(t) & \theta=-r\end{cases} \tag{4.13}$$

则由 $L(t,\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\varphi(\theta)$ 推得

$$\det[\eta(\sigma,0^+)-\eta(\sigma,0^-)]=a(\sigma)$$

$$\det[\eta(\sigma,r^+)-\eta(\sigma,-r^-)]=b(\sigma)$$

亦即

$L(t,\varphi)$ 在 $\sigma$ 上，于 0 处是原子的 $\Leftrightarrow a(\sigma)\neq 0$

$L(t,\varphi)$ 在 $\sigma$ 上，于 $-r$ 处是原子的 $\Leftrightarrow b(\sigma)\neq 0$

非线性算子的原子性有如下定义：

**定义 4.4**　设 $\Omega\subseteq R\times C$ 是开集，$D(t,\varphi):\Omega\to R^n$ 是非线性连续泛函，关于 $\varphi$ 有连续 Fréchet 导数 $D_\varphi(t,\varphi)$，$D_\varphi(t,\varphi)\in C(\Omega,\mathscr{L}(C,R^n))$，由 Riese 表示定理 $\Rightarrow\exists\ n\times n$ 有界变差阵 $\mu(t,\varphi,\theta)$，$(t,\varphi)\in\Omega$，$\theta\in[-r,0]$ 使

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta)\quad \psi\in C \tag{4.14}$$

对 $(\sigma,\varphi_0)\in\Omega$ 及 $\theta_0\in[-r,0]$，若

$$\det[\mu(\sigma,\varphi_0,\theta_0^{-1})-\mu(\sigma,\varphi_0,\theta_0^{-1}]\neq 0 \tag{4.15}$$

则称非线性泛函 $D$ 在 $(\sigma,\varphi_0)$ 上，于 $\theta_0$ 处是原子的.

若 $D$ 在 $\forall\ (t,\varphi)\in H\subseteq\Omega$ 上，于 $\theta_0$ 处 (4.15) 成立，则称算子 $D$ 在 $H$ 上，于 $\theta_0$ 处是原子的.

原子的定义本意是精确描述 FDE 中某些系数的构造，以确保方程的类型或者某种属性.

**例 14**　设 $r\in R$，方程

$$\frac{d}{dt}[a(t)x(t)+b(t)x(t-r)]=f(t,x(t),x(t-r))\quad(4.16)$$

记 $D(t,x_t)=a(t)x(t)+b(t)x(t-r)$ 或 $D(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$，如上所述有

$D(t,\varphi)$ 在 $I\subseteq R$ 上，于 0 处是原于的 $\Leftrightarrow a(t)\neq 0, t\in I$

$D(t,\varphi)$ 在 $I\subseteq R$ 上，于 $-r$ 处是原子的 $\Leftrightarrow b(t)\neq 0, t\in I$

在 $I$ 上 $a(t)=0, b(t)\neq 0\Rightarrow$(4.16)是 A 型的；$b(t)=0, a(t)\neq 0$ 是 R 型的；$a(t)\neq 0, b(t)\neq 0$ 是 N 型的．这几句话都可以换为是否为原子的说法.

**例 15** 考虑一个非线性方程

$$2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r)+\dot{a}(t)x^2(t)$$
$$+\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)=f(t,x(t),x(t-r))\quad(4.17)$$

把(4.17)改写成

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=\frac{d}{dt}[a(t)x^2(t)+\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)]$$
$$=f(t,x(t),x(t-r))$$

另一方面

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=D_t(t,x_t)+D_\varphi(t,x_t)\dot{x}_t\quad(4.18)$$

(4.18)中 Fréchet 导数 $D_\varphi(t,x_t)$ 具体计算如下：

$$D(t,\varphi+\psi)-D(t,\varphi)=a(t)(\varphi(0)+\psi(0))^2+\frac{1}{2}b(t)(\varphi(-r)$$
$$+\psi(-r))^2-a(t)\varphi^2(0)-\frac{1}{2}b(t)\varphi^2(-r)$$
$$=2a(t)\varphi(0)\psi(0)+b(t)\varphi(-r)\psi(-r)+\text{非线性部分}$$

由此得出

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=2a(t)\varphi(0)\psi(0)+b(t)\varphi(-r)\psi(-r)$$
$$D_\varphi(t,\varphi)\dot{x}_t=2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r)$$

取有界变差阵 $\mu$ 为

$$\mu(t,\varphi,\theta)=\begin{cases}2a(t)\varphi(0) & \theta=0\\ 0 & -r<\theta<0\\ -b(t)\varphi(-r) & \theta=-r\end{cases}$$

由此有

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta)$$

$D(t,\varphi)$在 $t\in I$ 上，于 0 处原子$\Leftrightarrow D_\varphi(t,\varphi)$在 $t\in I$ 上，于 0 处原子$\Leftrightarrow \det|\mu(t,\varphi,0^+)-\mu(t,\varphi,0^-)|$在 $I$ 上不等于 $0\Leftrightarrow 2a(t)\varphi(0)=2a(t)x(t)\neq 0, t\in I$.

同样分析于 $-r$ 处原子的状况.

**例 16** 考虑方程组，$A,B,C,D$ 为 $n\times n$ 常数阵.

$$A\dot{x}(t)+B\dot{x}(t-\tau)=Cx(t)+Dx(t-r) \tag{4.19}$$

左边为$\frac{d}{dt}[Ax(t)+Bx(t-\tau)]=\frac{d}{dt}D(t,\varphi)$

$$D(t,\varphi)=D(\varphi)=A\varphi(0)+B\varphi(-r)$$

取

$$\mu(\varphi,\theta)=\begin{cases}A & \theta=0\\ 0 & -r<\theta<0\\ -B & \theta=-r\end{cases}$$

则

$$D(\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(\varphi,\theta)]\psi(\theta)$$

$D(\varphi)$在 $I$ 上，于 0 处原子$\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$D(\varphi)$在 $I$ 上，于 $-r$ 处原子$\Leftrightarrow \det B\neq 0$

### 3. 反向延拓定理

**定理 4.1** 设$\Omega\subseteq R\times C$ 是开集，$f:\Omega\to R^n$ 连续，给定初值 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$，若满足

(1)$\exists\ \alpha\in(0,r)$使 $\dot{\varphi}(\theta)$在$[-\alpha,0]$上连续且 $\dot{\varphi}(0)=f(\sigma,\varphi)$.

(2)当 $f$ 关于 $\varphi$ 是线性时，$f$ 在 $[\sigma-\alpha,\sigma]$ 上，于 $-r$ 处是原子的.

当 $f(t,\varphi)$ 关于 $\varphi$ 是非线性时，存在 $\beta>0$，使 $f(t,\varphi)$ 在 $U=[\sigma-\alpha,\sigma]\times B_{\varphi,\beta}$ 上于 $-r$ 处是原子的. 这里

$$B_{\varphi,\beta}=\{\psi:\psi\in C,|\psi-\varphi|\leqslant\beta\}$$

(3)$f(t,\varphi)$ 对 $\varphi$ 存在连续的二阶 Fréchet 导数，则 $\exists\ \bar{\alpha}>0$，使 RFDE($f$)(3.1)过 $(\sigma,\varphi)$ 的解在区间 $[\sigma-r-\bar{\alpha},\sigma]$ 上 $\exists$ 且唯一.

**证** $x$ 为方程(3.1)过 $(\sigma,\varphi)$ 且定义在 $[\sigma-r-\alpha,\sigma]$ 上的解的充要条件是

$$f(t,x_t)=\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t-\sigma)\quad \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma \tag{4.20}$$
$$x_\sigma=\varphi,(t,x_t)\in\Omega,\sigma-\alpha\leqslant t\leqslant\sigma$$

对 $\forall\ \alpha>0$，取 $\hat{\varphi}:[-r-\alpha,0]\to R^n$ 为

$$\hat{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t) & -r\leqslant t\leqslant 0\\ \varphi(-t) & -r-\alpha\leqslant t\leqslant -r\end{cases}$$

记 $x(\sigma+t)=\hat{\varphi}(t)+Z(t)$，$-r-\alpha\leqslant t\leqslant 0$，于是(4.20)关于 $x$ 的问题化为求 $Z(t)$ 的问题，$Z$ 满足

$$\begin{aligned}&f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)=\dot{\hat{\varphi}}(t)\quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0\\ &\qquad Z_0=0\qquad (t,Z_t)\in\Omega\end{aligned} \tag{4.21}$$

由条件(3)$f(t,\varphi+\psi)$ 可展为

$$\begin{aligned}f(t,\varphi+\psi)&=f(t,\varphi)+f'_\varphi(t,\varphi)\psi+g(t,\varphi,\psi)\\ &=f(t,\varphi)+L(t,\varphi)\psi+g(t,\varphi,\psi)\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 $g(t,\varphi,\psi)$ 对 $(t,\varphi,\psi)$ 是连续的，$g(t,\varphi,0)=0$，且对 $\forall\ (t,\varphi)\in\Omega$，$\exists\ \beta=\beta(t,\varphi)\geqslant 0$ 和一个关于 $(t,\varphi,\beta)$ 连续的函数 $\epsilon(t,\varphi,\beta)$，$\epsilon(t,\varphi,0)=0$ 使得

$$|g(t,\varphi,\psi)-g(t,\varphi,\xi)|\leqslant\epsilon(t,\varphi,\beta)\,|\psi-\xi| \tag{4.23}$$

其中 $|\xi|\leqslant\beta$，$|\psi|\leqslant\beta$. 再把(4.21)按(4.22)式展开得

$$f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)=f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)+L(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t+g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)$$

于是(4.21)式化为

$$L(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t=-f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)+\dot{\varphi}(t),$$
$$-\alpha\leqslant t\leqslant 0,Z_0=0\qquad (t,Z_t)\in\Omega$$

(4.24)

由条件(2)⇒∃ $n\times n$ 有界变差阵 $\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)$，$(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\in\Omega$，$\theta\in[-r,0]$，使得

$$L(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t=\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)]Z_t$$
$$=A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z(t-r)+\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)]Z(t+\theta)$$

(4.25)

其中 $A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)=\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,-r^+)-\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,-r)$ 且当 $(\sigma+t,\hat{\varphi})\in U\subseteq\Omega$ 时，$\det A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\neq 0$.

取 $\alpha>0$ 使当 $t\in[-\alpha,0]$ 时 $(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\in U$，于是把(4.25)代入(4.24)得

$$A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z(t-r)=-\int_{-r^+}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)]Z(t+\theta)$$
$$-f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)+\dot{\varphi}(t),-\alpha\leqslant t\leqslant 0$$
$$Z_0=0$$

以下用压缩映射原理证明 $Z$ 的存在性. 为此给出一系列估计式：

对∀ $\gamma\in(0,\frac{1}{4})$，∃ $\alpha>0,\beta>0$ 使当 $t\in[-\alpha,0]$，$\psi\in B_\beta=\{\psi:\psi\in C,|\psi|\leqslant\beta\}$ 时，$(\sigma+t,\varphi-\psi)\in\Omega$，且

$$|A^{-1}(\sigma+t,\varphi+\psi)|\varepsilon(\sigma+t,\varphi+\psi,\beta)<\gamma \tag{4.26}$$
$$|A^{-1}(\sigma+t,\varphi+\psi)|\lambda(\sigma+t,\varphi+\psi,\alpha)<\gamma \tag{4.27}$$

其中 $\lambda:\Omega\times R_+\to R_+$ 是连续的，$\lambda(\sigma+t,\varphi+\psi,0)=0$ 且满足估计

$$\left|\int_{-r^+}^{-r+\alpha}[d_\theta\mu(\sigma+t,\varphi+\psi,\theta)]\varphi(\theta)\right|\leqslant\lambda(\sigma+t,\varphi+\psi,\alpha)|\varphi$$

由引理 4.1⇒λ 是存在的. 进而，选取 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\alpha}\in(0,\alpha)$，$\bar{\beta}\in(0,\beta)$，使

当 $t\in[-\bar{\alpha},0]$时，有

$$|\hat{\varphi}_t-\varphi|<\beta-\bar{\beta}$$

$$|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)||f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-f(\sigma,\varphi)|\leqslant\gamma\bar{\beta} \tag{4.28}$$

$$|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)||\dot{\varphi}(0)-\dot{\varphi}(t)|\leqslant\gamma\bar{\beta} \tag{4.29}$$

对所选定的 $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ 定义集

$\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\{\zeta:\zeta\in C([-r-\bar{\alpha},0],R^n),\zeta_0=0,\zeta_t\in B_{\bar{\beta}},t\in[-\bar{\alpha},0]\}$

对$\forall\ \zeta\in\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})$定义映射

$$T:\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})\to C([-r-\bar{\alpha},0],R^n)$$

$$T\zeta(t-r)=A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\Big\{\int_{-r^-}^{0}[d_\theta\eta(t,\hat{\varphi}_t,\theta)]\zeta_t(\theta)-f(\sigma,\varphi)$$
$$-f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)+\dot{\varphi}(t)-\dot{\varphi}(0)\Big\},t\in[-\bar{\alpha},0] \tag{4.30}$$

$$T\zeta_0=0$$

若$T$ 在 $\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})$中存在不动点$\bar{\zeta}$，则$\bar{\zeta}$ 在$[-r-\bar{\alpha},0]$上为方程(4.21)的解，由 $x(\sigma+t)=\hat{\varphi}(t)+\bar{\zeta}(t)$便得(3.1)在$[\sigma-r-\bar{\alpha},\sigma]$上的解 $x(t)$. 所以问题归结为证明 $T:\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})\to\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})$是压缩映射.

事实上，当 $t\in[-\bar{\alpha},0]$，$\theta\in[-r+\bar{\alpha},0]$时，$t+\theta\in[-r,0]$，故由 $\mathscr{B}(\bar{\alpha},\bar{\beta})$的定义$\Rightarrow\zeta_t(\theta)=\zeta(t+\theta)=0(\zeta_0=0)$，即

$$\Big|\int_{-r+\bar{\alpha}}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)]\zeta(\theta)\Big|=0$$

注意到(4.28)(4.27)有

$$|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\Big|\int_{-r^+}^{-r+\bar{\alpha}}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\theta)]\zeta_t(\theta)\Big|$$
$$=|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\lambda(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\bar{\alpha})|\zeta_t|\leqslant\gamma\bar{\beta} \tag{4.31}$$

由(4.23)得

$$|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)|=|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,0)|$$
$$\leqslant\varepsilon(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\beta)|\zeta_t|$$

由(4.26)得

$$|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)||g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)|\leqslant\gamma\beta \tag{4.32}$$

合并(4.28)(4.29)(4.31)(4.32)得出，当 $t\in[-\bar{\alpha},0]$时有

$$|(T\zeta)(t-r)|=|T\zeta(t-r)|$$

$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\{|\int_{-r^+}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t(\theta)]\zeta_t(\theta)|$$

$$+|f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-f(\sigma,\varphi)|+|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)|+|\dot{\varphi}(t)-\dot{\varphi}(0)|\}$$

$$\leqslant\gamma\beta+\gamma\beta+\gamma\beta+\gamma\beta\leqslant\beta$$

$\Rightarrow T$ 把 $\mathscr{B}(\bar{\alpha},\beta)$映入 $\mathscr{B}(\bar{\alpha},\beta)$. 其次，对$\forall$ $\zeta,\xi\in\mathscr{B}$ 我们有

$$|(T\zeta)(t-r)-(T\xi)(t-r)|$$

$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\{|\int_{-r^+}^{0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,(\theta))]|\zeta_t(\theta)-\xi_t(\theta)|$$

$$+|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\zeta_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,\xi_t)|\}$$

$$\leqslant\gamma|\zeta_t-\xi_t|+\gamma|\zeta_t-\xi_t|\leqslant\frac{1}{2}|\zeta_t-\xi_t|$$

即 $T$ 为压缩，存在不动点 $\zeta$. 证毕.

**例 17** 考虑一类非线性生态 FDE

$$\dot{x}(t)=-\hat{a}x(t-1)[1+x(t)],\hat{a}>0 \tag{4.33}$$

现在 $f(t,\varphi)=-\hat{a}\varphi(-1)[1+\varphi(0)]$, Fréchet 导数 $f'_\varphi$ 为

$$f'_\varphi(t,\varphi)\psi=-\hat{a}\psi(-1)[1+\varphi(0)]-a\varphi(-1)\psi(0) \tag{4.34}$$

设 $\varphi(0)\neq-1,A(t,\varphi)=-\hat{a}[1+\varphi(0)]$

取$(\sigma,\varphi)\in R\times C$ 满足条件

(1)$\exists$ $\alpha\in(0,1)$及 $\varphi,\dot{\varphi}(\theta)$在$[-\alpha,0]$上连续且

$$\dot{\varphi}(0)=-\hat{a}\varphi(-1)[1+\varphi(0)];$$

(2)$\varphi(\theta)\neq-1,\theta\in[-\alpha,0]\Leftrightarrow\det A\neq0\Rightarrow\exists$ $\beta>0$，使当 $\varphi\in B_{\varphi,\beta}=\{\xi:\xi\in C,|\xi-\varphi|\leqslant\beta\}$时，$\varphi(\theta)\neq-1,\theta\in[-\alpha,0]$由(4.34)$\Rightarrow$ $f(t,\varphi)$在$[\sigma-\alpha,\sigma]\times B_{\varphi,\beta}$上，于$-1$处是原子的；

(3)$f$ 有二阶连续 Fréchet 导数.

由此推出定理 4.1 全部条件成立$\Rightarrow\exists$ $\bar{\alpha}\in(0,\alpha)$使(4.33)在$[\sigma$

$-1-\bar{\alpha},\sigma]$上过$(\sigma,\varphi)$有反向解，且写成

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \sigma-1\leqslant t\leqslant\sigma\\ \dfrac{\dot{\varphi}(t+1)}{\alpha[1+\varphi(t+1)]} & \sigma-1-\bar{\alpha}\leqslant t\leqslant\sigma-1\end{cases}$$

## §5 解的整体存在性

上一章我们给出了线性 RFDE 解整体存在性定理. 本节扼要介绍 RFDE$(f)$

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{5.1}$$

的整体存在定理，先给予定义：

**定义 5.1** 称(5.1)的解是整体存在的，若对任意的$\sigma\in R,\varphi\in C$，(5.1)过$(\sigma,\varphi)$的解$x(\sigma,\varphi)(t)$在$[\sigma-r,\infty)$存在.

整体存在性对研究 RFDE 许多解的性质是十分重要的前提，例如振动性、稳定性、渐近性等等. 迄今为止，所有结果都是常微分方程解整体存在定理的相应推广，这里只作举例性介绍.

由§3 定理 3.2⇒若$f(t,\varphi)$在$\Omega$中全连续，$U\subset\Omega$是有界闭集，$x(t)$是(5.1)过$(\sigma,\varphi)$在$[\sigma-r,\beta)$上的不可延拓解，则存在序列$\{t_n\}$，$t_n\to\beta^-$，$n\to\infty$，使$(t_n,x_{t_n})\overline{\in}U$，当$n>N$. 此时，若$\beta<+\infty$，则存在$\{t_n\}$的子序列$\{t'_n\}$，使得$t'_n\to\beta^-$时$|x(t_n)|\to\infty$.

设$I=[a,b)\subset R,V:I\times R^n\to R$连续，对$t\in I,\varphi\in\Omega$我们归纳上述结果写成：

**引理 5.1** 设$f(t,\varphi)$全连续，$x(t)$是(5.1)过$(\sigma,\varphi)$在$[\sigma-r,\beta]$上的解，若$\beta<\infty$，则$\exists\ \{t_n\}$，$t_n\to\beta^-$，$n\to\infty$时有$|x(t_n)|\to\infty$.

若干记号：

$I=[a,b]$(或$(a,b)$，或$[a,b)$)　$I\subseteq R$

$V(t,x):I\times R^n\to R$连续，则对$(t,\varphi)\in I\times R^n$，定义

$$D^+_{(5.1)}V(t,\varphi(0))=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h),x(t,\varphi)(t+h)$$

$-V(t,\varphi(0))]$ (5.2)

$$D^{-}_{(5.1)}V(t,\varphi(0))=\varliminf_{h\to 0^{+}}\frac{1}{h}[V(t+h),x(t,\varphi)(t+h)$$

$-V(t,\varphi(0))]$ (5.3)

其中记号 $x(t,\varphi)(t+h)=x(t+h,t,\varphi)$

现在设 $I=[\sigma-r,T]$，$T>\sigma$.

$x:[\sigma-r,T)=I\to R$ 连续，$V:I\times R^{n}\to R$ 连续.

当 $t\in I$ 时，记 $\alpha(t)=V(t,x(t))$，$\sigma-r\leqslant t<T$，且定义连续函数 $\omega_1:I\times C([-r,0],R)\to R_{+}$.

**引理** 5.2 若 $V,\omega_1$ 满足

(1)任意给定函数 $u,v:I\to R$，当 $t\in[\sigma,T)$，$\theta\in[-1,0]$，$u(t)=v(t)$，$u_t(\theta)\leqslant v_t(\theta)$时 $\omega_1(t,u_t)\leqslant\omega_1(t,v_t)$

(2)当 $t-r\leqslant s\leqslant t<T$，$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$时有

$$D^{+}_{(5.1)}V(t,x(t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t)$$

(3)设 $\gamma^{*}(t)$是初值问题

$$\begin{cases}\dot\gamma(t)=\omega_1(t,\gamma_t) & t\geqslant\sigma\\ \gamma_\sigma=\psi\end{cases}\tag{5.4}$$

的右行最大解. 则当 $\alpha(s)\leqslant\psi(s-\sigma)$，$s\in[\sigma-r,\sigma]$，$\psi(0)\geqslant\max\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)$时，$V(t,x(t))\leqslant\gamma^{*}(t)$，在二者的公共存在区域上成立.

**证** 只要证明：对∀ 正整数 $N$，初值问题

$$\begin{cases}\dot\gamma^{N}(t)=\omega_1(t,\gamma^{N}_t)+\frac{1}{N} & t\geqslant\sigma\\ \gamma^{N}_\sigma=\psi\end{cases}\tag{5.5}$$

的解 $\gamma^{N}(t)$有 $V(t,x(t))\leqslant\gamma^{N}(t)$在二者的公共存在区域上成立即可. 由解的存在性，可设$[\sigma-r,\beta]$是(5.5)的右行最大解与$V(t,x(t))$的公共存在区间. 用反证法，若不然则有 $N_0$ 及 $t_1\in[\sigma,\beta)$使

$$V(t,x(t))\leqslant\gamma^{N_0}(t)\quad t\in[\sigma,t_1]$$

且∃ $t_n\to t_1^{+}$ 使 $V(t_n,x(t_n))\geqslant\gamma^{N_0}(t_n)$，由连续性有

$$V(t_1,x(t_1))\geqslant\gamma^{N_0}(t_1)$$

从而

$$D^+_{(5.1)}V(t_1,x(t_1))=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{V(t_n,x(t_n))-V(t_1,x(t_1))}{t_n-t_1}$$

$$\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\gamma^{N_0}(t_n)-\gamma^{N_0}(t_1)}{t_n-t_1}=\dot\gamma^{N_0}(t_1)$$

$$=\omega_1(t_1,\gamma_t^{N_0})+\frac{1}{N}>\omega_1(t_1,\gamma_t^{N_0})\qquad(5.6)$$

但由 $t_1$ 的定义及 $\omega_1\geqslant0$，对 $s\in[\sigma,t_1]$有

$$V(s,x(s))\leqslant\gamma^{N_0}(s)\leqslant\gamma^{N_0}(t_1)=V(t_1,x(t_1))$$

若 $t_1-r<\sigma$，则对 $s\in[t_1-r,\sigma]$有

$$\psi(0)=\psi(\sigma-\sigma)\geqslant\alpha(\sigma)=V(\sigma,x(\sigma))\geqslant V(s,x(s)),\sigma\geqslant s$$

$$V(s,x(s))\leqslant\psi(0)\leqslant\gamma^{N_0}(s)\leqslant\gamma^{N_0}(t_1)=V(t_1,x(t_1))$$

故对 $s\in[t_1-r,t_1]$，恒有 $V(s,x(s))\leqslant V(t_1,x(t_1))$，从而

$$D^+_{(5.1)}V(t_1,x(t_1))\leqslant\omega_1(t_1,\alpha_{t_1})=\omega_1(t_1,\gamma_{t_1}^{N_0})$$

这与(5.6)矛盾.

对右行最小解，可类似地定义 $\omega_2$ 得出相应的结论. 把它写成

**引理 5.3** 在引理 5.2 中，用 $\omega_2$ 代替 $\omega_1$，$-\omega_2:I\times C\to R_+$ 设(1)成立，(2)改换为 $V(s,x(s))\geqslant V(t,x(t))$时有

$$D^-_{(5.1)}V(t,x(t))\geqslant\omega_2(t,\alpha_t)\qquad(5.7)$$

$\bar\gamma(t)$是初值问题

$$\begin{cases}\dot\gamma(t)=\omega_2(t,\gamma_t)\quad t\geqslant\sigma\\ \gamma_\sigma=\xi\end{cases}\qquad(5.8)$$

的右行最小解，则当 $\alpha(s)\geqslant\xi(s-\sigma)$，$s\in[\sigma-r,\sigma]$，$\xi(0)\leqslant\min\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)$ 时恒成立 $V(t,x(t))\geqslant\bar\gamma(t)$.

在证明时，把方程族(5.5)换为

$$\begin{cases}\dot\gamma^N(t)=\omega_2(t,\gamma_t^N)-\dfrac{1}{N}\quad t\geqslant\sigma\\ \gamma_\sigma^N=\xi\end{cases}\qquad(5.9)$$

其他叙述与引理 5.2 完全类似.

**定理** 5.1 若存在连续函数 $V: R\times R^n\to R$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|V(t,x)|=\infty$,满足

(1)对任意给定的连续函数 $x: R\to R^n$, $t\in R$,若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时, $V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$,则

$$D^+_{(5.1)}V(t,x(t))\geqslant\omega_1(t,\alpha_t)$$

(2)若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时, $V(s,x(s))\geqslant V(t,x(t))$,则

$$D^-_{(5.1)}V(t,x(t))\geqslant\omega_2(t,\alpha_t)$$

其中 $\alpha(t)=V(t,x(t))$, $\omega_1$, $-\omega_2: R\times C([-r,0],R^n)\to R_+$ 都是连续的,并且对任意给定的连续函数 $u,v: R\to R$ 及 $t\in R$, $\theta\in[-r,0]$,当 $u_t(\theta)\leqslant v_t(\theta)$, $u(t)=v(t)$ 时

$$\omega_i(t,u_t)\leqslant\omega_i(t,v_t)(i=1,2)$$

则当 $\dot{\gamma}(t)=\omega_i(t,\gamma_t)$ 的解整体存在时($i=1,2$),方程(5.1)的解整体存在.

**证** 记 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$, $\alpha(t)=V(t,x(t))$, $t\in[\sigma-r,\beta)$,设 $\gamma_1(t)$ 是方程 $\dot{\gamma}(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$ 过 $(\sigma,\phi)$ 的右行最大解. $\gamma_2(t)$ 是方程 $\dot{\gamma}(t)=\omega_2(t,\gamma_t)$ 过 $(\sigma,\xi)$ 的右行最小解. 这里 $\phi,\xi\in C([-r,0],R)$, $\xi(s-\sigma)\leqslant\alpha(s)\leqslant\phi(s-\sigma)$, $s\in[\sigma-r,\sigma]$, $\xi(0)\leqslant\min\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)\leqslant\max\limits_{\sigma-r\leqslant s\leqslant\sigma}\alpha(s)\leqslant\phi(0)$.

由定理条件及引理 5.2 及 5.3 $\Rightarrow$

$$\gamma_2(t)\leqslant\alpha(t)\leqslant\gamma_1(t)\quad t\in[\sigma-r,\beta]$$

若 $\beta<+\infty$,则 $\exists\ t_n\to\beta^-$ 使 $|x(t_n)|\to\infty\Rightarrow|\alpha(t_n)|\to\infty$,这与 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ 在 $[\sigma-r,\beta]$ 上的有界性矛盾. 即 $\beta=+\infty$. 证毕.

为了在研究稳定性、振动性、渐近性等一系列性质时,要引用的各式整体存在性条件,我们都把它写成定理形式以便于引用,而实际上其中许多结论只是简单的推论而已.

**定理** 5.2 若存在连续函数 $V: R\times R^n\to R_+$,满足 $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(t,x)$

$=+\infty$，使得对任意给定的连续函数 $x:R\to R^n$ 及 $t\in R$，当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时，$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$，则

$$D^+_{(5.1)}V(t,x(t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t)$$

其中 $\alpha(t)$，$\omega_1$ 同定理 6.1 所设，那末当方程

$$\dot{\gamma}(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$$

的解整体存在时，(5.1)的解整体存在.

**定理** 5.3 若存在连续函数 $S:R\times R^n\to R_+$，满足

(1) $S(t,x)=0\Leftrightarrow x=0$

(2) $S(t,\lambda x)=\lambda S(t,x)$，$S(t,x+y)\leqslant S(t,x)+S(t,y)$，$\lambda\geqslant 0$

$x,y\in R^n$

(3) 对任意的连续函数 $x:R\to R^n$，$t\in R$，若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时 $S(s,x(s))\leqslant S(t,x(t))$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,\xi)\big|_{\xi=x(t)}+S(t,f(t,x_t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t)$$

其中 $\alpha(t)=S(t,x(t))$，$\omega_1$ 同定理 5.1 所设，则当方程

$$\dot{\gamma}(t)=\omega_1(t,\gamma_t)$$

的解整体存在时，(5.1)的解整体存在.

**定理** 5.4 若存在连续函数 $M,N:R\to R_+$ 使

$$|f(t,\varphi)|\leqslant M(t)+N(t)|\varphi|,\ (t,\varphi)\in R\times C$$

则(5.1)的解整体存在.

**定理** 5.5 若对 $\forall\ (t,\varphi)\in R\times C$，$|f(t,\varphi)|\leqslant M=\text{const}$. 则(5.1)的解整体存在.

非线性系统使 $|f(t,\varphi)|<L|\varphi|$，$L=\text{const}$. $(t,\varphi)\in R\times C$ 时解也整体存在.

# 第五章

# RFDE 解映射综析

本章对 RFDE 的解与常微分方程相应的若干概念作进一步比较，并给出两种解映射的一般性质，部分讨论对 NFDE 也成立.

## §1 解性态对滞量的依赖关系

### 1. 解记号的注释

在 FDE 的发展过程中，解的表示样式比较繁杂. 设 RFDE($f$)为

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1.1}$$

取初始时刻为 $\sigma$，初始函数为 $\varphi\in C=C([-r,0],R^n)$，(1.1)过($\sigma$，$\varphi$)的解有以下种种记号

(1)$\underset{\varphi}{x}(t)$，$\underset{\varphi}{x}(\sigma,t)$，大体上沿用到 60 年代，目前已不用.

(2)$x(t)$，$x(t,\sigma,\varphi)$，$x(\sigma,\varphi)(t)$，$x(\sigma,\varphi)$，这是目前最普遍的记法，在各种不同的场合随意选用，而不致引起混淆.

(3)$x(t,\sigma,\varphi,f)$，$x(\sigma,\varphi,f)(t)$，$x(\sigma,\varphi,f,\lambda)(t)$等等，是在特定的场合强调方程的右端函数 $f$. 最后一个表示式还强调了方程中所含的参数 $\lambda$，亦即它表示方程

$$\dot{x}(t)=f(\lambda,t,x_t) \tag{1.2}$$

过($\sigma$，$\varphi$)的解.

(4)$x_t$($=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$)，$x_t(\sigma,\varphi)$，$T(t,\sigma)\varphi$，$T(t,\sigma,f)\varphi$，

$T(t,\sigma,f,\lambda)\varphi$等等，是(3)(2)情形在空间$C$中表示解. $T(t,\sigma)$是由(1.1)或(1.2)等价的积分方程确定的算子.

在许多场合，(1.1)中滞量$\tau\in R_+$，而代表以$\tau$为参数的方程族. 则解也可写成$x(t,\sigma,f,\tau)$.

解映射$T(\sigma,\varphi)$，则由下式确定

$$T(t,\sigma)\varphi=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds \quad t\geqslant\sigma \tag{1.3}$$

本章要进一步研究$T(t,\sigma)$的一般性质.

解的表示比常微分方程复杂的原因在于：

①需要初始函数$\varphi$而不是$x$的一个值$x_0$.

②解映射可分别在$R^n$及$C$中作出两种解释.

## 2. 解关于滞量的依赖关系

作为例子，考虑(1.1)的一个特殊情形

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{1.4}$$

其中$\tau\in R_+$，作为一个参数，所以(1.4)是一个方程族. $\tau$在$R_+$中选取不同的值，解的性态可能完全不同. 从事常微分方程的工作者或者诸多应用领域中的工作者，最容易出错的地方之一是：在没有足够根据的情形下略去$\tau$，而把它作为常微分方程来处理. 有一系列反例足以证明这一点.

(1)在第四章中例1、例2说明改变$\tau$的值可以改变解的存在性. 例2、例3说明改变$\tau$的值可以改变解的唯一性.

(2)取不同的$\tau$值可改变方程零解的稳定性.

"(1.1)的零解叫做稳定的，若对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\sigma,\varepsilon)>0$使当$|\varphi|<\delta$时$|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon$"，$t\geqslant\sigma$. 用第七章提出的办法可以判断下面两个例子的结论.

**例1** 方程

$$\ddot{x}(t)-a\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-\tau)+x(t)=0 \tag{1.5}$$

当 $\tau=0$ 时，不问 $a$ 为何值(1.5)都化为 $\ddot{x}(t)+x(t)=0\Rightarrow$零解是中心，是稳定的，对给定的 $\tau\in(0,\pi)$和适当选择的常数 $a$，(1.5)的零解是不稳定的，因为(1.5)的特征方程

$$\lambda^2-a\lambda+a\lambda e^{-\lambda\tau}+1=0 \tag{1.6}$$

有正实部的根 $\lambda$.

反之我们有

**例** 2　对方程

$$\ddot{x}(t)-2\dot{x}(t)+\dot{x}(t-\tau)+6x(t)-6x(t-\tau)=0 \tag{1.7}$$

当 $\tau=0$ 时(1.7)化为 $\ddot{x}(t)-\dot{x}(t)=0$，特征方程有正根 $\lambda=1\Rightarrow$零解是不稳定的. 而当 $\tau\in(\frac{1}{6},\frac{\pi}{6})$时，方程(1.7)的零解是稳定的.

(3)选取不同的 $\tau\in R_+$，可以改变方程周期解的存在性，如

**例** 3　对 NDDE

$$\dot{x}(t)+\dot{x}(t-\tau)+cx(t)+cx(t-\tau)=0 \tag{1.8}$$

$c=$const. $\neq0$，若 $\tau=0$，(1.8)化为 $\dot{x}(t)+cx(t)=0$ 没有非常数周期解，而当 $\tau>0$ 时，(1.8)有周期为 $2\tau$ 的周期解 $\cos\frac{\pi t}{\tau}$.

反之我们有

**例** 4　对二阶 RDDE

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)+K[x_2(t)-x_2(t-\tau)]\\ \dot{x}_2(t)&=-x_1(t)-K[x_1(t)-x_1(t-\tau)]\end{aligned} \tag{1.9}$$

当 $\tau=0$ 时对$\forall\ K\in R$，(1.9)的零解是中心，即存在周期解. 当 $0<\tau<2\pi$ 时，例如取 $K=-\frac{1}{2}$，则不问 $\tau$ 如何地小，(1.9)必无周期解.

(4)选取不同的 $\tau\in R_+$，可能改变解的振动性，例如

**例** 5　对最简单的 RDDE

$$\dot{x}(t)=-x(t-\tau) \tag{1.10}$$

当 $\tau=0$ 时解都不振动，而当 $\tau=\frac{\pi}{2}$时有振动解 $\sin t$ 与 $\cos t$.

反之我们有

**例** 6　对二阶方程

$$\ddot{x}(t)+\frac{1}{4}x(t-\tau)+(x(t-\tau)-x(t))=0 \tag{1.11}$$

当 $\tau=0$ 时零解为中心，一切解振动，而当 $\tau=4\ln 2$ 时有非振动解，因为(1.11)的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{5}{4}e^{-\lambda\tau}-1=0 \tag{1.12}$$

有实根，对应于实根的解 $e^{\lambda t}$ 是非振动的.

(5)对多滞量方程，若把诸滞量 $\tau_1,\tau_2,\cdots\tau_m$ 视为参数，对诸 $\tau_i$ 值的不同选择还可能改变方程的类型. 例如

**例** 7　方程

$$\dot{x}(t)+\frac{1}{2}[\dot{x}(t-\tau_1)-\dot{x}(t-\tau_2)+2x(t-\tau_1)+3x(t-\tau_2)]$$
$$=0 \tag{1.13}$$

当 $\tau_1,\tau_2\in R_+,\tau_1\neq\tau_2$ 时(1.13)是 NDDE，而当 $\tau_1=\tau_2$ 时是 RDDE.

(6)在一些 FDE 应用的文献中，把系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{1.14}$$

中的 $x(t-\tau)$ 展开为级数

$$x(t-\tau)=x(t)-\tau\dot{x}(t)+\frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t)\cdots\cdots \tag{1.15}$$

取(1.15)的有限项，例如取前两项或三项，代入(1.14)，使之化为一个常微分方程以求解或者判断解的性态，这种做法极易导致错误. 如

**例** 8　设 $\tau=\text{const.}>0,x\in R$，对 RDDE

$$\dot{x}(t)=-2x(t)+x(t-\tau) \tag{1.16}$$

它的零解是渐近稳定的，任何解是有界的，但若按(1.15)展开，取三项到 $\ddot{x}(t)$ 为止，代入(1.16)得到一个常微分方程

$$\dot{x}(t)=-2x(t)+x(t)-\tau\dot{x}(t)+\frac{\tau^2}{2}\ddot{x}(t) \tag{1.17}$$

不论 $\tau$ 如何地小，总存在指数解 $ce^{\lambda t}$，$\lambda>0$，$c$ 是任意常数⇒(1.17)零解是不稳定的，与(1.16)正好相反. 若只取两项，到 $\dot{x}$ 为止，则(1.16)化为

$$\dot{x}(t)=\frac{-1}{1+\tau}x(t) \tag{1.18}$$

则(1.18)零解是渐近稳定的，此时稳定性与(1.16)相同，这表明这种做法带有随意性，应当给出合理的条件限制才可以进行. 之所以时有出现这种做法，是因为的确有方便和成功的例子.

**例** 9 考虑方程

$$\dot{x}(t)=x(t)-x(t-\tau) \tag{1.19}$$

取展开式(1.15)的前三项，到 $\ddot{x}(t)$ 为止，代入(1.19)得

$$\tau^2\ddot{x}(t)+2(1-\tau)\dot{x}(t)=0 \tag{1.20}$$

(1.20)的特征方程为

$$\tau^2\lambda^2+2(1-\tau)\lambda=0 \tag{1.21}$$

两个根为 $\lambda=0$，$\lambda=\frac{2(\tau-1)}{\tau^2}$，当 $\tau\in[0,1)$ 时(1.20)的零解是稳定的. $\tau\geqslant1$ 时是不稳定的，$\tau=0$(1.19)显然有零解的稳定性. 这与[2]中对(1.19)的分析结果完全一致. 尽管如此，我们仍要提请读者注意这一做法可能导致错误的危险性.

### 3. 解性态对时滞参数的分岐

上面实际上提出了一个在理论和应用上都很有意义的课题：FDE 解的性态随着 $\tau\in R$ 的变化是如何变化的？

记 FDE 解的存在性为($E$)，唯一性为($U$)，稳定性为($S$)，周期解的存在性为($P$)，解的振动性为($O$)，等等. 泛指时记为($X$).

设 $\tau\in R_+$ 为参数，$R_+$ 中性质($X$)成立的 $\tau$ 全体记为 $\mathscr{A}(X)$，($X$)不成立的 $\tau$ 全体记为 $\overline{\mathscr{A}}(X)$，则 $\mathscr{A}(X)=R_+-\overline{\mathscr{A}}(X)$，集 $\mathscr{A}^*(X)\subset R_+$ 具有这样的性质，当 $\tau^*\in\mathscr{A}^*(X)$ 时，对含有 $\tau^*$ 的任意小邻域

$$B(\tau^*,\delta)=\{\tau: |\tau-\tau^*|<\delta, \tau\in R_+\}$$

中都存在异于 $\tau^*$ 的值 $\dot{\tau}$，使性质$(X)$对于 $\tau^*$ 与 $\dot{\tau}$ 来说一个是成立的，另一个是不成立的．换句话说，这种 $\tau^*$ 的值的微小扰动完全改变了系统解的性态$(X)$．$\tau^*$ 叫做性质$(X)$的一个分岐点．

若 $\mathscr{A}^*(X)=\varnothing$（空集），则 FDE 的性质$(X)$是对$\forall\ \tau\in R_+$成立（或不成立）．例如全时滞稳定性．

这类课题值得进一步广泛研究．当然，最要紧的部分是弄清 $\mathscr{A}^*(X)$的构造．

## §2　两种解映射与半群

### 1. 两种观点的比较

设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$f\in C(\Omega,R^n)$，(1.1)的初值总是写成

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(t,x_t)\\&x_\sigma=\varphi\end{aligned}\tag{2.1}$$

或者等价的积分方程

$$\begin{aligned}&x(t)=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds\\&x_\sigma=\varphi\end{aligned}\tag{2.2}$$

过$(\sigma,\varphi)$的解在 $R^n$ 中写成 $x(t,\sigma,\varphi)$，在 $C$ 中写成

$$T(t,\sigma)\varphi\triangleq x_t(\sigma,\varphi)=x_t\tag{2.3}$$

对于几何理论而言，在 $C$ 中考虑解映射要比在 $R^n$ 中丰富，以一个例子来说明这一点．

**例** 10　设 $x\in R$，方程

$$\dot{x}(t)=-x(t-\frac{\pi}{2})\tag{2.4}$$

有解 $\sin t$，$\cos t$，在平面 $(t,x)$ 上，在$[\sigma,\infty)$中相交无限多次而不破坏唯一性．但二者在任何区间上不相等．若在 $C$ 中，$T(t,\sigma)$是一

一映射(由下一段定理 2.1 保证)．所以对几何表示而言，$T(t,\sigma)$优于 $x(t,\sigma,\varphi)$．这对自治系统尤为重要．

现在给出一个 $T(t,\sigma)$为一一映射的定理．设第四章中(2.1)的存在定理成立，并对$\forall$ $(\sigma,\varphi)\in\Omega$，存在 $b_{\sigma,\varphi}$以及一个函数 $x$，它是(2.1)在$[\sigma-r,b_{\sigma,\varphi})$上的不可延拓解．

对给定的 $\sigma$，记$\Omega_\sigma=\{\varphi:(\sigma,\varphi)\in\Omega\}$，则映射 $T(t,\sigma):\Omega_\sigma\to C$，对$\forall$ $\varphi\in\Omega_\sigma$，$t\in[\sigma,b_{\sigma,\varphi})$时 $T(t,\sigma)\varphi=x_t(\sigma,\varphi)$，我们有

**定理** 2.1　设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开的，$f:\Omega\to R^n$ 连续，且 $T(t,\sigma)$：$\Omega_\sigma\to C$，$t\in[\sigma,b_{\sigma,\varphi})$，若 $f$ 在$\Omega$上于$-r$ 处是原子的，则 $T(t,\sigma)$是一一映射．

**证**　用反证法，若结论不真，则$\exists$ $C$ 中的 $\psi\neq\varphi$ 以及 $t_1\in[\sigma,b_{\sigma,\varphi})$使 $x_{t_1}(\sigma,\varphi)=x_{t_1}(\sigma,\psi)$，而当 $t>t_1\geqslant\sigma$ 时 $x_t(\sigma,\varphi)\neq x_t(\sigma,\psi)$，若 $x=x(\sigma,\varphi)$，$y=x(\sigma,\psi)$，则当 $\sigma\leqslant t\leqslant t_1$ 时成立

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),\qquad \dot{y}(t)=f(t,y_t)$$

由于 $f$ 在$\Omega$上于$-r$ 处是原子的$\Rightarrow\exists$ $\alpha(t_1)>0$ 使得(2.1)在$[t_1-r-\alpha_1,t_1]$上过$(t_1,x_{t_1})=(t_1,y_{t_1})$存在唯一一个解．这是反向延拓定理保证的，由此得$(t,x_t)=(t,y_t)$对 $t\in[t_1-\alpha,t_1]$成立(对任何这样的 $t_1$)$\Rightarrow$矛盾．证毕．

## 2. 强连续半群

对解映射 $T(t,\sigma)$的代数与拓扑的基本性质我们给出确切的描述——它的全体是一个强连续半群．

为了强调(2.1)的右边，把算子 $T$ 记为 $T_f(t,\sigma)$，若(2.1)是自治的，则不妨取 $\sigma=0$，此时记

$$T_f(t,0)\triangleq T_f(t) \tag{2.5}$$

当自治的(2.1)给定，过$(0,\varphi)$解的最大存在区间设为$[0,\infty)$，$T_f(t)$关于 $t$ 连续，且 $S=\{T_f(t),t\in[0,\infty)\}$赋以 $R^n$ 中的范数，再定义它的一种代数运算“·”

$$T_f(t)\cdot T_f(\tau)=T_f(t+\tau),t,\tau\geqslant 0 \tag{2.6}$$

则 $S$ 是一个含单位元的半群,因为

(1)封闭性由(2.6)保证.

(2)结合律成立:

$$T_f(t)[T_f(\tau)T_f(r)]=T_f(t)T_f(\tau+r)=T_f(t+\tau+r)$$

$$=T_f(t+\tau)T_f(r)=[T_f(t)T_f(\tau)]\cdot T_f(r)$$

(3)单位元为 $T_f(0)\triangleq I$(恒等变换).

此外"·"还是可交换的,并且是连续的,事实上,对应于 $t+\tau$ 的邻域 $\omega$,$T_f(t+\tau)$的邻域记为 $W$,存在 $T_f(t)$的邻域 $U$(对应于 $t$ 的邻域 $\alpha$)和 $T_f(\tau)$的邻域 $V$(对应于 $\tau$ 的邻域 $\beta$),使 $UV\subseteq W$,即连续性.

## §3 $T(t,\sigma)$的有界性

我们假定(2.1)解存在且满足依赖性条件,则有

**定理 3.1** 对 $t\geqslant\sigma$,$T(t,\sigma)$是局部有界的.

**证** 由所设,$T(t,\sigma)\varphi$ 关于$(t,\sigma,\varphi)$是连续的$\Rightarrow$对$\forall\ t\geqslant\sigma,\varphi\in C$,$(t,\sigma)\in\Omega$,$T(t,\sigma)\varphi$ 是确定的,存在 $\varphi$ 在 $C$ 中的一个邻域 $V(t,\sigma,\varphi)$,使 $T(t,\sigma)V(t,\sigma,\varphi)$是有界的.

$T(t,\sigma)$可能不是一个有界映射.

**例 11** 考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)\triangleq x^2(t)-\int_{\min(t-r,0)}^{0}|x(s)|ds \tag{3.1}$$

其中 $r=\dfrac{1}{4}$,$C=C([-r,0],R^n)$,显然

$f$:有界闭集→有界集.

$f$ 满足局部 Lipschitz 条件.

记单位球 $B=\{\varphi;\varphi\in C,|\varphi|\leqslant 1\}$,$\xi\in B$,$x(0,\xi)(t)$是(3.1)过$(\sigma,\xi)$的解,对于 $\xi\neq 0$,$x(0,\xi)(0)\leqslant 1$,由(3.1)有

$$\dot{x}(0,\xi)(t) < x^2(t) \triangleq x^2(0,\xi)(t) \tag{3.2}$$

对一切 $t$ 成立 $\Rightarrow 0<t<1$ 时 $x(t)<y(t)$，$y(t)$ 是方程 $\dot{y}(t)=y^2(t)$，$y(0)=1$ 的解 $\Rightarrow x(0,\xi)(t)$ 在 $[0,1)$ 上存在.

求解 $\dot{y}(t)=y^2(t)\Rightarrow y(t)=\dfrac{-1}{c+t}$，由 $y(0)=1\Rightarrow c=-1$ 即 $y(t)=\dfrac{1}{1-t}$，故 $t\in[0,1)$ 时

$$x(0,\xi)(t)<y(t)=\frac{1}{1-t},\ x(0,\xi)(r)<\frac{1}{1-r} \tag{3.3}$$

对 $t\geqslant r$，方程(3.1)变为

$$\dot{x}(t)=x^2(t) \text{ 或 } \dot{x}(0,\xi)(t)=x^2(0,\xi)(t) \tag{3.4}$$

(3.4)在初始条件 $(r, x(0,\xi)(r))$ 之下的解为

$$x(0,\xi)(t)=\frac{1}{\dfrac{1}{x(0,\xi)(r)}+r-t} \tag{3.5}$$

(3.5)在 $r\leqslant t\leqslant 1$ 上有定义.

现在我们来证明对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \xi\in B$，使得

$$x(0,\xi)(r)>\frac{1}{1-r}-\varepsilon$$

则集 $x(0,B)(1)$ 不是有界的.

事实上，由于 $\dot{y}(t)=y^2(t)$ 过 $\left(r,\dfrac{1}{1-r}\right)$ 的解不是有界的. 而对 $t\geqslant r$，(3.1)化为 $\dot{x}(t)=x^2(t)$. 设 $\varepsilon>0$ 给定，$c=\dfrac{1}{|1-r|}$，选择 $\xi\in B$ 使 $\xi(0)=1$ 以及 $\int_{-r}^{0}|\xi(s)|ds<2c\varepsilon$.（只要 $|\xi(t)|$ 充分小即可）. 记 $y(t)=y(t,\ 0,\ 1)$，$y(0,\ 0,\ 1)=1$ 是方程 $\dot{y}(t)=y^2(t)$ 自 0 出发的解，又 $x(t)=x(0,\xi)(t)$，令

$$\psi(t)=y(t)-x(t),\ t\in(0,r)$$

$\Rightarrow\psi(t)\geqslant 0$，且

$$\dot{\psi}(t)\leqslant y^2(t)-x^2(t)+2c\varepsilon=(y(t)+x(t))(y(t)-x(t))$$

$$+2c\varepsilon$$

$$=(y(t)+x(t))\psi(t)+2c\varepsilon \tag{3.6}$$

由 $x(t)<y(t)=\frac{1}{1-t}\Rightarrow y(t)+x(t)\leqslant\frac{2}{1-t}\leqslant\frac{2}{1-r}=2c, t\in(0,r)$，由此推出 $\dot{\psi}(t)\leqslant 2c(\psi(t)+\varepsilon)$. 对方程

$$\dot{Z}(t)=2c(Z(t)+\varepsilon) \tag{3.7}$$

自 0 到 $t$ 积分

$$\int_0^t \frac{dZ(t)}{Z(t)+\varepsilon}=\int_0^t 2c\,dt$$

$$\ln Z(t)+\varepsilon-\ln Z(0)+\varepsilon=2ct \tag{3.8}$$

由此得 $\varepsilon+Z(t)=\varepsilon e^{2ct}\Rightarrow Z(t)=\varepsilon(e^{2ct}-1)\Rightarrow Z(r)=\varepsilon(e^{2cr}-1)$，其中 $e^{2cr}=e^{\frac{2r}{1-r}}$，$r=\frac{1}{4}$ 时，$e^{\frac{2r}{1-r}}=e^{\frac{2}{3}}<1.9542\Rightarrow Z(r)<\varepsilon\Rightarrow\psi(r)<\varepsilon$（可以看到 $r$ 取 $\frac{1}{4}$ 的原因）. 这表示 $x(r)=y(r)-\psi(r)=\frac{1}{1-r}-\psi(r)\geqslant\frac{1}{1-r}-\varepsilon$. 所以结论成立.

## §4 解的等价类

### 1. $T(t,\sigma)$ 非一一对应的例子

**例 12** 考虑方程

$$\dot{x}(t)=-x(t-1)[1-x^2(t)] \tag{4.1}$$

可以验证以下诸结论成立.

(1)(4.1)有解 $x(t)=\pm 1, t\in R$.

(2)(4.1)右端是局部 Lipschitz 型的.

(3)(4.1)当 $|\varphi(0)|\neq 1$ 时的通解为

$$x(t)=\frac{c_0 e^{-\int_0^t 2\varphi(t_1-1)dt_1}-1}{c_0 e^{-\int_0^t 2\varphi(t_1-1)dt_1}+1}\quad t\in[0,1] \tag{4.2}$$

这由分步法直接积分即得. 若 $\varphi(0)=x(0)=a\Rightarrow c=(1+a)/(1-a)$.

(4)(4.1)中取 $\sigma=0$, $\varphi\in C$, 解存在且唯一. 当 $-1\leqslant\varphi(0)\leqslant1$ 时解在 $[-1,\infty)$ 上整体存在.

(5)空间 $C$ 中, $\varphi(0)=\text{const.}$ 的 集合 $\hat{C}=\{\varphi\in C, \varphi(0)=\text{const.}\}$ 是余维为 1 的子空间(超平面).

(6) $\varphi\in C$, $\varphi(0)=\pm1$, 则 $x(0,\varphi)(t)=\pm1$ 对 $\forall\ t\geqslant0$ 成立. 故对 $\forall\ t\geqslant1$, $x_t(0,\varphi)$ 是常值函数 $\pm1$.

设 $a\in R$, 集 $C_a=\{\varphi\in C, \varphi(0)=a\}$ 是一个余维为 1 的 $C$ 的子空间. $C_a$ 中的每一元 $\varphi$ 决定 $R\times R$ 中同一根积分曲线 $x(0,\varphi)(t)$ ($t\geqslant0$ 以后).

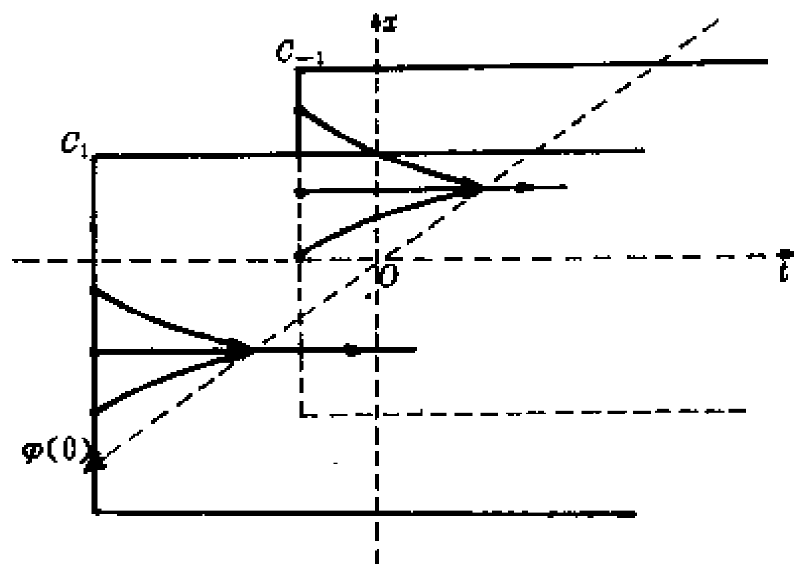



图 5.1

综上所述, 由通解的表达式(4.2), 只要 $|a|\neq1$, 对 $\forall\ a\in R$ 和 $\varphi\in C$ 便唯一地确定一个解. (其中 $C_0$ 由 $a$ 决定. 但解的表示中仍有 $\varphi$ 的积分, 所以 $\varphi$ 不同解也不同). 当 $\varphi\in C$, $\varphi(0)=1$(或 $\varphi(0)=-1$), 则 $x(0,\varphi)(t)=1$(或 $-1$)对 $\forall\ t\geqslant0$ 成立 $\Rightarrow t\geqslant1$ 时 $x_t(0,\varphi)=1$, 即 $T(t,0)$ 把 $C$ 的一个余维为 1 的子空间映为一点, 所以 $T(t,0)$ 非一一对应. 而 $|\varphi(0)|\neq1$ 时是一一对应.

现在说明，对例 12 所得到的结论与定理 2.1 是相容的. 把(4.1)右端记为算子形式

$$f=-\varphi(-1)[1-\varphi^2(0)] \tag{4.3}$$

求 $f$ 的 Fréchet 导数 $f'_\varphi$

$$f'_\varphi=2\varphi(0)\varphi(-1)\psi(0)-[1-\varphi^2(0)]\psi(-1) \tag{4.4}$$

它是一个线性算子,Riese 表示时的核取为

$$\mu(\varphi,\theta)=\begin{cases}2\varphi(0)\varphi(-1) & \theta=0\\ 0 & -1<\theta<0\\ (1-\varphi^2(0)) & \theta=-1\end{cases} \tag{4.5}$$

$f(t,\varphi)$在 $-1$ 处是原子的充要条件是 $1-\varphi^2(0)\neq 0$,而 $\varphi(0)=x(t)=\pm 1$ 时 $f$ 非原子,与定理 2.1 不矛盾(因为定理 2.1 仅仅是充分性准则).

## 2. 解的等价类

$T(\sigma,\varphi)$是否为一一对应的另一种考察途径是由下述等价关系确定等价类.

**定义** 4.1　称$(\sigma,\varphi)\in R\times C$ 等价于$(\sigma,\psi)\in R\times C$,若存在 $\tau\geqslant\sigma$ 使得 $x_\tau(\sigma,\varphi)=x_\tau(\sigma,\psi)$.

换言之,若过$(\sigma,\varphi)$与过$(\sigma,\psi)$的轨道有一个公共点,则说$(\sigma,\varphi)$与$(\sigma,\psi)$等价,记为

$$(\sigma,\varphi)\sim(\sigma,\psi) \tag{4.6}$$

不难验证"~"满足:自身是等价的,自反律,传递律,所以称之为等价关系.

用这个等价关系,对每一个 $\sigma$,空间 $C$ 可分解为一个等价类的集合$\{V_a\}$. 若 $T(t,\sigma)$是一一对应的,则每一类 $V_a$ 仅由一个 $\varphi$ 组成.

在每一个等价类 $V_a$ 中取一个代表元 $\varphi^{\sigma,a}$,记

$$W(\sigma)=\bigcup_a \varphi^{\sigma,a} \tag{4.7}$$

$W(\sigma)$是使 $T(t,\sigma)$为一一对应的最大集.关于这个集的拓扑性质以及它与给定的 RFDE($f$)之间的确切关系迄今尚所知无多,是一个值得进一步研究的课题.这里举一 些例子说明 $W(\sigma)$的取法.

**例** 13　考虑 $r=0$ 的特别情形,方程

$$\dot{x}(t)=0 \tag{4.8}$$

若 $C_a=\{\varphi:\varphi\in C,\varphi(0)=a\}$,则 $\varphi\in C_a\Rightarrow t\geqslant\sigma+r$ 时有 $x_t(\sigma,\varphi)=a\Rightarrow$ 对$\forall$ $\sigma$,等价类 $V_a$ 是 $C_a$,$\alpha\in R$,即 $W(\sigma)=\{C_a:\alpha\in R\}=C=R$,反之亦然.

**例** 14　对例 12 中考虑的方程(4.1),由本节第一段的分析:对$\forall$ $\varphi\in C$,$\varphi\notin C_1$,$\varphi\notin C_2$ 时,对应于 $\varphi$ 的等价类仅由 $\varphi$ 自身构成.若 $\varphi\in C_1$,则对应于 $\varphi$ 的等价类为 $C_{-1}$,$\varphi\in C_1$ 对应的等价类为 $C_{-1}$.

所以,对(4.1),已取 $\sigma=0$,即 $W(\sigma)=W(0)$可选取为

$$W(0)=C-[(C_1-\{1\})\cup(C_{-1}-\{-1\})] \tag{4.9}$$

其中$\{1\}\{-1\}$分别为含常值函数 $\varphi=1$,$\varphi=-1$ 的 $C$ 中单点集.(4.9)表示 $C$ 中去掉两集 $C_1$ 与 $C_{-1}$,但要补二者的各一个代表元.

### 3. 确定等价类的时间

**定义** 4.2　称一个等价类是在有限时间内确定的,如果存在 $\tau>0$,使得对$\forall$ $\varphi,\psi\in V_a$ 成立

$$x_{\sigma+t}(\sigma,\varphi)=x_{\sigma+t}(\sigma,\psi)\quad t\geqslant\tau \tag{4.10}$$

注意到定义中"在有限时间内确定"的概念是针对一个类而言的.

我们用一个例子说明等价类可能不是在有限时间内确定的.

**例** 15　设 $r=1$,考虑方程

$$\dot{x}(t)=\beta(|x_t|-x(t)) \tag{4.11}$$

对任何 $\beta>0$,我们要指出:(4.11)的等价类是一一对应于常值函数的,同时证明存在一个 $\beta>0$ 使得等价类不是在有限时间内确

定的. 分析如下:

(1)(4.11)右端连续,并且由

$|\beta(|x_t|-x(t))-\beta(|y_t|-y(t))|\leqslant|\beta|(|x(t)-y(t)|+||x_t|-|y_t||)\leqslant|\beta|(|x(t)-y(t)|+|x_t-y_t|)$

$\Rightarrow$右端是局部 Lipschitz 型的$\Rightarrow$对给定的 $\varphi\in C([-1,0],R)$过$(0,\varphi)$存在唯一的解 $x(0,\varphi,\beta)(t)$,它关于$(\varphi,\beta,t)$连续.

(2)若 $\varphi(0)\geqslant0,\varphi\neq0$,则 $x(0,\varphi,\beta)(t)$当 $t\geqslant1$ 时为正常数,事实上,因为 $\dot{x}(t)\geqslant0\Rightarrow|x_t|=x(t),t\geqslant1$. 由唯一性$\Rightarrow t\geqslant1$ 时 $x(t)$是常数$(x(t)\geqslant\varphi(0))$. 同理若 $\varphi(0)=0$,则 $\varphi\neq0$ 意味着 $\dot{x}(0)>0\Rightarrow$对 $t\geqslant1,x(t)>0$. 所以对任何常值函数,相应的等价类不止含有一个元.

(3)由于(4.11)是自治的$\Rightarrow$对应于常值函数零的等价类只含有零.

(4)对 $\beta\geqslant0,\beta(|x_t|-x(t))\geqslant0$,关于 $\varphi\in C$ 恒成立. 所以只有两种情况,$x(t)<0,x(t)\to M=\text{const}$. 或者$\exists\ t_1(\varphi,\beta)$使 $x(t_1)=0$,由严格单调性,$t_1$ 是唯一的零点. 当 $t\geqslant t_1+1$ 时,$|x_t|-x(t)=0\Rightarrow\dot{x}(t)=0\Rightarrow x(t)=M_1>0,t\geqslant t_1+1$,并且 $t_1(\varphi,\beta)$关于 $\varphi,\beta$ 是连续的. 总之,我们有

"对$\forall\ \beta>0,\exists\ \varphi\in C,\varphi(0)<0$,使 $t_1(\varphi,\beta)$存在."

事实上,设$\varphi\in C,\varphi(0)=-1,\varphi(\theta)=-r,r>1,\theta\in[-1,-\frac{1}{2}]$且 $\varphi(\theta)$在$[-\frac{1}{2},0]$上是单调增加的,则只要 $x(t)\leqslant0,0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$,我们有$|x_t|=r$,故

$$\dot{x}(t)=\beta[r-x(t)]\geqslant\beta r \tag{4.12}$$

从而若 $x(t)<0,0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$,就有 $x(t)\geqslant\beta rt-1$,因此当 $\beta r/2>1$ 时 $x$ 必有零点 $t_1(\varphi,\beta)<\frac{1}{2}$,这是举例性证明.

(5)定义闭子集 $C_{-1}=\{\varphi\in C,\varphi(0)=-1\}=C_{-1}^0\cup C_{-1}^*$,

$C^0_{-1}=\{\varphi\in C_{-1}, t_1(\beta,\varphi)$存在$\}$. $C^{\infty}_{-1}=\{\varphi\in C_{-1}, t_1(\beta,\varphi)$不存在$\}$. 由 $t_1(\beta,\varphi)$是连续的$\Rightarrow C^0_{-1}$是开的，$C^{\infty}_{-1}$是闭的. 若 $C^{\infty}_{-1}$非空，$\exists\ \{\varphi_j\}\subset C^{\infty}_{-1}$，$\varphi_j\to\varphi$，$j\to\infty\Rightarrow\varphi\in C^{\infty}_{-1}$且 $t_1(\beta,\varphi_j)\to\infty$. 进而指出，的确存在 $\beta_0>0$ 使 $C^{\infty}_{-1}$非空.

设(4.11)有形如 $x(t)=-e^{-\lambda t}$的解，$\lambda>0$，以 $x$ 代入(4.11)得

$$\lambda-\beta=\beta\left|\sup_{\theta\in[-1,0]}e^{-\lambda\theta}\right|=\beta e^{\lambda} \tag{4.13}$$

对 $\beta>0$，(4.13)有二重根 $\lambda>0$ 的条件是

$$\lambda-\beta=\beta e^{\lambda} \quad 及 \quad \beta e^{\lambda}=1 \tag{4.14}$$

合并(4.14)两式得 $\lambda-\beta=1$，代入(4.14)第二式得 $\beta e^{1+\beta}=1\Rightarrow\ln\beta+1+\beta=0$，如图 5.2 所示. 这样的 $\beta$ 是存在的.

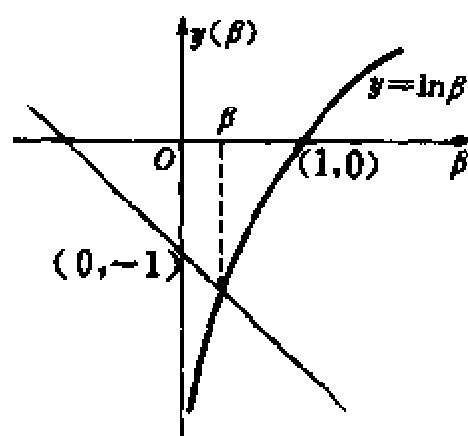



图 5.2

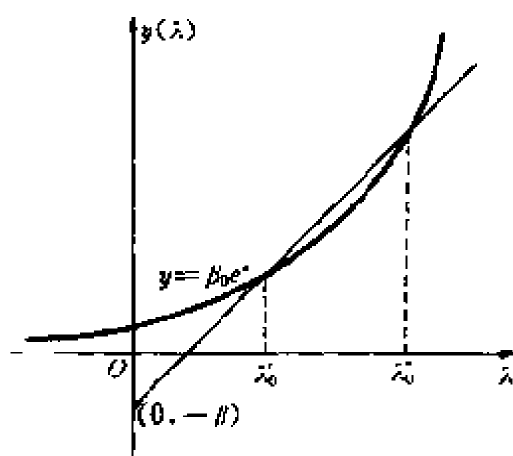



图 5.3

再取 $\beta_0\in(0,\beta)$，如图 5.3 所示，此时方程

$$\lambda-\beta_0=\beta_0e^{\lambda}$$

有两个正根. 设 $\lambda'_0$ 是它的一个正根，则 $x(t)=-e^{-\lambda'_0t}$是方程(4.11)以初始函数 $\varphi=-e^{-\lambda'_0\theta}$，$\theta\in[-1,0]$的解，且 $\varphi(0)=-1\Rightarrow\varphi\in C_{-1}\Rightarrow C^{\infty}_{-1}$非空. 记

$$S(\beta_0)\triangleq\sup\{t_1(\varphi,\beta_0);\varphi\in C^0_{-1}\}=\infty$$

由(4.11)是齐次线性方程，对每一个正数 $a$ 和 $\sigma$，$\exists\ \varphi\in C$ 使

得 $x(\varphi,\beta_0)(t)=a, t\geqslant\sigma$ 且 $x(\varphi,\beta_0)<a$ 当 $0\leqslant t<\sigma$. 证毕.

对线性自治系统，则不存在这样的反例，即

**定理 4.1** 线性自治 RFDE 的等价类是在有限时间内确定的.

**证** 设 $\varphi,\psi$ 为 RFDE$(L)$属于同一等价类的两个函数，则对应于 $\varphi-\psi$ 的解 $x=x(\varphi)-x(\psi)$（线性叠加原理），由于 $\varphi,\psi$ 是等价类中的两个元. 由第三章的结论：存在常数 $a$，$x(t)$趋于 0 的速度快于任何指数函数$\Rightarrow\exists\ \gamma\geqslant r$，$\gamma$ 与 $\varphi,\psi$ 无关，当 $t\geqslant\gamma-r$ 时 $x=0$，即等价类是在有限时间内确定的.

对自治线性 RFDE

$$\dot{x}(t)=L(x_t) \quad r=\text{const.} \tag{4.15}$$

设 $\gamma$ 是依赖于 $L$ 的常数，令 $T(t,0)=T(t)$，定义

$$S=\{\varphi;\varphi\in C, T(t)\varphi=0, y\geqslant\gamma\} \tag{4.16}$$

**推论 4.1** $S$ 是 $C$ 的关于 $T(t)$的不变子空间.

由 $\gamma$ 与 $\varphi$ 无关即得.

J. Hale 提出了如下的公开问题：

对线性自治 FDE(4.15)，$S$ 由(4.16)定义，那末是否存在 $S$ 的补空间 $U$，$U$ 是 $T(t)$的不变子空间，使得 $C=S\oplus U$？并且建议先寻求(4.15)的某种合适的标准形式，例如

**例 16** 考虑三维自治系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t-1) \quad t>0 \tag{4.17}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.18}$$

取 $\varphi_3(0)=0\Rightarrow t\geqslant0$ 时 $x_3(t)=0\Rightarrow$

$$x_2(t)=\varphi_2(0)+\int_0^t\varphi_3(s-1)ds \qquad 0\leqslant t\leqslant1 \tag{4.19}$$

$$x_2(t)=\varphi_2(0)+\int_0^1\varphi_3(s-1)ds \qquad t\geqslant1$$

$\Rightarrow \varphi_2(0) = -\int_{-1}^{0} \varphi_3(\theta) d\theta$，类似地有

$$\varphi_1(0) = \int_{-1}^{0} [\varphi_3(\theta) - \varphi_2(\theta)] d\theta \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{\theta} \varphi_3(s) ds d\theta \tag{4.20}$$

定义集 $S$ 为

$$S = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T : \varphi_3(0) = 0, \varphi_2(0) = -\int_{-1}^{0} \varphi_3(\theta) d\theta,$$
$$\varphi(0) \text{满足}(4.20)\} \tag{4.21}$$

注意上述解诸分量的表达式是用了分步法.

由此，对方程(4.17)的任一解 $x$，若它趋于零的速度快于任何指数函数，则 $x$ 的初始函数 $\varphi$ 必在 $S$ 中. 反之，若 $\varphi \in S$，则方程(4.17)过$(0, \varphi)$的解趋于零的速度快于任何指数函数，亦即 $S$ 含有一切具此性质解的初始函数. 闭子空间 $S$ 的余维数为 3. 现在定义子空间 $U$ 为

$$U = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_3(\theta) = c, \varphi_2(\theta) = b + c\theta,$$
$$\varphi_1(\theta) = a + b\theta + c\frac{\theta^2}{2}, -1 \leqslant \theta \leqslant 0, a, b, c \text{ 皆常数}\} \tag{4.22}$$

子空间 $U$ 的维数是 3，它是 $S$ 的补空间，因为 $\varphi \in S \cap U \Rightarrow \varphi = 0$.

进而可证，对$\forall\ t \geqslant 0, T(t)U \subseteq U$，事实上，若 $\varphi \in U$，则 $x_3(t) = c, t \in [-1, 0] \Rightarrow x_2(t) = b + \int_0^t c ds, t \geqslant 0$，又由 $x_2(\theta) = b + c\theta, \theta \in [-1, 0] \Rightarrow x_2(t) = b + ct, t \geqslant -1$，类似地可得 $x_1(t) = a + bt + c\frac{t^2}{2}, t \geqslant -1 \Rightarrow$ 对$\forall\ t \geqslant 0, x_t(\varphi) \in U$. 换言之，Hale 问题对(4.17)有肯定的答案.

现在考察方程(4.17)在不变子空间 $U$ 上的形式. 如上所述，$T(t)U = U, t \in R$. 事实上把多项式函数$(c, b + ct, a + bt + c\frac{t^2}{2})^T$ 代入(4.17)即知之. 换句话说，$T(t)$在 $U$ 上的定义可推广到 $t$ 的负值上去. $T(t)\varphi$ 的表示可以写成

$$T(t)\varphi=x_t=x(t+\theta)=\begin{pmatrix}x_1(t+\theta)\\x_2(t+\theta)\\x_3(t+\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b(t+\theta)+c\dfrac{(t+\theta)^2}{2}\\b+c(t+\theta)\\c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+bt+c\dfrac{t^2}{2}+b\theta+c\theta t+c\dfrac{\theta^2}{2}\\b+ct+c\theta\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\theta&\dfrac{\theta^2}{2}\\0&1&\theta\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+bt+c\dfrac{t^2}{2}\\b+ct\\c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&\theta&\dfrac{\theta^2}{2}\\0&1&\theta\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}$$

记 $\Phi_1=(1,0,0)^T,\Phi_2=(\theta,1,0)^T,\Phi_3=(\dfrac{\theta^2}{2},\theta,1)^T$，则有

$$T(t)\varphi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\Phi_i y_i(t)$$

(可取 $U$ 的基为 $\Phi_1(\theta)=1,\Phi_2(\theta)=\theta,\Phi_3(\theta)=\dfrac{\theta^2}{2}$)，$y$ 满足常微分方程

$$\dot{y}=Ay \qquad y=(y_1,y_2,y_3)^T \tag{4.23}$$

由于 $A$ 是 Jordan 标准形，故可称方程(4.17)自身为标准形. 由此推出：

**推论** 4.2　对自治线性系统(4.17)，等价类的确定时间可能大于滞量.

## §5　点态退化

如所周知，常微分方程的解映射定义了一个同胚. 即在解映射之下一个球的象含有一个球，而 FDE 便不具备这一性质.

设 $\sigma\in R,\varphi\in C([-r,0],R^n)$,RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{5.1}$$

过$(\sigma,\varphi)$的解整体存在且唯一.

**定义 5.1** 对给定的 $\sigma\in R,\forall\ \varphi\in C$,若存在 $R^n$ 的真子空间 $R^n_*$, $t_1>\sigma$ 使(5.1)的一切解 $x(\sigma,\varphi)(t)$成立 $x(\sigma,\varphi)(t_1)\in R^n_*$,则(5.1)称为在 $t_1$ 处点态退化.反之,称为点态完备的[4].

若 $x(\sigma,\varphi)(t_1)\in R^n_*$,对$\forall\ t_1\in I\subseteq R$ 成立,则称(5.1)在 $I$ 上点态退化.

**例 17** 对 Winston-Yorke 方程(第四章例 10),自 $t\geqslant 1$ 以后一切解重合于零解,如果 $\sigma\leqslant 0$ 的话.由此可见,方程在$[1,\infty)$上点态退化.

**注 5.1** 由定义 5.1 可见,点态退化是对"给定的 $\sigma\in R$"而言的.取不同的 $\sigma$ 点态退化的性质可以不同.例 17 中若取 $\sigma>1$,则不存在 $t_1>\sigma$ 使方程点态退化.

点态退化与否,描述了系统的解在 $R^n$ 中的值域与常微分方程根本不同之处.

**例 18** (Зверкин)对方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) \tag{5.2}$$

$$b(t)=\begin{cases} g(t),t\leqslant 0,g\in C((-\infty,0],R^n)\text{是任意给定的} \\ 0 \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{3\pi}{2} \\ -\cos t \quad \frac{3\pi}{2}\leqslant t\leqslant 3\pi \\ 1 \quad t\geqslant 3\pi \end{cases}$$

取 $\sigma=0$ 及一族 $\varphi(t)$, $t\in\left[-\frac{3\pi}{2},0\right]$,它们有相同的 $\varphi(0)=\text{const.}$的值.它们对应(5.2)的解表示为

$$
x(t,0,\varphi)=\begin{cases}\varphi(t) & t\in[-\frac{3\pi}{2},0)\\ \varphi(0) & t\in[0,\frac{3\pi}{2})\\ -\sin t\varphi(0) & t\geqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases} \tag{5.3}
$$

亦即对一切 $\varphi(0)$ 相等的 $\varphi(t)$，当 $t\geqslant0$ 以后的解是同一条积分曲线，这条曲线与 $x=0$ 这一解相交无限多次（相交在诸点 $t=k\pi$ 处，$k=2,3,\cdots$），如图 5.4 所示，在 $k\pi$ 处方程点态退化，即对任何直线 $t=k\pi(k=2,3,\cdots)$ 上，对 $\forall\ \varphi\in C([-\frac{3\pi}{2},0],R)$ 只能取 $x=0$，$x(k\pi,0,\varphi)=0$ 对 $\forall\ \varphi\in C$ 成立. 这说明(5.2)解的值域不是 $R^2$，如图 5.4 所示.

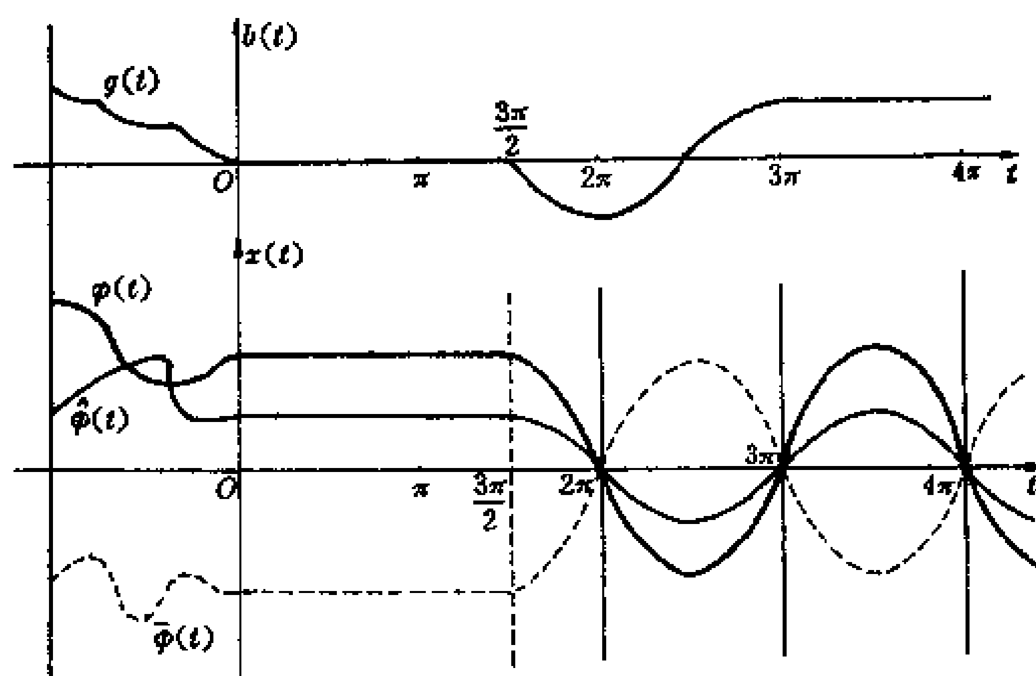



图 5.4

**例** 19　考虑方程

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t-1) \tag{5.4}$$

$$a(t)=\begin{cases}2\sin^2 t\pi & t\in[2n,2n+1]\\ 0 & t\in[2n-1,2n]\end{cases}\qquad n=0,\pm1,\cdots$$

给定初始时刻$\sigma\in R,\varphi\in C([\sigma-1,\sigma],R)$，取$\hat{\sigma}$是使$\hat{\sigma}\geqslant\sigma$的最小奇整数. 为方便起见，设$\sigma$取在区间$(-1,1)$中，则$\hat{\sigma}=1$，记$x(t,\sigma,\varphi)=x(t)$，则$x(\sigma)=x(1)$，再从$\hat{\sigma}=1$出发求解(5.4).

用分步法，当$t\in[1,2]$时，由(5.4)有$\dot{x}(t)=0$，故

$$x(t)=x(1),t\in[1,2]$$

同理在$t\in[2,3]$中(5.4)化为

$$\dot{x}(t)=-2x(1)\sin^2 t\pi$$

积分之，得$x(t)$在$t\in[2,3]$中表示成

$$x(t)=x(1)\left[1-2\int_2^t \sin^2 s\pi ds\right]$$

$\Rightarrow x(3)=x(1)\left[1-2\int_2^3 \sin^2 s\pi ds\right]=0$，对$\forall\ x(1)$成立$\Rightarrow$当$t\geqslant3$以后，$x(t)\equiv0$，此时点态退化的状况和例17所说的类似，如图5.5与5.6所示.

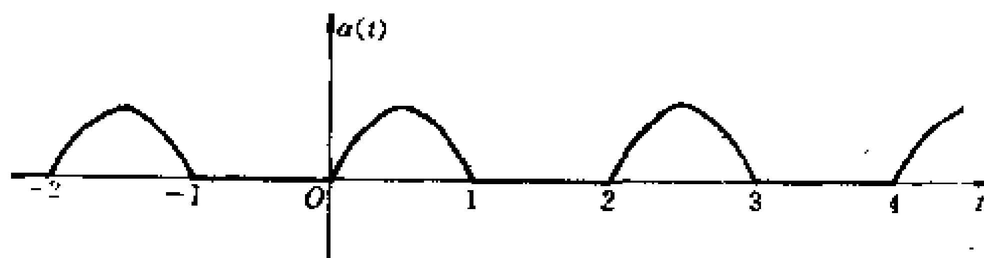



图5.5

我们注意到上述诸例都是非自治方程，1967年L. Weiss提出如下猜测："线性自治FDDE都是点态完备的"[4]. 这里他并未明确说明滞量只限于1个抑或可以有多于1个滞量的情形. 1972年Popov和Зверкин同时给出了线性自治系统点态退化的例子：

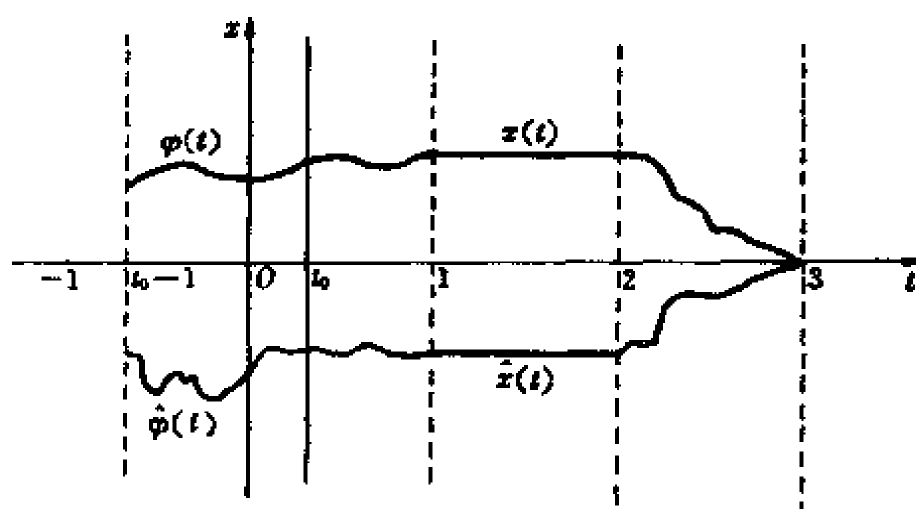



图 5.6

**例 20** (Popov)设 $\tau=1$,三阶系统[76]

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=2x_2(t)\\&\dot{x}_2(t)=-x_3(t)+x_1(t-1)\quad t\geqslant t_1\\&\dot{x}_3(t)=2x_2(t-1)\end{aligned}\tag{5.5}$$

用向量矩阵记法写成

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)\quad t\geqslant t_1\tag{5.6}$$

其中

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\tag{5.7}$$

当 $t\geqslant t_1+1$ 时我们有

$$\dot{x}_1(t-1)-\dot{x}_3(t)=0\tag{5.8}$$

$\Rightarrow x_1(t-1)-x_3(t)=C_1=\text{const.}\in R$,再由(5.5)第二式有

$$\dot{x}_2(t)=C_1\Rightarrow x_2(t)=C_1t+C_2,C_2=\text{const.}\in R$$

用 $x_2(t)$代入(5.5)第一式有

$$\dot{x}_1(t)=2x_2(t)\Rightarrow x_1(t)=C_1t^2+2C_2t+C_3,C_3=\text{const.}$$

当 $t\geqslant t_1+2$ 时,由 $x_3(t)=x_1(t-1)-C_1=C_1(t-1)^2+2C_2(t-1)+$

$C_3-C_1 \Rightarrow x_3(t)=C_1t^2+2t(C_2-C_1)+C_3-2C_2 \Rightarrow$ 对$\forall$ $t\geqslant t_1+2$ 成立

$$x_1(t)-2x_2(t)-x_3(t)=0 \tag{5.9}$$

即当 $t\geqslant t_1+2$ 以后，一切解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^T$ 都落在平面(5.9)上，即(5.6)点态退化.

对线性系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-r) \tag{5.10}$$

其中 $x\in R^n$，$A,B$ 为 $n\times n$ 常数阵，$r=\text{const.}>0$，L・Weiss 证明上述点态退化的定义 5.1 等价于下列定义：

**定义 5.2** 系统(5.10)为点态退化的充要条件是：存在一个 $n$ 维向量 $q\neq 0$ 和一个数 $t_1>0$，使得对每一个在$(0,t_1)$上满足(5.10)的连续函数 $x:[-r,t_1]\to R^n$，成立条件 $q^Tx(t_1)=0$.

当我们指定 $t_1$，或者 $q$，或者 $t_1,q$，则说方程(5.10)"在 $t_1$ 处是点态退化的"，或者"关于 $q$ 是点态退化的"，或者"在 $t_1$ 关于 $q$ 是点态退化的".

一般地说，若(5.10)点态退化则不止存在一个向量 $q$. 对每一个向量 $q$，定义 5.2 中的 $t_1$ 的最大集合，由如下定理确立.

**定理 5.1** 设方程(5.10)关于向量 $q\neq 0$ 是点态退化的. 则使(5.10)为点态退化的点 $t_1$ 的最大集合为$(lr,\infty)$，$l\geqslant 2$ 是使

$$q^T(s(\sigma))^{l+1}=0 \tag{5.11}$$

的最小整数，$s(\sigma)$是 $n\times n$ 阵多项式. 满足方程

$$(\sigma I-A)s(\sigma)=B\det(\sigma I-A) \tag{5.12}$$

其中 $I$ 为 $n\times n$ 单位阵，$A,B$ 是(5.10)的系数阵.

证明参看[420].

**定理 5.2** 方程(5.10)点态退化的必要条件是 $B$ 的秩 $r_B\geqslant 2$.

**证** 这是定理 5.1 的一个推论. 事实上，若 $r_B<2\Rightarrow B$ 可写成 $bc^T$，$b$ 是 $n$ 维列向量，$c^T$ 是 $n$ 维行向量，方程(5.12)代之以方程

$$(\sigma I-A)R(\sigma)=I\det(\sigma I-A) \tag{5.13}$$

于是 $s(\sigma)=R(\sigma)B$. 此时有

$$s(\sigma)=R(\sigma)B=R(\sigma)bc^T\triangleq r(\sigma)c^T \tag{5.14}$$

由 $l$ 的定义有

$$q^T(s(\sigma))^l\not\equiv 0 \quad 及\ q^T(s(\sigma))^{l+1}\equiv 0 \tag{5.15}$$

用(5.14)代入(5.15)两表达式分别得

$$q^T(s(\sigma))^l=q^T(r(\sigma)c^T)^l=q^Tr(\sigma)\underbrace{[c^Tr(\sigma)]\cdots[c^Tr(\sigma)]}_{(l-1)个}c^T$$

$$=q^Tr(\sigma)[c^Tr(\sigma)]^{(l-1)}c^T\not\equiv 0$$

$$q^T(s(\sigma))^{l+1}=q^T(r(\sigma)c^T)^{l+1}=q^Tr(\sigma)\underbrace{[c^Tr(\sigma)]\cdots[c^Tr(\sigma)]}_{l个}c^T$$

$$=q^Tr(\sigma)[c^Tr(\sigma)]^lc^T\equiv 0$$

注意到 $c^Tr(\sigma)$ 是纯量函数⇒矛盾. 证毕.

然而对多于 1 个滞量的系统，二维系统仍可能是点态退化的. 如:

**例 21** 对两个滞量的二维系统

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -4 & 4\end{pmatrix}x(t-\ln 2)$$

$$+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}x(t-\ln 4) \tag{5.16}$$

(5.16)的特征方程为

$$h(\lambda)=\det\begin{vmatrix}\lambda-1+2^{2-\lambda}-2^{2-2\lambda} & 1-3(2^{-\lambda})+2^{1-2\lambda}\\ 2^{2-\lambda}-2^{3-2\lambda} & \lambda-2^{2-\lambda}+2^{2-2\lambda}\end{vmatrix}=0 \tag{5.17}$$

经过简单的展开计算得 $h(\lambda)=\lambda(\lambda-1)=0$，$h(\lambda)$ 无超越项 $e^\lambda$，有两个特征根 $\lambda=0$，$\lambda=1$，相应的指数解为 $x(t)=(0,1)$ 及 $x(t)=(0,1)e^t$. 可以证明，(5.16)的解 $x(0,c)(t)$ 是一维的⇒点态退化.

对点态退化的进一步研究可参看[591].

## §6 解映射的紧性与分解

设$\Omega \subseteq R \times C$为开集，$f: \Omega \to R^n$连续，对

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{6.1}$$

我们有

**引理** 6.1 对$\forall\ t \geqslant \sigma + r$，(6.1)的解映射$T(t, \sigma)$是局部全连续的. 即对$\forall\ t \geqslant \sigma + r, \varphi \in C$，$\exists\ \varphi$的一个邻域$V(t, \sigma, \varphi)$使得$T(t, \sigma)$ $V(t, \sigma, \varphi)$是$C$的紧集.

**证** 因为$f$连续，$T(\tau, \sigma)\psi$关于$(\tau, \sigma, \psi)$是连续的. 对$\forall\ t \geqslant \sigma$，$\exists\ \varphi$的一个邻域$V(t, \sigma, \varphi)$和常数$M$，使得

$$|T(\tau, \sigma)V(t, \sigma, \varphi)| \leqslant M \quad \sigma \leqslant \tau \leqslant t$$

$$|f(\tau, T(\tau, \sigma)V(t, \sigma, \varphi))| \leqslant M \quad \sigma \leqslant \tau \leqslant t$$

$$|\dot{x}(\sigma, V(t, \sigma, \varphi))(\tau)| \leqslant M \quad \sigma \leqslant \tau \leqslant t \tag{6.2}$$

由此推知函数族

$$\{x_t(\sigma, \psi): \psi \in V(t, \sigma, \varphi), t \geqslant \sigma + r\} \tag{6.3}$$

是予紧的．证毕.

为了讨论全局性质，设$\Omega = R \times C$，$T: C \to C$对$\forall\ t \geqslant \sigma$有定义，且$T(t, \sigma)\varphi$关于$(t, \sigma, \varphi)$连续.

**定义** 6.1 设$A(t, \sigma): C \to C$对$t \geqslant \sigma$有定义，映射$A(t, \sigma), t \geqslant \sigma$称为条件全连续的，若$A(t, \sigma)\varphi$关于$(t, \sigma, \varphi)$是连续的，并且对任一有界集$B \subset C$存在紧集$B^* \subset C$，使得只要$A(t, \sigma)\varphi \in B, \sigma \leqslant \tau \leqslant t$时就有$A(t, \sigma)\varphi \in B^*$.

**定义** 6.2 设$X, Y$是度量空间，映射$A: X \to Y$称为有界的，若$A$把$X$的有界集映为$Y$中的有界集. 若$A(\lambda): X \to Y$依赖于度量空间$\Lambda$中的参数$\lambda$，称$A(\lambda)$是在$\Lambda$的紧集上一致有界的，若对任意的紧集$\Lambda_0 \subset \Lambda$，任意的有界集$X_0 \subset X$，存在有界集$Y_0 \subset Y$，使得$A(\lambda)X_0 \subseteq Y_0$对$\forall\ \lambda \in \Lambda_0$成立.

**引理 6.2** 设 $A(t,\sigma):C\to C$ 对 $t\geqslant\sigma$ 有定义，且 $A(t,\sigma)$ 在 $[\sigma,\infty)$ 的紧集上是一致有界的，则 $A(t,\sigma)$ $t\geqslant\sigma$ 条件全连续即可推出全连续.

由定义立即得到引理结论.

为了表示解映射 $T(t,\sigma)$ 的分解，我们定义算子 $S(t):C\to C$，$t\geqslant0$ 为

$$S(t)\varphi(\theta)=\begin{cases}\varphi(t+\theta)-\varphi(0),t+\theta<0\\ 0\qquad t+\theta\geqslant0,-r\leqslant\theta\leqslant0\end{cases}\tag{6.4}$$

对 $\forall\ t\geqslant0$，算子 $S(t)$ 是线性有界的，且成立

$$\begin{aligned}&S(t+\tau)=S(t)S(\tau)\quad t\geqslant0,\tau\geqslant0\\ &S(t)=0\qquad t\geqslant r\end{aligned}\tag{6.5}$$

**定理 6.1** 对给定的 RFDE$(f)$(6.1)，设 $f:R\times C\to R^n$ 是有界连续映射，则它的解映射 $T(t,\sigma)$，$t\geqslant\sigma$ 可写成分解式

$$T(t,\sigma)=S(t-\sigma)+U(t,\sigma)\tag{6.6}$$

其中 $S(t)$，$t\geqslant0$ 由(6.4)定义，$U(t,\sigma):C\to C$，$t\geqslant\sigma$ 是条件全连续的，于是 $\tau(t,\sigma)$，$t\geqslant\sigma+r$ 是条件全连续的.

**证** 由(6.4)，则(6.6)意味着

$$U(t,\sigma)\varphi(\theta)=T(t,\sigma)\varphi(\theta)-S(t-\sigma)\varphi(\theta)$$

$$U(t,\sigma)\varphi(\theta)=\begin{cases}\varphi(0),t+\theta<\sigma\\ \varphi(0)+\int_\sigma^{t+\theta}f(s,T(s,\sigma)\varphi)ds\quad t+\theta\geqslant\sigma\end{cases}\tag{6.7}$$

其中 $\theta\in[-r,0]$. 现在证 $U(t,\sigma)$，$t\geqslant\sigma$ 是条件全连续的：对任何有界集 $B\subset C$，由算子 $S(t)$ 是有界线性的 $\Rightarrow$ 存在有界集 $B_1\subset C$，使得只要 $T(s,\sigma)\varphi\in B_1$，$\sigma\leqslant s\leqslant t$，就有 $U(s,\sigma)\varphi\in B_1$，$\sigma\leqslant s\leqslant t$，因为 $f$ 是 $R\times C$ 到 $R^n$ 的有界连续映射 $\Rightarrow$ 存在只依赖于 $B,\sigma,t$ 的常数 $M$，使得当 $\sigma\leqslant s\leqslant t$，$U(s,\sigma)\varphi\in B$ 时，

$$|f(s,T(s,\sigma)\varphi)|\leqslant M\quad\sigma\leqslant s\leqslant t\tag{6.8}$$

因之在这些假定之下有

$$\int_{\alpha}^{\beta}|f(s,T(s,\sigma)\varphi)|ds\leqslant M(\beta-\alpha) \tag{6.9}$$

(6.9)中 $\sigma\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant t$，令

$$B^{*}=\{\varphi:\varphi\in B\subset C,|\varphi(\theta)-\varphi(\xi)|\leqslant M|\theta-\xi|\\ \theta,\xi\in[-r,0]\} \tag{6.10}$$

(6.10)说明 $U(t,\sigma)\varphi\in B^{*}$. 因为 $t+\theta\leqslant\sigma$ 时 $U(t,\sigma)\varphi(\theta)$ 是常数，再注意到当 $t\geqslant r$ 时 $S(t)=0$. 证毕.

**推论 6.1** 若 $f:R\times C\to R^{n}$ 是有界连续映射 $T(t,\sigma):C\to C$ 是在$[\sigma,\infty)$的紧集上是一致有界的. 我们记

$$T(t,\sigma)=S(t-\sigma)+U(t,\sigma),t\geqslant\sigma$$

则 $U(t,\sigma),t\geqslant\sigma$ 是全连续的，其中 $S(t),t\geqslant0$ 由(6.4)定义.

**推论 6.2** 若 $f:R\times C\to R^{n}$ 是有界连续映射，$T(t,\sigma):C\to C$ 是在$[\sigma,\infty)$的紧集上一致有界，则当 $t\geqslant\sigma+r$ 时，$T(t,\sigma)$是全连续的.

**推论 6.3** 若 $f:R\times C\to R^{n}$ 是有界的连续映射，$T(t,\sigma),t\geqslant\sigma$ 是有界映射，则对 $r>0$，解映射 $T(t,\sigma)$当 $t\geqslant\sigma$ 时不可能是一个同胚.

以上三个推论的证明是显而易见的.

# 第六章

# NFDE 的基本理论

如第一章所述，在研究线性自治差分微分方程时，人们命名一类最高阶导数存在时滞的方程为“中立型”的. 六十年代有许多关于中立型方程的研究工作，基本上是形式逻辑的产物，只限于求它们的数学特征而对应用背景则所知无多. 但是进入七十年代以后，以中立型泛函微分方程为数学模型的应用课题大量涌现，如博奕论、细胞中酶反应动力学、遗传问题、控制理论等等. 此后对 NFDE 的研究工作受到普遍的重视，取得长足的进展. 本章限于有限滞量的情形.

## §1 NFDE 的类型与 Cauchy 问题

NDDE 的典型表达式

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t))) \tag{1.1}$$

是最早研究的中立型方程，初始集 $E_{t_0}$ 与滞效集 $F_{t_0}$ 如第一章定义，则当 $\tau(t)\geqslant r>0$ 时可用分步法求解 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t)))$$

$$x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)\quad t\in E_{t_0}. \tag{1.2}$$

这也同时证明了，只要 $f$ 关于诸变元连续，则解的存在性定理成立. 初始函数空间为 $C^1$.

对(1.2)来说，对给定的初始时刻 $\sigma$，式

$$\dot{\varphi}(\sigma-0)=x(\sigma+0)=f(\sigma,x(\sigma),\varphi(\sigma-\tau),\dot{\varphi}(\sigma-\tau)) \quad (1.3)$$

若不成立，则由于 $f$ 中含有未知函数的导数，所以 $\dot{x}(t)$ 在 $\sigma=\sigma+k\tau(k=0,1,2,\cdots\cdots)$ 处仍是不连续的．即不问 $\varphi$，$f$ 可微多少次，$x(t)$ 在 $\sigma+k\tau$ 处的可微性并不改变，换句话说，NDDE 的解没有平展性，这可以由(1.1)两边求导数并写出与(1.3)类似的等式推出．

(1.1)一般未必可解出 $\dot{x}(t-\tau(t))$ 而写成算子型中立型方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \quad (1.4)$$

其中 $0\leqslant\tau(t)\leqslant r$，$x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$．要保证(1.4)是 NFDE 需要假定算子 $D(t,\varphi)$ 在 $\sigma$ 上，子 0 及 $-r$ 处是原子的．

1970 年 J. K. Hale 与 M. A. Cruz 创建了(1.4)完整的基本理论，此时初值问题写成

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)$$
$$x(t)=\varphi(t) \quad t\in[-r,0] \quad (1.5)$$

表明初始函数空间取为 $C$ 而不必取 $C^1$，不仅如此，(1.5)的基本理论更接近于 RFDE($f$)的基本理论，本章的后半部分将给出系统介绍．

(1.4)形式的中立型方程有时称为"算子(型)中立型泛函微分方程"以示区别．反之，非算子型 NFDE 并不都可以写成(1.1)形式，它可能含有分布时滞的项，例如方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t,\dot{x}(t-\tau),\int_{-r}^{0}A(t,\theta)g(\dot{x}(t+\theta))d\theta) \quad (1.6)$$

而且也不能写成(1.4)形式，有些文献称之为"超中立型"方程，不管如何，对(1.1)(1.6)的基本理论都要重新确立．

近年来，另一类中立型方程正在引起人们的关注，并已取得初步进展：设 $\tau(t)$ 是连续变号函数，$\tau: R\to R$，有至多可列个零点 $\{t_i^0\}$，即

$$\tau(t_k^0)=0,\tau(t)>0,t\in(t_{2k-1}^0,t_{2k}^0)$$

$$\tau(t)<0,t\in(t_{2k}^0,t_{2k+1}^0),k=1,2\cdots\cdots \tag{1.7}$$

记 $I_1=\bigcup[t_{2k-1}^0,t_{2k}^0],I_2=\bigcup[t_{2k}^0,t_{2k+1}^0]$，则 $I_1\bigcup I_2=R$. 考虑方程

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau(t))=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{1.8}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t))) \tag{1.9}$$

我们讨论方程(1.8)，在 $I_1$ 上、$I_2$ 上(1.8)都是 NDDE，但因为二者的基准变元不同，所以表达式不同，合并在一起认为是一个在 $I_1\bigcup I_2$ 分段定义的 NFDE，记为 N*FDE(N*DDE).

方程(1.8)对指定的区间$[t_{k-1}^0,t_k^0]$来说与通常的 NDDE 无异，但从整体考虑，诸区间连接点 $t_k^0$ 处显得相当复杂，积分曲线需要合理的衔接以便谈论(1.8)解的整体存在性.

现在给出(1.1)(或(1.2))的存在唯一性定理.

若(1.1)中 $\tau(t)\geqslant r>0$，对$\forall\ \varphi\in C^1([-r,0],R^n)$用分步法和常微分方程的已知定理，可以简单地给出存在唯一性定理.

若(1.1)中 $\tau(t)\geqslant 0$，且在$[\sigma,b)$上不存在 $r>0$ 使得 $\tau(t)\geqslant r>0$，$b>\sigma$，是常数或$+\infty$. 我们定义 $f(t,\varphi,\psi)$满足的局部 Lipschitz 条件为

设$(\varphi_i,\psi_i)\in\Omega,i=1,2$. 则

$$|f(t,\varphi_1,\psi_1)-f(t,\varphi_2,\psi_2)|<L[|\varphi_1-\varphi_2|+|\psi_1-\psi_2|] \tag{1.10}$$

其中 $L$ 是依赖于$\Omega$的常数.

**定理 1.1** 若 $f$ 连续且局部满足 Lipshitz 条件，则 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)),\dot{x}(t-\tau(t)))\\&x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),t\in[\sigma-r,\sigma]\end{aligned} \tag{1.11}$$

的解存在且唯一.

对(1.8)我们给出了一个整体存在定理[268].

## §2 第三临界情形

本节指出中立型方程两个十分重要的特性——线性自治 NDDE 特征根的两种特别分布形式：$\mathrm{Re}\lambda_j<0$，$\mathrm{Re}\lambda_j\to 0$ 和除了负实部的根以外有可列个单重纯虚根.

对线性自治 NDDE

$$x^{(n)}(t)+cx^{(n)}(t-\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}[a_k x^{(k)}(t)+b_k x^{(k)}(t-\tau)] \tag{2.1}$$

其中 $c\neq 0$，$a_k$，$b_k$ 皆为常数，特征方程为

$$h(\lambda)=\lambda^n(1+ce^{-\lambda\tau})-\sum_{k=0}^{n-1}[a_k+b_k e^{-\lambda\tau}]\lambda^k=0 \tag{2.2}$$

设(2.2)根全体为 $\{\lambda_j\}$，存在子序列 $\{\lambda'_j\}\subseteq\{\lambda_j\}$ 使 $\mathrm{Re}\,\lambda'_j\to 0$，$j\to\infty$ 这个事实，为方便计不妨假定 $\{\lambda'_j\}$ 即 $\{\lambda_j\}$. 我们有

**定理 2.1** 设(2.1)的特征根全体 $\{\lambda_j\}$ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda_j<0,\ j=1,2\cdots\cdots,\ \mathrm{Re}\lambda_j\to\infty,\ j\to\infty \tag{2.3}$$

的必要条件是 $|c|=1$.

**证** 如第二章所述，(2.2)的渐近根链满足下面的方程

$$\lambda^n(1+ce^{-\lambda\tau})=0 \tag{2.4}$$

它除了 $\lambda=0$ 为 $n$ 重根以外还有根列

$$\hat{\lambda}_j=-\frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|c|}+\frac{2j\pi i}{t} \qquad \text{当 } c<0$$

$$\hat{\lambda}_j=-\frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|c|}+\frac{(2j+1)\pi i}{\tau} \qquad \text{当 } c>0 \tag{2.5}$$

$$j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$$

而且 $|\lambda_j-\hat{\lambda}_j|\to 0$，当 $j\to\infty$. $\Rightarrow$ 只有当 $|c|=1$ 时 $\hat{\lambda}_j$ 才分布在虚轴上. 此时(2.3)第二部分才成立. 证毕.

另一方面，由庞特里亚金定理，(2.2)是有主项的，用 $iy$ 代入 $h(\lambda)=0$，分开实部与虚部，分别记为 $F(y)$，$G(y)$，若满足

(i)$F(y)$,$G(y)$的根都是实的.

(ii)至少对同一个 $y$ 值有不等式

$$G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0$$

满足(2.3)的 $h(\lambda)$,充分且必要地满足(i)(ii)及 $|c|=1$.

这样的例子在[2]中已指出,它说明"特征根实部小于零"并不能保证解的渐近稳定性.这一点与滞后型方程不同.

**定义 2.1** 若线性自治系统的特征根有可列个单重根落在虚轴上,而其余的皆具有负实部,则称此系统是第三临界情形.

事实上,对常微分方程与滞后型泛函微分方程的特征根分布情况:若只有单重零根 $\lambda=0$,其他根皆具负实部——第一临界情形.若只有有限个单重纯虚根,其他根皆具负实部——第二临界情形.于是定义 2.1 称这种情况为第三临界情形便很自然了.这是中立型方程独有的一种特征根分布形式.

**例 1** 在一阶方程

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{2.6}$$

的特征方程为

$$\lambda(1+ce^{-\lambda\tau})=a+be^{-\lambda\tau} \tag{2.7}$$

若 $c=1,a=b<0,\tau>0$. 则(2.7)为

$$(\lambda-a)(1+e^{-\lambda\tau})=0 \tag{2.8}$$

(2.8)有根 $\lambda=a<0$ 以及一列单重纯虚根 $\lambda_j=i\dfrac{\pi}{\tau}(2j+1)\Rightarrow$此时方程是第三临界情形.我们研究了其零解的稳定性.

当 $c=-1,a=-b<0$ 时可得类似结论.

这两种情形都值得进一步研究,有关工作还可参考[592].

## §3 算子型 NFDE 解的存在唯一性定理

设 $\Omega\subseteq R\times C$ 为开集,$f:\Omega\to R^n$,$D:\Omega\to R^n$. 都是给定的连续

算子. $D$ 在$\Omega$上于 0 处是原子的. 则在此假定下的方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{3.1}$$

叫做算子型 NFDE，为了强调算子 $D$ 和 $f$，记之为 NFDE$(D,f)$，$D$ 叫做它的差分算子.

对给定的 NFDE$(D,f)$，函数 $x$ 叫做它的一个解，如果存在 $\sigma\in R$，$A>0$，使得当

$$x\in C([\sigma-r,\sigma+A),R^n),(t,x_t)\in\Omega,t\in[\sigma,\sigma+A)$$

时 $D(t,x_t)$连续可微，且当 $t\in[\sigma,\sigma+A)$时满足方程(3.1).

对给定的 $\sigma\in R$，$\varphi\in C$ 且$(\sigma,\varphi)\in\Omega$，我们说 $x(\sigma,\varphi,D,f)$是(3.1)过$(\sigma,\varphi)$的一个解，若存在 $A>0$ 使得 $x(\sigma,\varphi,D,f)$在$[\sigma-r,\sigma+A)$上是方程(3.1)的一个解，并且满足 $x_\sigma(\sigma,\varphi,D,f)=\varphi$.

若$D(t,\varphi)=D_0(t,\varphi)-g(t)$，$f(t,\varphi)=L(t,\varphi)+h(t)$，其中 $D_0(t,\varphi)$与 $L(t,\varphi)$关于 $\varphi$ 是线性的，则称 NFDE$(D,f)$(3.1)是线性的. 若 $g$ 与 $h$ 恒等于 0，则方程称为线性齐次的，若 $g$，$h$ 中至少有一个不恒等于 0，则方程为线性非齐次的.

与 RFDE$(f)$类似，称(3.1)为自治 NFDE$(D,f)$，必须是 $D$，$f$ 不显含 $t$ 并且滞量 $r$ 是常数.

我们列出证明存在性定理时需要的一些概念和引理.

**定义3.1** 设$B$为Banach空间$Z$的有界子集，则$\alpha(B)=\inf\{d:B$ 具有有限个直径小于 $d$ 的覆盖$\}$称为 $B$ 的非紧性 Kuratowski 测度. 它有如下性质：

(1)$\alpha(A)=0$，当且仅当 $A$ 为紧集

(2)$\alpha(A\cup B)=\max(\alpha(A),\alpha(B))$

(3)$\alpha(\overline{\text{cov}A})=\alpha(A)$

(4)$\alpha(A+B)\leqslant\alpha(A)+\alpha(B)$

其中$\overline{\text{cov}}A$ 表示含 $A$ 的一切凸集的交——闭凸壳(hull). $A+B\triangleq\{a+b:a\in A,b\in B\}$.

**定义** 3.2　设 $Z$ 为 Banach 空间，$\alpha$ 为 $Z$ 子集的非紧性 Kuratowski 测度，$T:Z\to Z$ 为连续映射. 若存在常数 $K:0\leqslant K<1$，使得对任何的有界集 $B\subset Z$，$\alpha(TB)\leqslant K\alpha(B)$，则称 $T$ 是一个 $\alpha$ 压缩.

**引理** 3.1　(Darbo 不动点定理)设 $\Gamma$ 是 Banach 空间 $Z$ 的闭子集，$T:\Gamma\to\Gamma$ 是 $\alpha$ 压缩，则 $T$ 至少有一个不动点.

**引理** 3.2　方程(3.1)的初值问题

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)$$

$$x_\sigma=\varphi \tag{3.2}$$

等价于积分方程

$$D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)=D(\sigma,\varphi)+\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds \tag{3.3}$$

事实上，(3.2)等价于积分方程

$$D(\sigma+t,x_{\sigma+t})=D(\sigma,\varphi)+\int_\sigma^{\sigma+t} f(u,x_u)du \tag{3.4}$$

令 $u=\sigma+s$，(3.4)可改写成

$$D(\sigma+t,x_{\sigma+t})=D(\sigma,\varphi)+\int_0^t f(\sigma+s,x_{\sigma+s})ds \tag{3.5}$$

再扩展 $\varphi(t)$ 的定义范围，令

$$\hat{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t) & t\in[-r,0]\\ \varphi(0) & t\geqslant 0\end{cases} \tag{3.6}$$

$$x(\sigma+t)=\hat{\varphi}(t)+Z(t) \tag{3.7}$$

则 $x_{\sigma+t}=\hat{\varphi}_t+Z_t$　于是(3.5)可写成(3.3).

由于 $D(t,\varphi)$ 对 $\varphi$ 的 Fréchet 导数 $D_\varphi(t,\varphi)$ 是一个 $C\to R^n$ 的线性连续算子. 由 Riesz 表示定理，存在 $n\times n$ 有界变差阵 $\mu(t,\theta,\varphi)$ 使成立

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^0[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta),\psi\in C \tag{3.8}$$

按照 $D$ 在 $\Omega$ 上于 0 处为原子的假定便有

$$\det A(t,\varphi)\triangleq\det(\mu(t,0,\varphi)-\mu(t,0^-,\varphi))\neq 0 \tag{3.9}$$

再把(3.8)写成

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=A(t,\varphi)\psi(0)+\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta),\psi\in C \tag{3.10}$$

定义算子 $S$ 和 $U$ 为

$$S:\begin{cases}(S_z)(t)=0 \quad t\in[-r,0] \\ A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)(S_Z)(t)=-\int_{-r}^{-0}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)]Z(t+\theta) \\ +[D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)]-[D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t) \\ -D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-D_\varphi(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t] \quad t\in[0,d].\ d\text{ 为正数.}\end{cases} \tag{3.11}$$

$$U:\begin{cases}(U_2)(t)=0 \quad t\in[-r,0] \\ A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)(U_2)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds,t\in[0,d]\end{cases} \tag{3.12}$$

**引理** 3.3　$Z,S,U$ 分别由(3.7)(3.11)(3.12)确定. 则

$$Z=S_Z+U_Z \tag{3.13}$$

事实上,当 $t\in[-r,0]$时,$(S_z)(t)+(U_z)(t)=Z(t)=0$. 当 $t\in[0,d]$时,由(3.10)得

$$A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)](S_z)(t)+A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)(U_z)(t)$$

$$=-\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)]Z(t+\theta)+[D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)]$$

$$-[D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z(t)$$

$$-\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)]Z(t+\theta)]+\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds$$

$$=D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)+\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds+A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z(t)$$

再由(3.5)⇒(3.13)成立.

在存在性定理中[4],为了叙述方便,加强了对差分算子的限制,我们有

**定理** 3.1(存在性)　方程(3.1)中设 $D(t,\varphi)$有二阶连续的 Fréchet 导数,对$(\sigma,\varphi)\in\Omega$,存在过$(\sigma,\varphi)$的解 $x(t,\sigma,\varphi)$.

**证** 由引理 3.2,3.3,$Z\in C([-r,a],R^n)$满足(3.13)$\Leftrightarrow Z$ 满足(3.3)$\Leftrightarrow x(\sigma+t)=\hat{\varphi}(t)+Z(t)$确定的 $x(t)$在 $[\sigma-r,\sigma+a]$上满足(3.2),故(3.1)过$(\sigma,\varphi)$解存在,等于确定 $a>0$ 使方程(3.1)在 $C([-r,a],R^n)$中有解.

现在证明 (3.13)满足引理 3.1(Darbo 不动点定理). 设 $\alpha,\beta$ 为正常数,$a$ 由(3.11)确定 ,记

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta)=\{\xi;\xi\in C([-r,a],R^n),\xi_0=0,|\xi_t|\leqslant\beta,t\in[0,\alpha]\} \tag{3.14}$$

(1)选取 $\alpha$,使 $S+U:\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathscr{A}(\alpha,\beta)$

事实上,取 $\alpha_0>0$ 使 $A(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\neq0$,阵的模记为$|\cdot|$,设

$$M=\sup\{|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|;t\in[0,\alpha_0]\}$$

由 $D(t,\varphi)$连续$\Rightarrow\exists\ \alpha_1\leqslant\alpha_0$ 使

$$|D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|<\frac{\beta}{4M}\quad t\in[0,\alpha_1] \tag{3.15}$$

由 Fréchet 导数的定义$\Rightarrow\exists\ \alpha_2\leqslant\alpha_0$,当 $t\in[0,\alpha_2]$,$Z\in\mathscr{A}(\alpha_2,\beta)$时有

$$|D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-D_\varphi(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t|<\frac{\beta}{4M} \tag{3.16}$$

由 $D_\varphi\in C(\Omega,\mathscr{L}(C,R^n))$,$\mathscr{L}(C,R^n)$表示由 $C$ 到 $R^n$ 的有界线性映射全体构成的 Banach 空间. 如第四章定义,$D_\varphi$ 是测度光滑的,即存在 $r(t,s,\varphi)\in R$,$r$ 关于$(t,\varphi)\in\Omega$,$s\in R$ 是连续的,且 $r(t,0,\varphi)=0$,使对 $\alpha\in[0,r]$,$(t,\varphi)\in\Omega$,有$\left|\int_{-\alpha}^{0-}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta)\right|\leqslant r(t,\alpha,\varphi)|\psi|\Rightarrow\exists\ \alpha_3\leqslant\alpha_0$,使当 $t\in[0,\alpha_3]$,$Z\in\mathscr{A}(\alpha_3,\beta)$时,有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)]Z(t+\theta)\right|&=\left|\int_{-r}^{-\alpha_3}+\int_{-\alpha_3}^{0-}\right|\\&\leqslant r(\sigma+t,\alpha_3,\hat{\varphi}_t)|Z_t|<\frac{\beta}{4M}\end{aligned} \tag{3.17}$$

由 $f$ 的连续性，只要 $\alpha_4,\beta$ 适当小，当 $t\in[0,\alpha_4],Z\in\mathscr{A}(\alpha_1,\beta)$ 时有

$$\left|\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds\right|\leqslant\left|\int_0^{\alpha_4}(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds\right|<\frac{\beta}{4M}\quad(3.18)$$

若 $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，由 (3.15)(3.16)(3.17)(3.18) 当 $t\in[0,\alpha]$ 及 $Z\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 时有

$$\begin{aligned}&|(S_z)(t)+(U_z)(t)|\\ \leqslant&|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\{|\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)]Z(t+\theta)|\\ &+|D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|+|D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)\\ &-D_\varphi(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t|+|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)||\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds|<\beta\end{aligned}$$

(2) $S$ 在 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 上是压缩映射，记

$$D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)-D(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)-D_\varphi(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)Z_t=g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)$$

由 $D(t,\varphi)$ 关于 $\varphi$ 有二阶连续的 Fréchet 导数⇒∃ 连续函数 $\varepsilon(t,\beta,\varphi)$，$\varepsilon(t,0,\varphi)=0$ 使当 $|\psi|\leqslant\beta,|\xi|\leqslant\beta$ 时有

$$|g(t,\varphi,\psi)-g(t,\varphi,\xi)|\leqslant\varepsilon(t,\beta,\varphi)|\psi-\xi|$$

因此当 $|Z_t|\leqslant\beta,|y_t|\leqslant\beta$ 时成立

$$|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,y_t)|<\varepsilon(\sigma+t,\beta,\hat{\varphi}_t)|Z_t-y_t|$$

对 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 上的任意两元 $Z_t,y_t$ 我们有

$$\begin{aligned}&|(S_z)(t)-(S_y)(t)|\\ \leqslant&|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\{|\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)](Z(t+\theta)-y(t+\theta))|\\ &+|g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,Z_t)-g(\sigma+t,\hat{\varphi}_t,y_t)|\}\\ \leqslant&M\{|\int_{-\alpha}^{0-}[d_\theta\mu(\sigma+t,\theta,\hat{\varphi}_t)](Z(t+\theta)-y(t+\theta))|\\ &+\varepsilon(\sigma+t,\beta,\hat{\varphi}_t)|Z_t-y_t|\}\\ \leqslant&M\{r(\sigma+t,\alpha,\hat{\varphi}_t)+\varepsilon(\sigma+t,\beta,\hat{\varphi}_t)\}\leqslant k<1\end{aligned}$$

从而 $S$ 在 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 上为一压缩映射.

$U:\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathscr{A}(\alpha,\beta)$是连续的，这个结论显然成立. 不仅如此，它还是全连续的. 这只要再证明对任何有界集 $B\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，$\overline{UB}$是紧集即可.

事实上，$B\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)\Rightarrow UB\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)$，而 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$为闭的$\Rightarrow\overline{UB}\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)\Rightarrow\overline{UB}$中的每一个元素都有界，界限为 $\beta\Rightarrow\overline{UB}$中元一致有界. 再证$\overline{UB}$中的函数等度连续：设 $Z\in\overline{UB}$，则或者 $Z\in UB$，或 $Z\in(UB)'$ ——$UB$ 的导集. 若 $Z\in UB$，设当 $t\in[0,\alpha]$时

$$|f(\sigma+t,\hat{\varphi}_t+Z_t)|\leqslant M^*$$

于是有

$$|(Uz)(t)-(Uz)(\tau)|=|A^{-1}(\sigma+t,\hat{\varphi}_t)|\,\Big|\int_a^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds$$

$$-\int_a^\tau f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds\Big|\leqslant M\Big|\int_\tau^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_s+Z_s)ds\Big|\leqslant MM^*\,|t-\tau|$$

若 $Z\in(UB)'\Rightarrow$存在 $Z_n\in UB$，$Z_n\to Z$，$n\to\infty$，对$\forall\ \varepsilon>0$，当 $n$ 充分大时有

$$|(Uz)(t)-(Uz)(\tau)|\leqslant|(Uz)(t)-(Uz_n)(t)|$$

$$+|(Uz_n)(t)-(Uz_n)(\tau)|+|(Uz_n)(\tau)-(Uz)(t)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+MM^*\,|t-\tau|+\frac{\varepsilon}{3}$$

上式当 $|t-\tau|<\dfrac{\varepsilon}{3MM^*}$时$|(Uz(t)-(Uz)(\tau)|<\varepsilon\Rightarrow\overline{UB}$中的函数是等度连续的$\Rightarrow\overline{UB}$是紧的.

最后，$S+U$ 是 $\alpha$ 压缩，事实上，由 $S+U:\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 对任何有界集 $B\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)\Rightarrow(S+U)B\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)\Rightarrow(S+U)B$ 有界、又$U$全连续，$\overline{UB}$是紧集. $UB$的非紧性Kuratowski测度 $\alpha(UB)=0$，由 $S$ 为压缩映射$\Rightarrow\exists\ k\in[0,1)$，故 $\alpha(SB)\leqslant k\alpha(B)\Rightarrow$

$$\alpha[(S+U)B]\leqslant\alpha(SB)+\alpha(UB)=\alpha(SB)\leqslant k\alpha(B)\Rightarrow S+U$$

是压缩映射. 最后由 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$是 $C([-r,\alpha],R^n)$中的有界闭凸子集. 由Barbo定理(引理3.1)推出$S+U$在$\mathscr{A}(\alpha,\beta)$上存在不动点.

定理证毕.

与 RFDE($f$)完全类似,我们有唯一性定理:

**定理** 3.2(唯一性) 设$\Omega\subseteq R\times C$,$f:\Omega\to R^n$,$D:\Omega\to R^n$满足定理 3.1 的条件,且 $f$ 关于 $\varphi$ 满足局部 Lipschitz 条件,则(3.1)过$(\sigma,\varphi)$的解存在且唯一.

证明与 RFDE($f$)的情形完全类似[4].

## §4 解的正反向延拓

本节要阐述算子型中立型方程解的正向、反向延拓问题,读者可以看到它完全类似于第四章中 RFDE($f$)的相应结果. 对非算子型 NFDE 的反向延拓问题尚待进一步研究.

考虑 NFDE($D,f$)

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{4.1}$$

其中 $D,f:\Omega\to R^n$ 是连续泛函,$D$ 在$\Omega$上于 0 处是原子的. 设 $W\subset\Omega$是闭集. 我们有

**定义** 4.1 差分算子 $D(t,\varphi)$称为在 $W$ 上于 0 处是一致原子的. 若 $D$ 在$\Omega$上于 0 处原子,且存在常数 $N>0$,对$\forall$ $(t,\varphi)\in W$ 成立

$$|A^{-1}(t,0,\varphi)|\leqslant N,\ \ D_\varphi(t,\varphi)|\leqslant N \tag{4.2}$$

正向延拓定理写成

**定理** 4.1 设 $W\subset\Omega$是有界闭集,并且存在 $W$ 的一个 $\delta$ 邻域 $W(\delta)\subset\Omega$,若满足

(1)$f$ 把 $W$ 映为 $R^n$ 中的有界集.

(2)$D$ 在 $W$ 上于 0 处是一致原子的.

(3)$D(t,\varphi)$,$D_\varphi(t,\varphi)$在 $W$ 一致连续,$D_\varphi$ 测度光滑.

(4)$x(t)$是(4.1)在$[\sigma-r,b)$上的不可延拓解.

则存在 $t'\in[\sigma,b)$ 使得 $(t',x_{t}')\bar{\in}W$.

**证** 不防设 $r>0,b>\sigma$ 是常数，否则定理结论显然成立.

若存在序列 $t_k\to b^-,x_{t_k}\to\psi\in C$，则当 $t\to b^-$ 时 $x(t)\to\psi(0)$. 定义 $x(b)=\psi(0)$，则 $(b,x_b)$ 必位于 $\Omega$ 的边界上，否则由存在定理 $\Rightarrow$ $x(t)$ 可再向右延拓. 这与 $x(t)$ 为不可延拓解的假定不合. 此外，注意到 $x_t$ 关于 $t$ 连续以及存在 $W(\delta)\subset\Omega\Rightarrow \mathrm{dis}((b,x_b),W)>0\Rightarrow$ $\exists\ t_w<b$ 使得 $t_w<t<b$ 时 $(t,x_t)\bar{\in}W$. 即这种情形定理成立.

若不存在 $t_k\to b^-$，则可能有两种情况：①集合 $V=\{(t,x_t):t\in[\sigma,b)\}$ 是无界的，则由于 $W$ 有界，定理显然成立. ②集 $V$ 是有界的，用反证法，若定理结论不真，即对一切 $t\in[\sigma,b)$ 均有 $(t,x_t)\in W$ $\Rightarrow V\subseteq W$. 证明的思路是：证明存在 $\alpha>0$ 使 $x(t)$ 在 $[b-\alpha,b)$ 上一致连续，于是 $\Rightarrow V$ 是相对紧的 $\Rightarrow$ 必存在序列 $t_k\to b\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ 定理成立.

现在证明存在 $\alpha>0$ 使 $x(t)$ 在 $[b-\alpha,b)$ 上一致连续. 由 $V\subseteq W$ $\Rightarrow$ 定理中关于 $W$ 成立的条件关于 $V$ 也成立：由(2) $\exists\ N>0$ 及连续函数 $\gamma(s)(0\leqslant s\leqslant r)$ 和 $\eta(\beta)(0\leqslant\beta\leqslant m)$，$\gamma(0)=\eta(0)=0$ 使得对一切 $(t,\varphi)\in V$，$|\psi|\leqslant\beta,0\leqslant\beta\leqslant m,0\leqslant s\leqslant r$ 成立

$$D(t,\varphi+\psi)=D(t,\varphi)+D_\varphi(t,\varphi)\psi+g(t,\varphi,\psi)$$

$$|A^{-1}(t,0,\varphi)|\leqslant N,\ |D_\varphi(t,\varphi)|\leqslant N,$$

$$|g(t,\varphi,\psi)|\leqslant\eta(\beta)|\psi|,$$

$$\left|\int_{-s}^{0-}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta)\right|\leqslant\gamma(s)|\psi|$$

于是有

$$|D(t,\varphi+\psi)-D(t,\varphi)|=|D_\varphi(t,\varphi)\psi+g(t,\varphi,\psi)|$$

$$=\left|A(t,0,\varphi)\psi(0)+\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta)+g(t,\varphi,\psi)\right|$$

$$=\Big|A(t,0,\varphi)\psi(0)+\int_{-r}^{-s}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta)$$

$$+\int_{-r}^{0-}[d_\theta\mu(t,\theta,\varphi)]\psi(\theta)+g(t,\varphi,\psi)|$$

$$\geqslant\frac{|\psi(0)|}{N}-N|\psi|-\gamma(s)|\psi|-\eta(\beta)|\psi| \qquad (4.3)$$

若 $x(t)$ 在 $[\sigma-r,b)$ 上非一致连续，则存在常数 $\varepsilon_0>0$ 及数列 $\{t_k\}$ 单调趋于 0 的正数列 $\{\delta_k\}$，使 $t_k,t_k-\delta_k\in[\sigma,b)$ 且

$$|x(t_k)-x(t_k-\delta_k)|\geqslant\varepsilon_0 \qquad (4.4)$$

对一切 $k$ 成立，任取 $s>0$，由 $x(t)$ 在 $[\sigma-r,b-s]$ 上一致连续，对 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $|t-t'|<\delta,t,t'\in[\sigma-r,b-s]$ 时，$|x(t)-x(t')|\leqslant\varepsilon$，由条件(3)$\Rightarrow D(t,\varphi)$ 在 $V$ 上是一致连续的. 取 $\delta$ 充分小使 $|t-t'|<\delta,(t,\varphi)\in V,(t',\varphi)\in V$ 时有

$$|D(t,\varphi)-D(t',\varphi)|\leqslant\varepsilon$$

现在取定 $\beta\in(0,m)$，取 $\varepsilon<\min(\beta,\varepsilon_0)$，设正整数 $k_0$ 充分大，使当 $k\geqslant k_0$ 时，$\delta_k<\delta$，并对 $k\geqslant k_0$ 作序列 $\{s_k\}$ 如下

$$S_k=\inf\{t\in[\sigma,b)_t\,|x(t)-x(t-\delta_k)|\geqslant\min(\beta,\varepsilon_0)\} \qquad (4.5)$$

因为 $|x(t_k)-x(t_k-\delta_k)|\geqslant\varepsilon_0\geqslant\min(\beta,\varepsilon_0)\{S_k\}$ 存在. 故

$$\begin{aligned}&|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k-\delta_k,x_{s_k}-\delta_k)|\\&\geqslant|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k-\delta_k,x_{s_k}-\delta_\kappa)|-|D(s_k,x_{s_k}-\delta_\kappa)-\\&D(s_k-\delta_\kappa,x_{s_k}-\delta_k)|\\&\geqslant|D(s_k,x_{s_k})-D(s_k,x_{s_k}-\delta_k)|-\varepsilon\\&\geqslant\min(\beta,\varepsilon_0)/N-N\varepsilon-\gamma(s)\beta-\eta(\beta)\min(\beta,\varepsilon_0)\triangleq\varepsilon_1\end{aligned} \qquad (4.6)$$

适当选择 $\beta,s,\varepsilon$ 可使 $\varepsilon_1>0$，(4.6)表明 $D(t,x_t)$ 在 $[\sigma,b)$ 上非一致连续，但另一方面由条件(1)，存在 $M>0$，使对 $\forall\ t\in[\sigma,b)$ 有 $|f(t,x_t)|<M$. 从而当 $t,t+\tau\in[\sigma,b)$ 时有

$$|D(t+\tau,x_{t+\tau})-D(t,x_t)|=\left|\int_t^{t+\tau}f(s,x_s)ds\right|\leqslant M|\tau| \qquad (4.7)$$

$\Rightarrow D(t,x_t)$ 在 $[\sigma,b)$ 上一致连续 $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ 存在 $\alpha>0$ 使 $x(t)$ 在 $[b-$

$a,b)$上一致连续．证毕．

对线性差分算子 $D(t,\varphi)$，我们有

**定理** 4.2　设$\Omega\subseteq R\times C$为开集，$D,f:\Omega\to R^n$ 连续，满足定理4.1(1)(2)(3)，$D(t,\varphi)$关于 $\varphi$ 是线性的．$W\subseteq\Omega$是有界闭集，$f(W)$有界，若 $x(t)$是方程(4.1)在$[\sigma-r,b)$上的一个不可延拓解，则存在 $t'\in[\sigma,b)$使得$(t',x_{t'})\notin W$．

与定理 4.1 比较，$D(t,\varphi)$为线性算子免去了 $W$ 有一个 $\delta$ 邻域 $W(\delta)\subset\Omega$的假定．证明完全类似，从略．

关于中立型泛函微分方程的反向延拓问题只有少量的研究结果，而且都是针对算子型方程 NFDE$(D,F)$的，非算子型 NFDE 尚有待探索．

这里摘引[390]中给出的、条件很强的一个结果．

**定理** 4.3　设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$D,f:\Omega\to R^n$ 连续，$D(t,\varphi)$在$\Omega$上于$-r$ 处是原子的，且在$\Omega$上关于 $\varphi$ 有二阶连续 Fréchet 导数．若$(\sigma,\varphi)\in\Omega$，则存在 $\alpha>0$ 使得方程(4.1)在区间$[\sigma-r-\alpha,\sigma]$上存在过$(\sigma,\varphi)$的解．

## §5　连续依赖性与可微性

本节仍然限于对算子型方程 NFDE$(D,f)$，讨论解关于初始数据的连续依赖性与可微性．先给出一些预备知识．

**引理**5.1　设 $\Gamma$ 是 Banach 空间 $Z$ 的一个有界闭凸集．$\Lambda$ 是 Banach 空间 $Y$ 的一个子集．$T:\Gamma\times\Lambda\to\Gamma$ 是满足下列假定的映射：

(1)$T(\cdot,\lambda)$对$\forall\ \lambda\in\Lambda$ 是连续的，$\exists\ \lambda_0\in\Lambda$ 使得对每个 $x\in\Gamma$，$T(x,\lambda)$在$(x,\lambda_0)$连续．

(2)对$\forall\ \Gamma'\subseteq\Gamma$，$\Gamma'$ 的非紧性 Kuratowski 测度 $\alpha(\Gamma')>0$，则存在 $\lambda_0$ 的一个开邻域 $B=B(\Gamma')$，使得对任何相对紧集 $\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B$ 都有 $\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))<\alpha(\Gamma')$．

(3)方程 $x=T(x,\lambda)$ 当 $\lambda=\lambda_0$ 时在 $\Gamma$ 中有唯一解 $x(\lambda_0)$，则 $\Gamma$ 中的任何解 $x(\lambda)$ 必在 $\lambda=\lambda_0$ 处连续.

**证** 任取序列 $\{\lambda_k\}$ 满足 $k\to\infty$ 时 $\lambda_k\to\lambda_0$，且 $x(\lambda_k)=T(x(\lambda_k),\lambda_k)$，现在要证明当 $k\to\infty$ 时 $x(\lambda_k)\to x(\lambda_0)$. 为此，取 $\Gamma'=\{x(\lambda_k)\}$，让 $N$ 充分大，使得当 $k\geqslant N$ 时 $\Lambda'=\{\lambda_k\}\subseteq\Lambda\cap B(\Gamma')$. 其中 $B(\Gamma')$ 为(2)中的 $\lambda_0$ 的邻域，若 $\alpha(\Gamma')>0$，由 $\Lambda'$ 的相对紧性与(2)$\Rightarrow$

$$\alpha(\Gamma')=\alpha(\{T(x(\lambda_k),\lambda_k)\})\leqslant\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))<\alpha(\Gamma')$$

$\Rightarrow$矛盾$\Rightarrow\alpha(\Gamma')=0$. 即 $\Gamma'=\{x(\lambda_k);k\geqslant N\}$ 为一相对紧集，由于 $\Gamma$ 为闭集$\Rightarrow$存在 $v_k\in\Lambda'$ 使 $x(v_k)\to z\in\Gamma$，当 $k\to\infty$. 显然仍有 $x(v_k)=T(x(v_k),v_k)$. 由(1)，$T(x,\lambda)$ 在 $(z,\lambda_0)$ 处连续$\Rightarrow$ $T(x(v_k),v_k)\to T(z,\lambda_0)$ $k\to\infty$，再由(3)$\Rightarrow z=x(\lambda_0)$，即当 $k\to\infty$ 时 $x(\lambda_k)\to x(\lambda_0)$. 由 $\{\lambda_k\}$ 是任意的$\Rightarrow x(\lambda)$ 在 $\lambda_0$ 处连续.

**引理 5.2** $\Gamma$ 和 $\Lambda$ 同引理 5.1 所设，$T:\Gamma\times\Lambda\to\Gamma$ 满足(1)(3)，$T=S+U$，且对每个紧集 $\Lambda'\subseteq\Lambda$ 有

(4)$S(\cdot,\lambda)$ 是 $\Gamma$ 上的一个压缩，且对 $\lambda\in\Lambda'$ 是一致压缩.

(5)$U(\Gamma,\Lambda')$ 是相对紧的.

则方程 $x=T(x,\lambda)$ 的解 $x(\lambda)$ 在 $\lambda_0$ 处连续.

**证** 由引理 5.1，我们只要验证(2)成立即可. 为此，对任意的 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 且 $\alpha(\Gamma')>0$，取定 $\lambda_k$ 的一个邻域 $B=B(\Gamma')$. 则对每一个相对紧集 $\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B$，由(4)和(5)得

$$\begin{aligned}\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))&=\alpha(S(\Gamma',\Lambda')+U(\Gamma',\Lambda'))\\&\leqslant\alpha(S(\Gamma',\Lambda'))+\alpha(U(\Gamma',\Lambda'))\\&=\alpha(S(\Gamma',\Lambda'))\leqslant k\alpha(\Gamma'),0\leqslant k<1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$(2)成立.

**引理 5.3** $\Gamma$ 和 $\Lambda$ 的意义如引理 5.1 所设，$T:\Gamma\times\Lambda\to\Gamma$ 满足(3)，$T=S+U$，$U$ 满足引理 5.2 中的(5)，若此外还满足

(6)$S(\cdot,\lambda)$ 对每个 $\lambda\in\Lambda$ 是压缩映射，$U(\cdot,\lambda)$ 对 $\forall\ \lambda\in\Lambda$ 连续.

(7)$S(x,\lambda)$对 $x\in\Gamma$ 在 $\lambda_0$ 处一致连续.

则方程 $x=T(x,\lambda)$的解在 $\lambda_0$ 处连续.

(8)$U(x,\lambda)$对$\forall\ x\in\Gamma$ 在$(x,\lambda_0)$处连续.

**证** 先验证(1),由(6),$S(\cdot,\lambda)$是压缩映象⇒对$\forall\ \lambda\in\Lambda$ 为连续的,$U(\cdot,\lambda)$对$\forall\ \lambda\in\Lambda$ 连续⇒$T=S+U$ 对 $\lambda\in\Lambda$ 连续.对任一 $z\in\Gamma$ 及 $\varepsilon>0$,由(6)(7)对 $S(x,\lambda)$的假定,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,z)>0$,使得当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, $|x-z|<\delta$ 时有

$$|S(x,\lambda)-S(x,\lambda_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|S(x,\lambda_0)-S(z,\lambda_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1}$$

由(5.1)⇒$|S(x,\lambda)-S(z,\lambda_0)|<\varepsilon$⇒$S(x,\lambda)$在$(z,\lambda_0)$连续. 由(8),$U(x,\lambda)$在$(z,\lambda_0)$处也连续⇒$T(x,\lambda)=S(x,\lambda)+U(x,\lambda)$在$(z,\lambda_0)$处连续,由 $z$ 的任意性⇒(1)成立.

再验证(2),由(7),对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \beta(\varepsilon)>0$,使当$|\lambda-\lambda_0|<\beta(\varepsilon)$时有$|S(x,\lambda)-S(x,\lambda_0)|<\varepsilon$,对$\forall\ x\in\Gamma$ 成立,因此对任何的 $\Gamma'\subseteq\Gamma$ 且 $\alpha(\Gamma')>0$,总存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得当$|\lambda-\lambda_0|<\delta(\varepsilon)$时有

$$\alpha((S(\cdot,\lambda)-S(\cdot,\lambda_0))\Gamma')<\varepsilon\alpha(\Gamma')$$

再设 $k_0$ 为 $S(\cdot,\lambda_0)$的压缩常数,于是

$$\begin{aligned}\alpha(T(\Gamma',\lambda))&=\alpha(S(\Gamma',\lambda)+U(\Gamma',\lambda))\\&\leqslant\alpha(S(\Gamma',\lambda))+\alpha(U(\Gamma',\lambda))\\&=\alpha((S(\cdot,\lambda)-S(\cdot,\lambda_0))\Gamma')+\alpha(S(\Gamma',\lambda_0))\\&\leqslant\varepsilon\alpha(\Gamma')+k_0\alpha(\Gamma')=(\varepsilon+k_0)\alpha(\Gamma')\end{aligned}$$

取 $\varepsilon$ 充分小,使 $\varepsilon+\varepsilon_0<1$. 取 $B(\Gamma')=\{\lambda;|\lambda-\lambda_0|<\delta(\varepsilon)\}$,则对任何相对紧集 $\Lambda'\subseteq\Lambda\cap B(\Gamma')$有

$$\alpha(T(\Gamma',\Lambda'))<\alpha(\Gamma')$$

⇒(2)满足. 证毕.

**定理** 5.1(连续依赖性) 设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开集. $\Lambda$ 为一 Banach

空间的子集，$D, f: \Omega\times\Lambda\to R^n$ 满足

(1)对$\forall\ (t,\varphi)\in\Omega$，$D(t,\varphi,\lambda)$在$\Omega$上于 0 处为原子，关于$\lambda\in\Lambda$一致成立.

(2)对$\forall\ \lambda\in\Lambda$，$D(t,\varphi,\lambda)$与 $f(t,\varphi,\lambda)$在$(t,\varphi)\in\Omega$中连续，对$\forall\ (t,\varphi)\in\Omega$，$D,f$ 在$(t,\varphi,\lambda_0)$连续.

(3)方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t,\lambda_0)=f(t,x_t,\lambda_0)$$

在区间$[\sigma-r,b]$上存在过$(\sigma,\varphi)$的唯一解. 则$(\sigma,\varphi,\lambda_0)$的一个邻域$N(\sigma,\varphi,\lambda_0)$使得对任何$(\sigma',\varphi',\lambda')\in N(\sigma,\varphi,\lambda_0)$，方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t,\lambda')=f(t,x_t,\lambda') \tag{5.2}$$

在区间$[\sigma-r,b]$上存在过$(\sigma,\varphi)$的解，并且当 $t\in[\sigma,b]$，$(\sigma',\varphi',\lambda')\in N(\sigma,\varphi,\lambda_0)$时，$x_t(\sigma',\varphi',\lambda')$在$(t,\sigma',\varphi',\lambda_0)$处是连续的.

**证** 对方程(5.2)，仿存在定理 3.1 的证明，定义算子 $S,U$：$\mathscr{A}(\alpha,\beta)\times\Lambda\to\mathscr{A}(\alpha,\beta)$. 令 $T=S+U$，可以逐一验证 $S(z,\lambda')$和$U(z,\lambda')$能满足引理 5.2 中的条件(4)(5). 而由定理的假定(3)$\Rightarrow$引理 5.1 的(3)成立，引理 5.1 的条件(1)也成立$\Rightarrow$方程 $z=T(z,\lambda')$的解$z(\lambda')$在$\lambda'=\lambda_0$处连续，从而方程(5.2)的解$x(\sigma',\varphi',\lambda')(t)$在 $\lambda_0$ 处连续$\Rightarrow x_t(\sigma',\varphi',\lambda')$在$(t,\sigma',\varphi',\lambda')$处连续.

用定理 3.1 的证明格式我们有

**引理** 5.4 设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开集，$D,f:\Omega\to R^n$ 满足

(1)$D(t,\varphi)$在$\Omega$上于 0 处是原子的.

(2)关于 $\varphi$，$f$ 有 1 阶，$D$ 有 2 阶连续的 Fréchet 导数. 则对任何紧集 $W\subset\Omega$，存在 $W$ 的邻域 $V_W\subset\Omega$和正数 $\alpha_W$，使对$\forall\ (\sigma,\varphi)\in V_W$(4.1)过$(\sigma,\varphi)$的解在$[\sigma-r,\sigma+\alpha_W]$上存在.

**定理** 5.2(对初始函数的可微性) 在引理 5.4 的假定下，设(4.1)过$(\sigma,\varphi)\in\Omega$的不可延拓解 $x(t,\sigma,\varphi)$的存在区间为$[\sigma-r,$

$b)$，则对每一个 $t\in[\sigma,b)$，$x_t(\sigma,\varphi)$关于 $\varphi$ 的 Fréchet 导数$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(\sigma,\varphi)$在$\Omega$上存在且连续，$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_t(\sigma,\varphi):C\to C$ 是有界线性算子，$\frac{\partial}{\partial\varphi}x_\sigma(\sigma,\varphi)=I$，又对任何 $\psi\in C$，$y(t)=\frac{\partial}{\partial\varphi}x(\sigma,\varphi)\psi(t)$至少在$[\sigma-r,b)$上是初值问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[D_\varphi(t,x_t(\sigma,\varphi))y_t]=f_\varphi(t,x_t(\sigma,\varphi))y_t \\
&y_\sigma=\psi
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

的解（参看[11]）.

## §6 NFDE$(D,f)$的补充知识

J.K.Hale 指出："在模糊的术语中，中立型是其中的一个". 我们在第一章和本章开始时所做的努力便是试图尽可能消除这一概念的"模糊因素". 所有论述实际上提供读者一个信息：中立型泛函微分方程这一概念远比算子型中立型方程 NFDE$(D,f)$宽广得多，由 J.Hale 与 M.Cruz 建立的中立型理论只限于 NFDE$(D,f)$，换句话说，仅仅选择了最接近于 RFDE$(f)$性态的一类. 离普遍形式的中立型 FDE 理论还有很大距离.

即使对算子型中立型方程，仍然只探讨其中的一部分，[4]中区别这一部分的原则是对算子 $D(t,\varphi)$加上若干限制，其中最基本的是 $D$ 在$\Omega$上于 0 处、$-r$ 处为原子的假定. 对 $D$ 为非原子的情形研究得不多，但奥地利 Graz 大学的 F.Kappel 等有很好的工作[389].

对方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{6.1}$$

与 §3 类似，恒设$\Omega\subseteq R\times C$ 为开的，$D,f:\Omega\to R^n$ 连续，$D(t,\varphi)$在

$\Omega$上于 0 处为原子的.

### 1. NFDE$(D,f)$的解映射

给定(6.1)和任何$(\sigma,\varphi)\in\Omega$,∃ $t_{\sigma,\varphi}$与过$(\sigma,\varphi)$定义在$[\sigma-r,t_{\sigma,\varphi}]$上的不可延拓解是唯一的,我们定义解映射$T(t,\sigma):\Omega_\sigma\to C$,这里

$$\Omega_\sigma=\{\psi\in C:(\sigma,\varphi)\in\Omega\},T(t,\sigma)\varphi=x_t(\sigma,\varphi) \tag{6.2}$$

我们有

**定理** 6.1 设 NFDE$(D,f)$中$D(t,\varphi)$在$\Omega$上于$-r$处也是原子的,则存在$t_1(\sigma,\varphi)<\sigma<t_2(\sigma,\varphi)$,使在$[t_1(\sigma,\varphi)-r,t_2(\sigma,\varphi))$上有不可延拓解$x(t)$,亦即$T(t,\varphi):\Omega_\sigma\to C$定义在$t\in[t_1(\sigma,\varphi),t_2(\sigma,\varphi))$上,进而,若$f(t,\varphi)$关于$\varphi$有一阶连续导数,则$T(t,\sigma):\Omega_\sigma\to C$在$t\in(t_1(\sigma,\varphi),t_2(\sigma,\varphi))$中是一个同胚.

事实上,由 § 3 的结果$\Rightarrow t_2(\sigma,\varphi)$存在,用相同的办法沿负向求解$\Rightarrow t_1(t,\varphi)$存在. 再由$f_\varphi$的连续性⇒解的唯一性和连续依赖性成立,定理得证.

**例** 2 考虑方程

$$\frac{d}{dt}[C_0(t)x(t)+C(t)x(t-r)]=a(t)x(t)+b(t)x(t-r) \tag{6.3}$$

此时$D(t,\varphi)$在 0 处原子$\Leftrightarrow C_0(t)\neq0$,于$-r$处原子$\Leftrightarrow C(t)\neq0$,若二者满足,(6.3)的解映射定义了一个同胚.

### 2. 线性 NFDE 解的指数衰减

现在给出相应于第三章 § 2 中关于线性 RFDE 的结论. 设$\tau\in R$给定,$\Omega=(\tau,\infty)\times C$,$D$,$f:\Omega\to R^n$关于$\varphi$都是线性的,记$D(t,\varphi)$为$D_0(t,\varphi)$,$f(t,\varphi)$为$L(t,\varphi)$以示区别,(6.1)写成

$$\frac{d}{dt}D_0(t,x_t)=L(t,x_t) \tag{6.4}$$

**定理** 6.2 设对(6.4)中的$D_0$,$L$,∃ 常数$k$使得对任意的$(t,$

$\varphi)\in\Omega$，有

$$|D(t,\varphi)|\leqslant k|\varphi|,\ |L(t,\varphi)|\leqslant k|\varphi| \tag{6.5}$$

$D$ 在$\Omega$上于 0 及 $-r$ 处是一致原子的，则对每一个$(t,\varphi)\in\Omega$.(6.4)过$(\sigma,\varphi)$定义在$(\tau,\infty)$上存在唯一的解，并且，若解趋于 0 的速度比任何指数函数快，则对 $\forall\ t\in(\tau,\infty)$，$x(t)=0$.

**证** 由§3 诸定理⇒过$(\sigma,\varphi)\in\Omega$的解存在唯一，类似第二章§4 估计式(4.11)的证明⇒存在正数 $a,b$. 对$\forall\ \sigma\in(\tau,\infty)$，一切解 $x$ 皆满足

$$|x_t|\leqslant ae^{b|t-\sigma|}|x_\sigma| \qquad t\in(\tau,\infty) \tag{6.6}$$

若定理结论不真，取 $\sigma\to\infty$时，$x_\sigma\to 0$ 的速度比任何指数函数快，但存在一个 $t\in(\tau,\infty)$使$|x_t|>0$，则对 $\sigma\geqslant t$ 我们有

$$|x_t|\exp bt\leqslant a|x_\sigma|\exp b\sigma \tag{6.7}$$

由(6.7)⇒矛盾，即定理成立.

### 3. 差分算子 $D(t,\varphi)$的性质

观察(6.1)与RFDE($f$)在构造上的区别仅在于方程左边$\dot{x}(t)$现在为$\frac{d}{dt}D(t,x_t)$. 于是可以直观地意识到 $D(t,\varphi)$的性质对NFDE($D,f$)的性态起决定性作用. 例如

**例** 3 考察最简单的 NFDE($D,f$)

$$\frac{d}{dt}(x(t)+cx(t))=ax(t)+bx(t-r) \tag{6.8}$$

其中 $a,b,c,r>0$ 皆为常数，下一章将看到，当$|C|>1$ 时 0 解总是不稳定的，所以稳定性只有当$|C|\leqslant 1$ 时才有可能，不仅如此，当$|C|=1$ 时方程还有§2 指出的特殊性态. 所以，除了 $D(t,\varphi)$的原子性假定以外，我们还要指出一些性质与限制条件，为下一章提供预备知识.

考察齐次自治差分方程

$$Dy_t=0 \qquad t\geqslant 0 \tag{6.9}$$

与非齐次自治差分方程

$$Dy_t = h(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{6.10}$$

其中 $D: C \to R^n$ 关于 $\varphi$ 是线性的，在 0 处是原子的，$h \in C([0,\infty), R^n)$，不失一般性可设

$$D\varphi = \varphi(0) - \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(\theta)] \varphi(\theta) \tag{6.11}$$

其中当 $s \to 0$ 时变差 $\underset{[-s,0]}{\mathrm{Var}} \mu \to 0$. 若

$$C_D = \{\varphi \in C; D\varphi = 0\} \tag{6.12}$$

则(6.9)定义了一个强连续半群

$$T_D(t): C_D \to D_D, t \geqslant 0 \tag{6.13}$$

其中 $T_D(t)\phi = y_t(\phi), t \geqslant 0, \phi \in C_D$ 且 $y_t(\phi)$ 是(6.9)过 $(0,\phi)$ 的解. 设 $a_D$ 是半群 $T_D(t)$ 的阶. 即

$$a_D = \inf\{\alpha \in R; \exists\ k(\alpha) 使 |T_D(t)| \leqslant ke^{\alpha t}, t \geqslant 0\} \tag{6.14}$$

于是有

**引理** 6.1 若 $y(\phi, h)$ 是(6.10)的解，满足 $y_0(\phi, h) = \phi$，则存在常数 $a, b$，使得

$$|y(\phi,h)(t)| \leqslant be^{at}[|\phi| + \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |h(s)|], t \geqslant 0 \tag{6.15}$$

用第二章 §4 估式(4.11)的推导办法. 容易得出(6.15).

**引理** 6.2 若 $D: C \to R^n$ 关于 $\varphi$ 是线性的，且在 0 处是原子的. 则存在 $n$ 个函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n$ 使得 $D\Phi = I, \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n)$.

**证** 对 $\forall\ s \in [0, r]$，设 $\psi \in C([-r, 0], R)$ 定义为

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0 & -r \leqslant \theta \leqslant -s \\ 1 + \dfrac{\theta}{s} & -s < \theta \leqslant 0 \end{cases} \tag{6.16}$$

则

$$D\psi I = I - \int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(\theta)](1 + \frac{\theta}{s}) \tag{6.17}$$

若 $s > 0$ 充分地小，则 $D\psi I \neq 0$ 且 $D\psi I$ 构成 $R^n$ 的基. 若 $\Phi =$

$\psi I\,(D\psi I)^{-1}$，则 $D\Phi=I$，引理证毕.

对引理 6.2 确定的 $\Phi$，记 $\Psi=I-\Phi D$，则 $\Psi:C\to C_D$ 是一个连续投影. 若 $y(\psi,h)$ 是(6.10)具初值 $y_0=\psi$ 的解，$D\psi=h(0)$ 且 $y(\psi,h)=y(\Psi\psi,0)+y(\Phi h(0),h)$，引理 6.1 表明解 $y(\Phi h(0),h)(t)$ 对固定的 $t$ 是 $([0,t],R^n)\to R^n$ 的连续线性算子，设 $K_D(t)$ 定义为

$$K_D(t):C([0,t],R^n)\to R^n$$

$$K_D(t)=y(\Phi h(0),h)(t) \tag{6.18}$$

此时我们有

**定理 6.3** 对 $\forall\ a>a_D, a\neq 0$，存在常数 $k=k(a)$ 使

$$|K_D(t)|\leqslant\begin{cases}ke^{at} & a>0\\ k & a<0\end{cases} \tag{6.19}$$

**证** 设 $y=y(\Phi h(0),h)$ 是方程(6.10)具初值 $y_0=\Phi h(0)$ 的解. 令 $a=a_D+2\varepsilon, \varepsilon>0, y(t)=Z(t)\exp at, H(t)=h(t)\exp(-at)$，$D_t:C\to R^n$ 定义为 $D_t\varphi=D(e^{\cdot}\varphi)$，则 $Z$ 满足方程

$$D_tZ_t=H(t), t\geqslant 0 \tag{6.20}$$

且由齐次方程导出的半群 $T_{D_t}(t), t\geqslant 0$ 满足

$$|T_{D_t}|\leqslant ke^{-\varepsilon t}, t\geqslant 0 \tag{6.21}$$

其中 $k$ 为常数.

设 $H$ 是 $C([0,\infty),R^n)$ 中的任一函数，且设

$$K_{D_t}(t)H=Z(\Phi H(0),H)(t)$$

是方程(6.20)在初值 $Z_0=\Phi H(0)$ 之下的解. 我们要证明存在常数 $M$ 使对 $\forall\ H\in C([0,\infty),R^n)$ 与 $\forall\ t\geqslant 0$，成立

$$|K_{D_t}(t)H|\leqslant M\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|H(s)| \tag{6.22}$$

若我们置 $H=h(t)\exp(-at)$，则 $K_{D_t}H(t)=y(t)\exp(-at)$ 意味着

$$|y(t)|\leqslant ke^{at}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}e^{-as}|h(s)|$$

从而(6.19)成立.

现在证(6.22). 对任何有限区间$[0,\sigma]$，由引理6.1⇒存在常数$k_\sigma$使$|K_{D_t}(t)H|\leqslant K_\sigma\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}|H(u)|$，$t\in[0,\sigma]$，若$Z(t_0,\psi,H)$是(6.2)具初值$Z_{t_0}(\psi)=\psi$的解，并且对某个整数$j\geqslant 0$，$t\in[j\sigma,(j+1)\sigma]$，则由(6.20)齐次部分是自治的，我们有

$$Z(0,\Phi H(0),H)(t)=Z(j\sigma,\Psi_{z_{j\sigma}}(0,\Phi H(0),H);0)(t)$$
$$+Z(j\sigma,\Phi H(j\sigma),H)(t)=Z(0,\Psi_{z_{j\sigma}}(0,\Phi H(0),H),0)(t-j\sigma)$$
$$+Z(0,\Phi H(j\sigma),H(j\sigma+\cdot))(t-j\sigma)$$

其中$\Psi\psi=\psi-\Phi D\psi$，所以

$$K_{D_t}(t)H=[T_D\varepsilon(t-j\sigma)K_{D_t,j\sigma}H](0)$$
$$+K_{D_t}(t-j\sigma)H(j\sigma+\cdot) \tag{6.23}$$

故有估计式

$$|K_{D_t}(t)H|\leqslant\beta\sup_{0\leqslant u\leqslant j_\sigma}|K_{D_t}(u)H|+K_\sigma\sup_{j\sigma\leqslant u\leqslant t}|H(u)| \tag{6.24}$$

对$j\sigma\leqslant t\leqslant(j+1)\sigma$以及$\beta=k\exp(-\varepsilon\sigma)$成立.

由(6.24)对$j$用归纳法⇒对一切整数$j\geqslant 0$和一切区间$\sigma_j\leqslant t\leqslant(\sigma+1)j$成立

$$|K_D(t)H|\leqslant(1+\beta+\cdots\cdots+\beta^j)k_\sigma\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|H(u)|$$

若我们选择$\sigma>0$使$\beta<1$，则$|K_{D_t}(t)|\leqslant k\sigma|(1-\beta)^{-1}$. 证毕.

最后设算子$D$表示成

$$D\varphi=D_0\varphi+\int_{-r}^{0}A(\theta)\varphi(\theta)d\theta$$

$$D_0\varphi=\varphi(0)-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\varphi(-r_k)$$

其中$0<r_k\leqslant r$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_k|+\int_{-r}^{0}|A(\theta)|d\theta<\infty$

则有

**定理6.4** 设$D_0$、$D$如(6.25)定义. 则成立

(1)$\alpha_{D_0}=\sup\{\mathrm{Re}\lambda:\det|I\lambda-\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\lambda r_k}|=0\}$

(2)设 $\Phi_0$ 由引理 6.2 确定，$\Psi_0=I-\Phi_0 D_0:C\to C_{D_0}$，则有分解表示

$$T_D(t)=T_{D_0}(t)\Psi_0+U(t)\quad t\geqslant 0$$

其中 $U(t)$ 全连续.

证明参看[4].

# 第七章

# 稳定性与有界性

本章讨论有限时滞 FDE 解的稳定性和有界性，限于篇幅对有关定理与判断准则只择其有代表性的，而对概念则力求全面系统，其间附有一些问题和重要例子.

## §1 定义与记号

设 RFDE($f$)与 NFDE($D$,$f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{1.2}$$

分别满足第四章与第六章的相应假定，以保证解关于初始数据的连续依赖性定理成立，解整体存在. 由于(1.1)(1.2)的初始函数空间都取为 $C=C([-r,0],R^n)$，$r\in R_+$. 下面的定义对二者都适用.

与常微分方程一样，要讨论(1.1)或(1.2)某一个解 $\tilde{x}(t)$的稳定性问题都可以化为 0 解的稳定性问题. 这只要作未知函数的代换 $y(t)=x(t)-\tilde{x}(t)$即可，因此下文中不妨设 $f(t,0)=0$、$\tilde{D}(t,0)=0$ 对$\forall\ t\in R$ 成立.

### 1. 稳定性的定义

和前几章一样约定，各种范数统一记为$|\cdot|$，必要时附加下标

$|\cdot|_X$，只要稍为注意是不致引起混淆的. 为确定起见，叙述定义时都暂指(1.1).

**定义 1.1** 记初始时刻为 $\sigma$，$|\varphi|=\sup\limits_{\theta\in[-r,0]}|\varphi(\theta)|$，$|x(t)|$取 $R^n$ 中的模，则对$\forall\ \sigma\in R$有

(1)(1.1)的零解称为稳定的，若对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon,\sigma)>0$，使$|\varphi|<\delta$ 时 $|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon$，$t\geqslant\sigma$.

(2)(1.1)的零解称为一致稳定的，若(1)中的 $\delta$ 不依赖于 $\sigma$.

(3)(1.1)的零解称吸引的. 若$\exists\ b_0(\sigma)$使当$|\varphi|\leqslant b_0$ 时，有 $x(t,\sigma,\varphi)\to0$，当 $t\to+\infty$. 换言之，"$\exists\ b_0(\sigma)>0$，对$\forall\ \varepsilon>0$. $\exists\ T(\sigma,\varepsilon,\varphi)$使当$|\varphi|\leqslant b_0(\sigma)$时，对$\forall\ t\geqslant\sigma+T(\sigma,\varepsilon,\varphi)$成立$|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon$".

若 $T$ 与 $\varphi$ 无关，则零解称为等度吸引的.

若 $T$ 仅与 $\varepsilon$ 有关，$b_0$ 与 $\sigma$ 无关，则零解称为一致吸引的.

若 $b_0=+\infty$，则零解称为全局吸引的.

(4)(1.1)的零解称为渐近稳定的，若零解是稳定的，吸引的.

(1.1)的零解称为等度渐近稳定的，若零解是稳定的，等度吸引的.

(1.1)的零解称为一致渐近稳定的，若零解是一致稳定的，一致吸引的.

**定义 1.2** 若$\exists\ \beta>0$，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ 使当$|\varphi|<\delta$ 时，对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 成立

$$|x(t,\sigma,\varphi)|\leqslant\varepsilon\exp[-\beta(t-\sigma)] \tag{1.3}$$

则称(1.1)的零解是指数渐近稳定的.

**定义 1.3** (1.1)的零解称为是全局(大范围)渐近稳定的，若零解是稳定的，全局吸引的.

此外对全局一致渐近稳定，完全稳定性，$M_0$—稳定性等与常微分方程平行的定义，可参看[8][9].

## 2. 与常微分方程诸稳定性的比较

定义 1.1～1.3 形式上与常微分方程无异，但有许多实质上的不同：在常微诸稳定性定义中初值 $x^0$ 代之以在 $E_{t_0}$ 上的初始函数 $\varphi$，因而初值的范数与 $x$ 的范数可以不同. 例如 $|\varphi|$ 是 $C$ 中的上确界模，$|x(t)|$ 表示 $R^n$ 中的模. 常微分方程对应于滞量为 0 的情形，而 FDE 中滞量不恒等于 0，因而存在稳定性对时滞的依赖关系问题. 常微分方程的零解稳定与否同初始时刻的选择无关，但 FDE 则不然，存在称之为“变异”的 FDE. 取某一初始时刻 $t_0 \Rightarrow$ 零解是稳定的，且存在 $t_0'>t_0$，以 $t_0'$ 为初始时刻 $\Rightarrow$ 零解是不稳定的.

**例 1**(Эльсгольц1954)　考虑方程

$$\dot{x}(t)=x(t)-x(te^{-t}) \tag{1.4}$$

取 $t_0=0, E_0=\{0\}$，(1.4)的通解为 $x(t)=c=\text{const.} \Rightarrow$ 零解稳定，若取 $t_0>1$，则 $E_{t_0}=(0,t_0e^{-t_0}]\cup\{t_0\}$. 取一族初始函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}\delta & t=t_0\\ \dfrac{\delta}{2} & t\in(0,t_0e^{-t_0}]\end{cases}$$

此时(1.4)有一族解

$$x(t)=\frac{\delta}{2}[e^{t-t_0}+1] \qquad t\geqslant t_0 \tag{1.5}$$

由于 $\delta$ 可取任意小的正数，而(1.5)右边无界 $\Rightarrow$ 零解是不稳定的.

## 3. 有界性的定义

**定义 1.4**　对 $(\sigma,\varphi)\in\Omega\subseteq R\times C$，若存在常数 $M=M(\sigma,\varphi)$，使(1.1)过 $(\sigma,\varphi)$ 的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 当 $t\geqslant\sigma-r$ 时满足：$|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 有界.

**定义 1.5**　对 $\forall H>0, \sigma\in R$. 若存在 $M=M(\sigma,H)$，使当 $|\varphi|<H$ 时对 $\forall t\geqslant\sigma$ 有 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称(1.1)的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是等度有界的. 若 $M$ 与 $\sigma$ 无关，则称(1.1)的解是一致有界的.

**定义 1.6** 若存在常数 $M>0$，使对 $\forall (\sigma,\varphi)\in R\times C$ 总存在 $T=T(\sigma,\varphi)>0$，当 $t\geqslant\sigma+T$ 时有 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称(1.1)的解最终有界(或者毕竟有界).

**定义1.7** 若存在常数 $M>0$，且对 $H>0$ 及 $\sigma\in H$，存在 $T=T(\sigma,H)>0$，使当 $\|\varphi\|<H$ 时，对 $\forall t\geqslant\sigma+T$ 成立 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称(1.1)的解等度最终有界. 若 $T$ 与 $\sigma$ 无关，则称(1.1)的解是一致最终有界的.

定义 1.4～1.7 也适用于方程(1.2).

**4. 几类辅助函数**

在下述稳定性研究中要用到的几种辅助函数主要有

(1)李雅普诺夫函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$，$V(t,x_1,\cdots,x_n)$，或者简记为 $V(x)$；$V(t,x)$. 完全引用常数分方程稳定性理论中的定义. 例如对 RDDE

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t,x_1(t),\cdots\cdots,x_n(t),x_1(t-r),\cdots x_n(t-r)) \tag{1.6}$$

其中 $r>0$，则有

$$\dot{V}_{(1.6)}=\frac{dV}{dt}\Big|_{(1.6)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x_1(t),\cdots\cdots x_n(t),x_1(t-r)\cdots\cdots,x_n(t-r)) \tag{1.7}$$

(2)李雅普诺夫泛函 $V(\varphi):C\to R$. $V(t,\varphi):R\times C\to R$. $C=C([-r,0]R^n)$，设(1.1)过$(\sigma,\varphi)$之解为 $x(t,\sigma,\varphi)$，$x_t(\sigma,\varphi)\triangleq x(t+\theta,\sigma,\varphi)$，$\theta\in[-r,0]$，定义全导数为

$$\dot{V}(t,\varphi)\big|_{(1.1)}=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)] \tag{1.8}$$

或者说 $\dot{V}(t,\varphi)$是 Ляпунов 泛函 $V(t,\varphi)$沿(1.1)的上右导数，记为 $\dot{V}_{(1.1)}(t,\varphi)$.

(3)$k$ 类函数. 若 $a\in C(R_+,R_+)$，$a(0)=0$. $a(s)$严格单调增加，

则称 $\alpha(s)$是一个 $k$ 类函数，其全体记为 $K$.

(4)$kc$ 类函数，若 $\alpha(s)\in K$ 且 $\alpha$ 是凸函数，则称 $\alpha(s)$是一个 $kc$ 类函数，其全体记为 $KC$

显然 $KC\subset K$.

这几类函数的综合运用便是 Ляпунов 第二方法在 FDE 中的推广.

## §2 稳定性依赖于初始时刻问题

上一节例 1 表明 FDE 中有一类变异的系统，其零解稳定性与初始时刻的选取有关. 可见如果在定义 1.1～定义 1.3 中"对每一个初始时刻"改为与常微分方程一样的"对给定的初始时刻"便会出现这一复杂情况. 因而比起常微分方程稳定性的定义，FDE 的稳定性定义是加强了.

本节要介绍当 FDE 稳定性的定义放宽为"对给定的初始时刻"后所出现的一些特别性质.

不难验证如下事实.

**定理 2.1** 滞量为常数，且右端不显含 $t$ 的自治系统($\tau_i\in R$)

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-\tau_1),\cdots\cdots,(t-\tau_m)) \tag{2.1}$$

零解的稳定性是不依赖于初始时刻的选择的. 进而若 $\tau_1,\cdots\cdots,\tau_m\in R_+$，方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\tau_1-t),\cdots\cdots,(t-\tau_m)) \tag{2.2}$$

右端 $f$ 关于 $t$ 是周期的，则(2.2)零解的稳定性也与初始时刻的选取无关.

若(2.2)中 $f$ 关于 $t$ 是周期的，但诸 $\tau_i$ 中至少有一个是 $t$ 的函数，则定理结论可能不成立.

**例 2** 考虑方程

$$\dot{x}(t)=3x(t)+b(t)x(t-\tau(t)) \tag{2.3}$$

其中 $b(t)$ 是周期为 1 的周期函数

$$
\begin{aligned}
&b(t)=3(|t|^2-|t|) \qquad t\in[-1,0] \\
&b(t+1)=b(t) \qquad t\in R
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

而 $\tau(t)$ 当 $t>0$ 时等于 0，当 $t\leqslant 0$ 时是周期为 1 的周期函数：

$$
\tau(t)=\begin{cases}\tau(t+1) & -\infty<t\leqslant -1 \\ |t|^{\frac{1}{3}}-|t| & -1\leqslant t\leqslant 0 \\ 0 & t>0\end{cases}
\tag{2.5}
$$

取初始时刻 $t_0=-2$，在 $[-2,-1]$ 中(2.3)有解

$$
x(t)=-x_0(1+t)^3, x_0=x(-2)
\tag{2.6}
$$

事实上，把(2.6)代入(2.3)的两边，立即推知(2.6)是其解，$x_0$ 是任意常数，由于 $t_0=-2$，$E_{t_0}=\{-2\}$，由唯一性，(2.6)即(2.3)的全部解. 而当 $t\geqslant -1$ 时，不同 $x_0$ 如何选取 $x(-1)=0$ 总是成立的. 由 $E_{-1}=\{-1\}$，故一切解在 $x(-1)$ 处全部粘合为零解. $t\geqslant 0$ 以后(2.3)退化为常微分方程，即(2.3)的解已全部求出，并表示为

$$
x(t)=\begin{cases}-x_0(1+t)^3, t\in[-2,-1] \\ 0 \qquad t>-1\end{cases}
$$

从而推出当初始时刻 $t_0=-2$ 时(2.3)的零解稳定.

今取 $t_0=0$，则(2.3)化为

$$
\dot{x}(t)=[3+b(t)]x(t)
$$

其解可表示成

$$
x(t)=x_0\exp\left(\int_0^t(3+b(t_1))\right)dt_1
\tag{2.7}
$$

不问 $x_0$ 如何地小，(2.7)在 $R_+$ 上是无界的，即述初始时刻为 $t_0=0$ 时，零解是不稳定的.

现在以 RDDE

$$
\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)))
\tag{2.8}
$$

为例给出若干性质. 其结果对多滞量系统也成立，其中 $\tau(t)\geqslant 0$，首先有

**定理 2.2** 对 RDDE(2.8)，设 $t_0^1, t_0^2 \in J=[t_I,\infty)$，$t_0^1<t_0^2$，则由 $t_0^2$ 时零解的稳定性可以推出 $t_0^1$ 时零解的稳定性. 由 $t_0^1$ 时零解是不稳定的可以推出 $t_0^2$ 的零解是不稳定的.

事实上，由解的连续依赖性立即得出，但定理的逆命题不成立，例 1、例 2 便是反例.

**定理 2.3** 若(2.8)是"变异的"，即零解稳定性依赖于初始时刻的选择，则必存在一点 $t^*\in J$，使得当 $t_0\in[t_I,t^*)$（记为 $I_I^{t^*}$）时，系统以 $t_0$ 为初始时刻⇒零解稳定，而当 $t_0\in(t^*,\infty)$（记为 $I_{t^*}$）时系统以 $t_0$ 为初始时刻⇒零解不稳定.

**证** 由所设，∃ $t_0^1$ 及 $t_0^2$ 分别使(2.8)的零解为稳定和不稳定的. 由定理 2.2⇒$t_0^1<t_0^2$，且对∀ $t_0\leqslant t_0^1$，(2.8)零解都是稳定的. 对∀ $t_0\geqslant t_0^2$，(2.8)的零解都是不稳定的，取 $t_0^3=(t_0^1+t_0^2)/2$，则若在 $t_0^3$ 处零解是稳定的，则 $t_0\leqslant t_0^3$ 时零解都是稳定的，若在 $t_0^3$ 处零解是不稳定的，则 $t_0\geqslant t_0^3$ 时零解都是不稳定的. 按这两种情形在$[t_0^3,t_0^2]$（或者在$[t_0^1,t_0^3]$）中取 $t_0^4=(t_0^3+t_0^2)/2$（或者$(t_0^1+t_0^3)/2$），如此继续下去便得 $t_0^*$.

我们称 $t^*$ 为临界点，已计算出的 $t^*$ 都成立 $t^*\in I_I^{t^*}$ 但迄今没有严格证明([98]中有一个充分必要条件，但不是直接加在方程构造上的).

考虑例 1 的方程. 在[38]中计算得 $t^*=0$.

**例 3** 方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x(t-\tau(t)) \tag{2.9}$$

记 $\tau_1(t)=\sqrt{|t|}-|t|$，$t\in[-1,0]$，$\tau_1(t+1)=\tau_2(t)$，$t\leqslant -1$，$b(t)$，$\tau(t)$定义为

$$b(t)=\begin{cases}-2 & t\leqslant 0\\ -2+t & t>0\end{cases}\qquad \tau(t)=\begin{cases}\tau_1(t) & t\leqslant 0\\ 0 & t>0\end{cases}$$

可计算出 $t^*=-1$.

**例 4**(Эверкин) 方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x(t-\frac{3\pi}{2}). \tag{2.10}$$

$$b(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{3\pi}{2}\\ -\cos t & \frac{3\pi}{2}\leqslant t\leqslant 3\pi\\ 1 & t>3\pi\end{cases}$$

可计算得 $t^*=0$.

对 FDE 的这种变异性(Variability)还有两个重要的问题：

(1)FDE 具有变异性的充要条件是什么？

(2)变异系统的应用背景还没有具体分析，在钱学森、宋健合著的"工程控制论"第十一章中专门指出这类系统的特性(或"工程控制论"第一版第八章).

在[38]中我们构造了变异类.

## §3 线性 FDE 的稳定性

### 1. 与稳定性等价的命题

考虑齐次自治线性 FDE

$$\dot{x}(t)=L(x_t) \tag{3.1}$$

其中 $x\in R^n$. $L$ 满足第三章 §3 的全部假定，$U(t,s)$满足第三章 §3 定理 3.1 中式(3.1)与(3.2). $T(t,\sigma)$是(3.1)的解映射，$T(t,\sigma)\varphi=x_t(\sigma,\varphi)$, $t\geqslant\sigma$.

**引理** 3.1 下列四个命题是等价的.

(1)(3.1)的解有界.

(2)(3.2)的零解稳定.

(3)对$\forall\ \sigma\in R$，$\exists$ 常数 $k(\sigma)$使得

$$|T(t,\sigma)|\leqslant k(\sigma), t\geqslant\sigma \tag{3.2}$$

(4)对$\forall\ s\in R$,$\exists$ 常数 $k(s)$使得

$$|U(t,s)|\leqslant k(s),t\geqslant s \tag{3.3}$$

**证** (1)⇒(3). 设(3.1)的每一个解有界,则对$\forall\ (\sigma,\varphi)\in R\times C$,$\exists$ 常数 $k(\sigma,\varphi)$使得解映射 $T(t,\sigma)$满足

$$|T(t,\sigma)\varphi|\leqslant k(\sigma,\varphi)\qquad t\geqslant\sigma.$$

由一致有界性原理⇒$\exists$ 常数 $k(\sigma)$,使得$|T(t,\sigma)|<k(\sigma)$.

(3)⇒(4). 由 $U(t,s)$满足

$$|U(t,s)|\leqslant\int_s^t m(u)|U_u(\cdot,s)|du+1,t\geqslant s$$

$$|U_s(\cdot,s)|=1$$

得到

$$|U_t(\cdot,s)|\leqslant 1+\int_s^t m(u)|U_u(\cdot,s)|du,t\geqslant s$$

再由 Grownwall 不等式有

$$|U_t(\cdot,s)|\leqslant\exp[\int_s^t m(u)du],\quad t\geqslant s \tag{3.4}$$

即有

$$|U_t(\cdot,s)|\leqslant r(s)=\exp\int_s^{s+r}m(u)du\quad s\leqslant t\leqslant s+r$$

考虑到 $t\geqslant s+r$ 时 $U(t,s)$满足(3.1),⇒$|U_t(\cdot,s)|\leqslant k(s+r)r(s)$. 得证.

(4)⇒(2). 由第三章定理 4.2⇒$Y(s,t)=U(t,s)$关于 $s$ 几乎处处成立,又由(4)⇒$|Y(s,t)|\leqslant k(s)$对 $s<t$ 几乎处处成立,所以第三章定理 4.2⇒(2)成立. 证毕.

(2)⇒(1)是显然的. 由此定理全部得证.

**引理** 3.2 若$\exists$ 常数 $m_0$ 使得

$$\int_t^{t+r}m(u)du\leqslant m_0\quad t\in R \tag{3.5}$$

则下列命题是等价的.

(1)(3.1)的解一致有界.

(2)(3.1)的零解一致稳定.

(3)$\exists$ 常数 $k$ 使得对$\forall$ $s\in R$ 有

$$|T(t,\sigma)|\leqslant k, t\geqslant t_0 \tag{3.6}$$

(4)$\exists$ 常数 $k_1$,使得对$\forall$ $\sigma\in R$ 有

$$|U(t,s)|\leqslant k_1, t\geqslant\sigma \tag{3.7}$$

**证** 若(3.1)的解一致有界$\Rightarrow$常数 $k>0$ 使得对$\forall$ $\sigma\in R,\varphi\in C,|\varphi|\leqslant 1$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant k, t\leqslant\sigma \tag{3.8}$$

因此$|T(t,\sigma)|\leqslant k, t\geqslant\sigma$. 即(1)$\Rightarrow$(3). 由(3.4)(3.5)$\Rightarrow$对$\forall$ $s\in R$,当 $s\leqslant t\leqslant s+r$ 时,$|U_t(\cdot,s)|\leqslant r$. $r=e^{m_0}$.若(3)成立,与引理 3.1 类似可证(3)$\Rightarrow$(4). 用第三章定理 4.2 可得(4)$\Rightarrow$(2). 而(2)$\Rightarrow$(1)是显然的. 证毕.

**引理 3.3** 若(3.5)成立,则下列三个命题是等价的

(1)(3.1)的零解是一致渐近稳定的.

(2)(3.1)的零解是指数渐近稳定的,亦即存在常数 $k>0,\alpha>0$ 使得对$\forall$ $\sigma\in R$ 有

$$|T(t,\sigma)|\leqslant ke^{-\alpha(t-\sigma)}, t\geqslant\sigma \tag{3.9}$$

(3)存在常数 $k_1>0$ 及(2)中的 $\alpha>0$ 使得对$\forall$ $s\in R$ 成立

$$|U(t,s)|\leqslant k_1e^{-\alpha(t-s)}, t\geqslant s \tag{3.10}$$

**证** 若(1)成立,则对$\forall$ $\eta>0$,$\exists$ $\tau=\tau(\eta)>0$,使得对$\forall$ $t_0\in R$. $|\varphi|\leqslant 1$ 有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|<\eta, t\geqslant\tau+\sigma$$

从而当 $t\geqslant\sigma+\tau$ 时$|T(t,\sigma)|<\eta$. 选取 $\eta<1$. 并设

$$\alpha=-\tau^{-1}\log\eta,\quad k=k_0e^{\alpha\tau}$$

其中 $k_0$ 是引理 3.2 中(3)所指出的常数(这里为区别记之为 $k_0$). 由于设(3.1)的零解是一致稳定的,故由引理 3.2$\Rightarrow k_0$ 存在. 对$\forall$ $t\geqslant\sigma$,存在整数 $n\geqslant 0$,使得 $n\tau\leqslant t-\sigma<(n+1)\tau$,所以有

$$
\begin{aligned}
|T(t,\sigma)| &\leqslant |T(t,\sigma+n\tau)| \cdot |T(\sigma+n\tau,\sigma)| \\
&\leqslant k_0 |T(\sigma+n\tau,\sigma)| \\
&\leqslant k_0 \eta |T(\sigma+(n-1)\tau,\sigma)| \\
&\leqslant k_0 \eta^n = k_0 e^{-an\tau} \\
&= k e^{-a(n+1)\tau} \leqslant k e^{-a(t-\sigma)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$(2)成立.

由(2)$\Rightarrow$(3)与引理 3.1 的证明类似. 而(3)$\Rightarrow$(1)则是显然的. 证毕.

## 2. 线性自治 DDE 的稳定性

现在要对第二章与第六章中所得到的,或者所蕴含的稳定性准则,在本章严格定义之下给以系统总结. 写成确切的定理.

先考察 RDDE 及其特征方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}B_i x(t-\tau_i) \tag{3.11}$$

$$h(\lambda)=\det|\lambda I-A-\sum_{i=1}^{m}B_i e^{-\lambda\tau_i}|=0 \tag{3.12}$$

其中 $x\in R^n$、$A$、$B_i$ 均为 $n\times n$ 常数阵, $\tau_i=\text{const.}>0(i=1,2,\cdots\cdots,m)$. 我们有

**引理** 3.4 对(3.11)(3.12)有[8]

(1)(3.12)只有有限个单重纯虚根(含虚部也等 0 的零根),其他根皆具负实部的充要条件是$\exists$ 常数 $M$,$K$,$r$、使得(3.11)过$\forall$ $(\sigma,\varphi)$的解都满足

$$|x(t,\sigma,\varphi)|\leqslant M|\varphi|e^{-r(t-\sigma)}+k|\varphi|, t\geqslant\sigma \tag{3.13}$$

(2)(3.12)的所有根皆具负实部的充要条件为:存在正常数 $M$ 和 $r$ 使得方程(3.11)过任意的$(\sigma,\varphi)$的解都满足

$$|x(t,\sigma,\varphi)| \leqslant M|\varphi|e^{-r(t-\sigma)}, t\geqslant\sigma \tag{3.14}$$

于是有

**定理 3.1** 特征方程(3.12)的根与(3.11)零解的稳定性的关系有

(1)(3.11)的零解为一致稳定的充要条件是(3.12)的根只有有限个单重纯虚根，而其他根皆具负实部(包括虚部为 0 的单重零根 $\lambda=0$).

(2)(3.11)的零解为一致渐近稳定的充要条件是(3.12)的所有根皆具负实部.

(3)(3.11)的零解为不稳定的充分条件是(3.12)有正实部的根.

**证** (1)若(3.12)只有有限个单重纯虚根，而其他根皆具负实部，则由引理 3.4 的(3.13)式成立⇒(3.11)零解是一致稳定的，反之，若方程(3.11)的零解一致稳定，由引理 3.2⇒∃ 常数 $k$ 使得 $|T(t,\sigma)|\leqslant k, t\geqslant\sigma$. 故

$$
\begin{aligned}
|x(t,\sigma,\varphi)| &\leqslant |x_t(\sigma,\varphi)| = |T(t,\sigma)\varphi| \\
&\leqslant k|\varphi| \leqslant M|\varphi|e^{-r(t-\sigma)} + k|\varphi|
\end{aligned}
$$

再由引理 3.4⇒(3.12)的纯虚根必为单重的，且其他根皆具负实部. 此外虚轴上只能有有限个根是第二章早已证实过的.

(2)若(3.12)的所有根皆具负实部，由引理 3.4⇒(3.14)成立⇒(3.11)的零解一致渐近稳定，反之，若(3.11)的零解是一致渐近稳定的，由引理 3.3⇒∃ 常数 $M>0$ 及 $\alpha>0$ 使得对所有 $\sigma\in R$，有 $|T(t,\sigma)|\leqslant Me^{-\alpha(t-\sigma)}, t\geqslant\sigma$，从而

$$
\begin{aligned}
|x(t,\sigma,\varphi)| &\leqslant |x_t(\sigma,\varphi)| = |T(t,\sigma)\varphi| \\
&\leqslant M|\varphi|e^{-\alpha(t-\sigma)}, t\geqslant\sigma
\end{aligned}
$$

再由引理 3.4⇒方程(3.12)的根皆具负实部.

(3)若(3.12)至少有一个具正实部的根，不妨记为 $\lambda_0$，$\mathrm{Re}\lambda_0>0$. 由第二章⇒$x(t)=ce^{\lambda_0 t}$是(3.11)的解. $c\in R^n$ 是任意的常向量⇒零解不稳定. 证毕.

**注** 3.1 定理 3.1(3)的证明对其他自治线性 DDE 都成立. 顺

便再强调一下，ADDE 与 CDDE 零解恒为不稳定的.

对 NDDE 的特征根与零解稳定性之间的关系相当复杂，如第六章论及的第三临界情形和一切特征根皆具负实部但 $\mathrm{Re}\lambda_j \to 0$，$j \to \infty$ 的情形，都尚待今后进一步探索.

作为例子考虑方程

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau)=Ax(t)+Bx(t-\tau) \tag{3.15}$$

$$h(\lambda)=\det|\lambda I+\lambda c e^{-\lambda\tau}-A-Be^{-\lambda\tau}|=0 \tag{3.16}$$

对(3.15)我们有

**定理** 3.2　若(3.16)的根全体记为$\{\lambda_j\}$，则

(1)存在一个 $j$，使 $\mathrm{Re}\lambda_j>0$，则(3.15)零解不稳定.

(2)$\exists$ 常数 $\delta>0$. 使对$\forall$ $j$ 有 $\mathrm{Re}\lambda_j\leqslant-\delta<0$，则(3.15)的零解是渐近稳定的，而且是一致的.

### 3. 全时滞稳定

考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{3.17}$$

其中 $x\in R^n$，$\tau\in R_+$ 作为参数.

**定义** 3.1　若对$\forall$ $\tau\in R_+$，(3.17)的零解都是渐近稳定的，则(3.17)零解称为全时滞稳定的(或者称(3.17)是全时滞稳定的).

全时滞稳定亦称无条件稳定，或绝对稳定的. 当然，这与自动调节系统中使用的同一术语意义完全不同.

这一定义同样适用于中立型 DDE.

迄今为止所有研究工作，都只限于线性系统，而且主要是针对 RDDE

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau) \tag{3.18}$$

其中 $x\in R^n$，$A$，$B$ 为 $n\times n$ 常数阵，$\tau\in R_+$ 作为参数，实际上(3.18)是一族方程. 引入特征方程的记号

$$h(\lambda,\tau)=\det|\lambda I-A-Be^{-\lambda\tau}|=0 \tag{3.19}$$

我们有如下的基本结果

**定理** 3.3 系统(3.18)为全时滞稳定的充要条件是特征方程 $h(\lambda,\tau)$满足

(1)$h(\lambda,0)=\det|\lambda I-A-B|=0$ 的根皆具负实部.

(2)对$\forall\ y\in R$ 及$\forall\ \tau\in R_+$恒成立

$$h(iy,\tau)=\det|iyI-A-Be^{-iy\tau}|\neq 0$$

**证** 必要性.若(1)不成立⇒$\tau=0$ 时(3.18)零解不是渐近稳定的⇒矛盾.充分性.要证对$\forall\ \tau\in R_+$(3.19)的所有特征根皆具负实部.为此把$h(\lambda,\tau)$展开为$\lambda$的多项式

$$h(\lambda,\tau)=(-1)^n\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+A_n=0$$

其中$A_i$是$e^{-\lambda\tau}$的多项式,由$A,B$的元$a_{ij},b_{ij}$组成多项式的系数.当$\tau\in R_+$及 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$ 时有$|e^{-\lambda\tau}|\leqslant 1\Rightarrow\tau\in R_+$,$\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$ 时$|A_i|$有界,记为

$$k_1=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|,\tau\in R_+,\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0.$$

再取

$$R=\max(1,(n+1)k_1)>0$$

则当$|\lambda|\geqslant R$ 及 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}&|(-1)^n\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+A_n|\\&\geqslant|\lambda|^n[1-|A_1|/|\lambda|-\cdots\cdots-|A_n|/|\lambda|^n]\\&\geqslant R^n[1-\frac{nk_1}{(n+1)k_1}]>0\end{aligned}$$

⇒在$|\lambda|\geqslant R$,$\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$ 时,对$\forall\ \tau\in R_+$,(3.19)没有根.

再由条件(1)⇒当$\tau=0$ 时(3.19)的根都落在左半面 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 上.当$\tau$由 0 增加时,特征根要落在右半平面上,当且仅当有某一个$\tau$使$\lambda$在$-R$到$R$之间穿过虚轴,而条件(2)不允许这一点成立,所以对$\forall\ \tau\in R_+$,(3.19)的一切根随着$\tau$的增加永远停留在左半平面内.证毕.

定理 3.3 似乎已解决了全时滞稳定性的充要条件问题，其实不然，因为(1)可用 Routh－Huwitz 准则判断，而(2)是超越的，难以检验的. 1946 年 A. A. Андронов 就提出公开问题：是否存在全时滞稳定的代数判据？$n=1$ 时这是显然成立的，即

**例 5** 对一阶系统

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$$

$$h(\lambda,\tau)=a+be^{-\lambda\tau}-\lambda=0$$

条件(1)即 $h(\lambda,0)=a+b-\lambda=0$，根 $\lambda=a+b$ 为负的条件是

$$a+b<0 \tag{3.20}$$

而条件(2)意味着用 $iy$ 代入 $h(\lambda)$，记 $\tau y=w$，分开实部和虚部得到

$$R(y,w)=a+b\cos w=0$$

$$I(y,w)=-y+b\sin w=0$$

消去 $w$ 得

$$H(y)=y^2+a^2-b^2=0$$

$H(y)$无非 0 实根的充要条件是 $b^2-a^2\leqslant 0$. 当 $H(y)$有非 0 实根时，$y^2=b^2-a^2>0\Rightarrow b\neq 0$. 于是由 $R(y,w)=0$ 与 $I(y,w)=0$ 解得 $\operatorname{tg}w=-y/a$，对任何实的 $y,\omega$ 都有实解$\Rightarrow R=0$ 及 $I=0$ 都有实的 $\omega$ 公根.

总结可得全时滞稳定性的充要条件是

$$a+b<0,b^2-a^2\leqslant 0$$

或者写成

$$a+b<0,b-a\geqslant 0$$

这是代数判据，完全由方程系数确定.

对 $n\geqslant 2$ 的情形有一系列结果参看[234]，但离问题的最终解决还差很远.

### 4. 全参量分析问题

艾利斯哥尔茨详尽地分析了一阶系统. 我们用它说明问题的

全貌. 考虑方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=0 \tag{3.21}$$

其中 $x\in R, a, b\in R, \tau\in R_+$. 特征方程为

$$\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0 \tag{3.22}$$

所谓方程(3.21)的"全参量分析"应包含两个方面:

(1)在以 $a,b$ 为参数的平面$(a,b)$上,用(3.22)实部为 0 的根的点$(a_0,b_0)$作为边界,把$(a,b)$平面划分为若干个区域,在这些区域中方程(3.21)的零解分别为全时滞稳定、渐近稳定和不稳定的. 在诸区域的边界上(3.21)的零解可能是稳定的——实部为零的根是单重的,也可能是不稳定的——实部为零的根出现重根.

(2)当 $a,b$ 取定,以 $\tau\in R_+$ 为参数,这时稳定性表现得十分多样化,大致可归为三种情形.

对$\forall\ \tau\in R_+$,(3.21)的零解是渐近稳定的.

对$\forall\ \tau\in R_+$,(3.21)的零解是不稳定的.

对$\forall\ \tau\in S\subset R_+$,(3.21)的零解是稳定的,而对$\forall\ \tau\in \bar{S}=R_+-S$,(3.21)的零解是不稳定的.

所以如果对一个方程完成全参量分析,就等于说,彻底解决了它的稳定性问题.

这种划分区域的方法通常有两种:$D$ 划分法与幅相法. 我们介绍的是用 $D$ 划分法对方程(3.21)所得出的完整结果.

(3.22)当 $a+b=0$ 时有 0 根 $\lambda=0$,所以 $a+b$ 是 $D$ 划分边界之一. 现在设(3.22)有实部为 0 的纯虚根 $iy$(可设 $y\neq 0$),代入(3.22)分开实部与虚部得

$$a+b\cos\tau y=0$$

$$y-b\sin\tau y=0$$

或者

$$b=\frac{y}{\sin\tau y}, a=-\frac{y\cos\tau y}{\sin\tau y}, \tau y\neq k\pi, k=0,\pm 1\cdots \tag{3.23}$$

曲线(3.23)以 $y$ 为参数,记为 $\Gamma$,它和直线 $a+b=0$ 共同组成 $D$ 划分的边界,如图 7.1 所示.

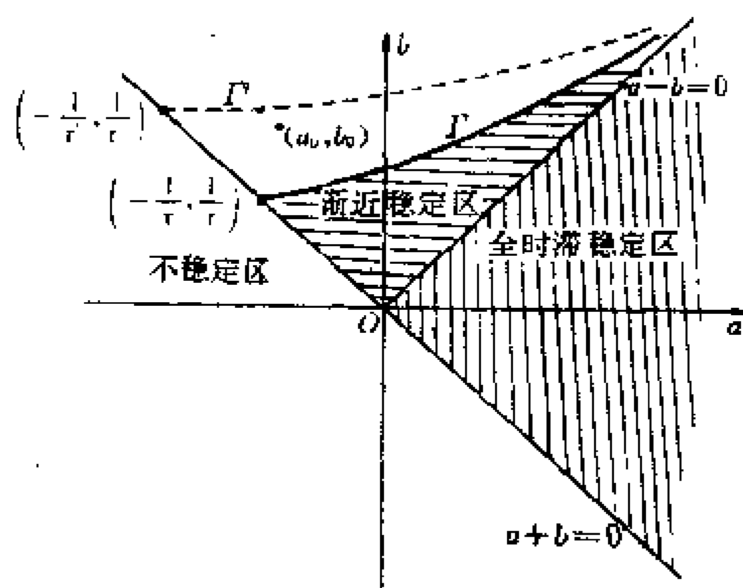



图 7.1

几点说明:

(1)在[6]中还详尽地划分出特征方程有 1 个,2 个……$k$ 个正实部根的区域,这对于我们的目的——稳定性来说,没有什么意义;从略.

(2)图 7.1 中 $\tau$ 固定,则 $\Gamma$ 确定,区域划分也确定了. 若令参数 $\tau\to 0\Leftrightarrow\frac{1}{\tau}\to\infty$. 图中曲线 $\Gamma$ 向上方移向 $\Gamma'$ 以至于无穷远,稳定区扩展为半平面 $a+b>0$. 反之,当 $\tau\to\infty$ 时 $\Gamma$ 重合于直线 $a-b=0$. 稳定区域即全时滞稳定区.

(3)注意到$(a,b)$平面上任取一点可能出现的情况有:落在全时滞稳定区内,落在不稳定区内,落在渐近稳定区内或边界上. 假定$(a_0,b_0)$在 $a+b>0$ 的半平面上,但不在稳定区内. 此时只要适当选择 $\tau'<\tau$,则 $\Gamma$ 移至 $\Gamma'$ 时$(a_0,b_0)$便落在渐近稳定区内. 换言

之，$a$，$b$ 固定，应当考虑参数 $\tau$ 使(3.21)稳定与不稳定的集合 $S$ 与 $\bar{S}$，例如对一阶和二阶 RDDE 有几种典型的 $S$ 构造形式：

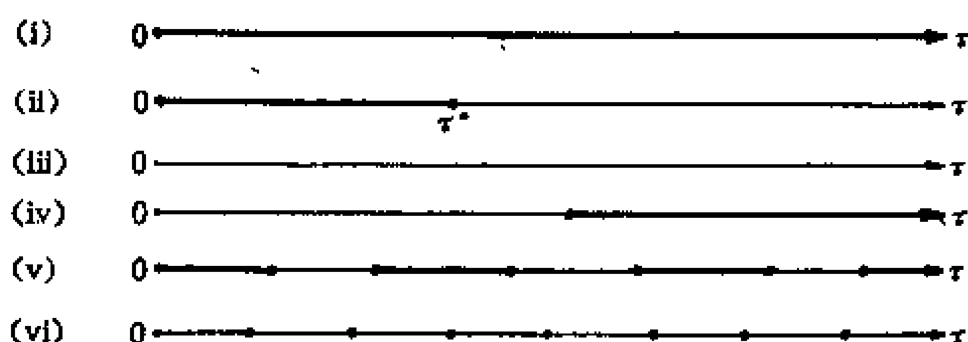



图 7.2

图 7.2 中粗线段上的 $\tau$ 使(3.21)零解为渐近稳定的，细线段上的 $\tau$ 使(3.21)的零解为不稳定. 在二者的连接点处，如 $\tau^*$，(3.21)零解是稳定的. 于是(1)表示全时滞稳定，(2)表示当 $\tau\in[0,\tau^*)$时渐近稳定的. $\tau=\tau^*$ 时是稳定的，$\tau>\tau^*$ 时是不稳定的，(3)表示对$\forall\ \tau\in R_+$(3.21)零解皆不稳定，凡此等等.

关于 $D$ 划分法和幅相法的详尽叙述参看[6]. 目前已知的全参量分析工作是：RDDE　$n\leqslant 3$ 的情形以及 NDDE $n=1$ 情形[592].

## §4　Ляпунов 泛函方法

本节给出典型的判断准则，说明 $V$ 泛函在稳定性理论中的应用. 考虑 RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{4.1}$$

假定(4.1)满足解的整体存在与唯一性定理条件，且 $f:R\times C\to R^n$. 把 $R\times$($C$ 的有界子集)映入 $R^n$ 的有界集.

**定理** 4.1　设 $u,v\in K$、$W:R_+\to R_+$，若存在一个 $R\times C\to R$ 的连续泛函 $V(t,\varphi)$ 使得

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|) \tag{4.2}$$

$$\dot V_{(4.1)}(t,\varphi)\leqslant -W(|\varphi(0)|) \tag{4.3}$$

则方程(4.1)的零解是一致稳定的，若当 $s>0$ 时 $W(s)>0$，则(4.1)的零解是一致渐近稳定的.

**证**　不妨设 $r>0$. 对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)$，$0<\delta<\varepsilon$. 使得 $V(\delta)<u(\varepsilon)$，设 $|\varphi|<\delta$，$\sigma\in R$，由(4.3)

$$\dot V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant 0 \qquad t\geqslant\sigma$$

由(4.2)有

$$u(|x(t,\sigma,\varphi)|)\leqslant V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant V(\sigma,\varphi)$$

$$\leqslant v(\delta)<u(\varepsilon) \qquad t\geqslant\sigma$$

$\Rightarrow$当 $t\geqslant\sigma$ 时 $|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon$. 因为 $|\varphi|<\delta<\varepsilon$，一致稳定性得证.

对 $\varepsilon=1$，取 $\delta_0=\delta(1)$（$\delta(\varepsilon)$由上面确定的）. 现在再任意给定 $\varepsilon>0$. 我们要证$\exists$ $T(\delta_0,\varepsilon)>0$ 使得(4.1)满足 $|\varphi|<\delta_0$ 的解 $x(t,\sigma,\varphi)$当 $t\geqslant\sigma+T(\delta_0,\varepsilon)$时成立 $|x_t(\sigma,\varphi)|<\varepsilon$. 即得渐近稳定性. 用反证法，令 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 是上述一致稳定性中的常数，若有一个解 $x(t,\sigma,\varphi)$满足 $|\varphi|<\delta_0$，但 $|x_t(\sigma,\varphi)|\geqslant\delta$，$t\geqslant\sigma$，则在每一长度为 $r$ 的区间上必有 $s$ 使 $|x(s)|\geqslant\delta$，按照这一原则可取到一个序列$\{t_k\}$使得

$$\sigma+(2k-1)r\leqslant t_k\leqslant\sigma+2kr$$

$$|x(t_k)|\geqslant\delta \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

由关于 $f$ 的假设$\Rightarrow\exists$ 常数 $L$ 使 $|\dot x(t)|<L$，对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 成立$\Rightarrow$在区间 $t_k-\frac{\delta}{2L}\leqslant t\leqslant t_k+\frac{\delta}{2L}$上有 $|x(t)|>\frac{\delta}{2}$，我们可以用加大 $L$ 或者取子序列的办法使诸区间$[t_k-\frac{\delta}{2L},t_k+\frac{\delta}{2L}]$互不相交. 由此得

$$\dot V(t,x_t)\leqslant-\omega\left(\frac{\delta}{2}\right),t\in\left[t_k-\frac{\delta}{2L},t_k+\frac{\delta}{2L}\right]$$

因此，由 $t_k-\sigma>\frac{\delta}{L}(k-1)$有

$$V(t_k,x_{t_k})-V(t,\varphi)\leqslant -W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}(k-1)$$

记 $K(\delta,L)$ 为 $\geqslant v(\delta_0)/\frac{\delta}{L}W(\frac{\delta}{2})$ 的最小整数，若 $k>1+K(\delta_0,L)$，则

$$V(t_k,x_{t_k})<v(\delta_0)-W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}\frac{v(\delta_0)}{W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}}\leqslant 0$$

$\Rightarrow$矛盾$\Rightarrow\exists\ \tau=\tau(\sigma,\varphi),\sigma<\tau\leqslant\sigma+2rK(\delta_0,L)$，$|\varphi|<\delta_0$. 使得 $|x_\tau|<\delta\Rightarrow t\geqslant\sigma+2rK(\delta_0,L)$ 时成立

$$|x_t|<\delta\leqslant\varepsilon.\ (T(\delta_0,\varepsilon)=2rK(\delta_0,L))$$

$\Rightarrow$一致渐近稳定性成立. 证毕.

这只是一个基本的稳定性定理，它说明 $V$ 泛函的应用格式. 近年来国内外有大量的推广，限于篇幅只能在下文中再举数例. 欲知详情的读者可从所附文献中看到.

**例 6** 考虑定常线性 RDDE

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-r) \tag{4.4}$$

其中 $x\in R^n$. $A,B$ 为 $n\times n$ 常数阵. $r=\text{const.}>0$. 它的零解的稳定性问题可以用上一节指出的特征根法解决；判断特征根分布状况理论上可用第二章中指出的庞特里亚金定理. 但实际上要处理超越方程是十分困难的. 现在我们通过建立 $V$ 泛函去直接判断零解稳定性.

把(4.4)右端写成算子形式

$$\dot{x}=A\varphi(0)+B\varphi(-r)$$

设 $A$ 的 $n$ 个特征根皆具负实部. 取对称阵 $C$，设 $C$ 为正定的(此时记 $C>0$)，使满足

$$A'C+CA=-D<0$$

$A'$ 为 $A$ 的转置阵，设 $E$ 为正定阵. 作 $V$ 泛函为

$$V(\varphi)=\varphi'(0)C\varphi(0)+\int_{-r}^{0}\varphi'(\theta)E\varphi(\theta)d\theta \tag{4.5}$$

由 $V(\varphi)$表达式⇒∃ 正数 $v,k$ 使得

$$v|\varphi(0)|^2\leqslant V(\varphi)\leqslant k|\varphi|^2$$

现在计算 $V(\varphi)$沿(4.4)的解的全导数

$$\begin{aligned}V_{(4.4)}(\varphi)=&-\varphi'(0)D\varphi(0)+2\varphi'(0)CB\varphi(-r)\\&+\varphi'(0)E\varphi(0)-\varphi'(-r)E\varphi(-r)\end{aligned}\tag{4.6}$$

我们把上式右边看作是关于 $\varphi(0),\varphi(-r)$的二次型，且对阵 $A,B$ 附加条件以保证阵方程可解得 $C,E$，使关于 $\varphi(0),\varphi(-r)$的二次型(4.6)是负定的. 则由定理 4.1⇒(4.4)零解是渐近稳定的. 换言之，我们要确定 $A,B,C,E$ 使得对称阵

$$\begin{pmatrix}D-E & -CB\\-B'C & E\end{pmatrix}\tag{4.7}$$

是正定的. 已知 $D>0,E>0$. 若 $D-E>0$，则当 $B=0$ 时(4.7)是正定的. 于是当 $B$ 的模 $\|B\|$ 充分小时(4.7)保持是正定的⇒(4.4)零解渐近稳定.

应用上述方法可以对 $B$ 给出估计. $\|\cdot\|$ 表阵的模，设 $D-E>0$

$$x'(D-E)x\geqslant\lambda|x|^2,\ x'Ex\geqslant\mu|x|^2$$

则 $V_{(4.4)}(\varphi)$有如下估计

$$\begin{aligned}V_{(4.4)}(\varphi)\leqslant&-\lambda|\varphi(0)|^2+2\|CB\|\,|\varphi(0)|\,|\varphi(-r)|\\&-\mu|\varphi(-r)|^2\end{aligned}$$

若 $\lambda\mu-\|CB\|^2>0$，则

$$V_{(4.4)}(\varphi)\leqslant-k(|\varphi(0)|^2+|\varphi(-r)|^2)\quad r>0$$

其中 $k$ 是适当选取的正常数. 由定理 4.1⇒此时(4.4)零解是渐近稳定的.

显然，为了使(4.7)保持正定，这种估计远非十分理想，有待进一步研究. J. Hale 在[4]中提出一个公开问题：设(4.4)是全时滞稳定的，它存在满足条件(4.7)的形如(4.5)的泛函 $V(\varphi)$的充要条件是什么？ $n=2$ 已解决[237].

**例 7** 设 $x\in R$，对纯量方程

$$\dot{x}(t)=-(ax(t)+bx(t-r)) \quad r=\text{const.}>0 \tag{4.8}$$

取 $V$ 为

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+\mu\int_{-r}^{0}\varphi^2(\theta)d\theta \qquad \mu>0 \tag{4.9}$$

$V(\varphi)$ 关于 (4.8) 的导数为

$$\dot{V}_{(4.8)}(\varphi)=-(a-\mu)\varphi^2(0)-b\varphi(0)\varphi(-r)-\mu\varphi^2(-r)$$

相应的 (4.7) 为正定的条件是

$$a>\mu>0 \qquad 4(a-\mu)\mu>b^2 \tag{4.10}$$

当 $\mu=\frac{a}{2}$ 时由 (4.10) 所确定的 $|b|$ 取值范围最大，此时我们得出，若 $|b|<a$，则 (4.8) 的零解对 $\forall\ r\in R_+$ 为渐近稳定的，再一次得到上一节的结论，是谓殊途同归.

**例 8** 对非自治纯量方程

$$\dot{x}(t)=-(a(t)x(t)+b(t)x(t-r)) \tag{4.11}$$

其中 $a(t)$，$b(t)$ 当 $t\in R$ 时有界连续，并且对 $\forall\ t\in R$，$a(t)\geqslant\delta>0$ 成立.

仍取 $V$ 泛函为 (4.9)，但取 $\mu=\frac{\delta}{2}$. $V(\varphi)$ 关于 (4.11) 的导数为

$$\dot{V}_{(4.11)}(\varphi)=-(a(t)-\mu)\varphi^2(0)-b(t)\varphi(0)\varphi(-r)-\mu\varphi^2(-r)$$

若不等式 (4.10) 成立. 即现在关于 $t$ 一致地有

$$(2a(t)-\delta)\delta>b^2(t)$$

则方程 (4.11) 的零解是一致渐近稳定的.

特别地，若 $\exists$ 常数 $\theta\in[0,1)$，使得对 $\forall\ t\in R$，$|b(t)|\leqslant\theta\delta$ 成立. 则不等式 (4.10) 成立.

若 $r=r(t)$. $r(t)$ 连续可微且有界，并且对 $t\in R$ 一致地有 $a(t)\geqslant\delta>\mu>0$，$(2a(t)-\mu)(1-\dot{r}(t))\mu>b^2(t)$. 则仍用泛函 (4.9). 由定理 4.1 $\Rightarrow$ 其零解是一致渐近稳定的.

现在给出零解为不稳定的充分条件：

**定理 4.2** 对方程(4.1),设 $V(\varphi)$ 是 $C$ 中连续有界泛函;若记 $B(0,r)=\{\varphi\in C:|\varphi|<r\}$ 且 $\exists\ r>0$,开集 $U\subset C$,使得

(1) $V(\varphi)>0$, $\varphi\in U$ 的边界 $\Gamma_U$ 上 $V(\varphi)=0$.

(2) $\{0\}\in\bar{U}\cap B(0,r)$.

(3) 在 $U\cap B(0,r)$ 上, $V(\varphi)\leqslant u(|\varphi(0)|)$.

(4) 在 $R_+\times U\cap B(0,r)$ 上, $V^{\cdot}_{(4.1)}(\varphi)\geqslant\omega(|\varphi(0)|)$;

其中 $\mu,\omega\in K$.

$$V^{\cdot}_{(4.1)}(\varphi)=\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(x_{t+h}(t,\varphi))-V(\varphi)]$$

则(4.1)的零解是不稳定的.

特别地,对 $\forall\ \varphi\in U\cap B(0,r)$,过 $(\sigma,\varphi)$ 的解 $x_t(\sigma,\varphi)$ 必在有限时间内达到 $B(0,r)$ 的边界.

**证** 设 $\sigma\in R$, $\varphi\in U\cap B(0,r)\Rightarrow V(\varphi)>0$. 由条件(3)有

$$|\varphi(0)|\geqslant u^{-1}(V(\varphi))$$

再由(3)(4)$\Rightarrow$只要 $x_t\in U\cap B(0,r)$ 就有

$$|x(t)|\geqslant u^{-1}(V(x_t))\geqslant u^{-1}(V(\varphi))$$

由此得

$$V^{\cdot}_{(4.1)}(x_t)\geqslant\omega(|x(t)|)\geqslant\omega(u^{-1}(V(\varphi)))>0$$

当 $x_t\in U\cap B(0,r)$

记 $\eta=\omega(u^{-1}(V(\varphi)))$,则当 $x_t\in U\cap B(0,r)$ 时就有

$$V(x_t)\geqslant V(\varphi)+\eta(t-\sigma)$$

由条件(1)(4)$\Rightarrow x_t$ 不可能越过 $U$ 的边界 $\Gamma_U$ 而离开 $U\cap B(0,r)$. 因为 $V(\varphi)$ 在 $U\cap B(0,r)$ 上是有界的,故必有 $t_1$ 使 $x_{t_1}$ 属于 $B(0,r)$ 的边界,定理后一结论得证. 另一方面,由(2),空间 $C$ 的原点($\varphi\equiv 0$)的任一邻域存在 $\varphi\in U\cap B(0,r)\Rightarrow$(4.1)零解不稳定.

**例 9** 仍考虑方程

$$\dot{x}(t)=-(ax(t)+bx(t-r)),r>0$$

但与例 7 不同,现在设 $a+b<0$. 对某一 $r_0(a,b)$,当 $r<r_0(a,b)$ 时,

要用$V$泛函来证明(4.8)的零解是不稳定的：

设$F$是一个给定的的连续可微函数，我们选取$V$泛函为

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)-\frac{1}{2}\int_{-r}^{0}F(-\tau)[x(t+\tau)-x(t)]^2d\tau \quad (4.12)$$

于是有

$$V(x_t)=\frac{x^2(t)}{2}-\frac{1}{2}\int_{t-r}^{t}F(t-u)[x(u)-x(t)]^2du \quad (4.13)$$

由(4.8)的$V^{\bullet}$写成

$$V^{\bullet}_{(4.8)}(x_t)=\dot{V}(x_t)=-(a+b)x^2(t)-b(x(t-r)-x(t))x(t)$$
$$+\frac{1}{2}F(r)[x(t-r)-x(t)]^2$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t-r}^{t}F(t-u)[x(u)-x(t)]^2du$$
$$+\int_{t-r}^{t}F(t-u)[x(u)-x(t)][-(a+b)x(t)-b\{x(t-r)-x(t)\}]du$$

若$V$完全写成$t-r$到$t$的积分，则当不等式

$$\triangle_1 \triangleq a+b<0.$$

$$\triangle_2 \triangleq -\frac{a+b}{2}F(r)-\frac{b^2}{4}>0.$$

$$\triangle_3 \triangleq \frac{\triangle_2}{r^2}\left(-\frac{1}{2}F(\theta)\right)-\frac{(a+b)^2}{8r}F^2(\theta)F(r)>0.\ \theta\in[0,r]$$

都成立时，积分是$x(t)$，$[x(t-r)-x(t)]$，$[x(u)-x(t)]$的正定二次型⇒若$a+b<0$，则我们可以确定一个$r_0(a,b)$及连续可微的正定函数$F(\theta)$. $0\leqslant\theta\leqslant r_0(a,b)$使得这些不等式都成立⇒存在一个正常数$q$使得

$$V^{\bullet}_{(4.8)}(\varphi)\geqslant qr\varphi^2(0),\ V(\varphi)\leqslant\frac{\varphi^2(0)}{2}$$

对一切$\varphi\in C$成立. 若记

$$U=\{\varphi\in C:\varphi^2(0)>\int_{-r}^{0}F(-\theta)[\varphi(\theta)-\varphi(0)]^2d\theta\}$$

则$U$满足定理4.2的假定(1)(2)，因之，若$\triangle_1<0$. $r<r_0(a,b)$

则方程(4.8)的零解是不稳定的.

**注**4.1　若$a$,$b$为$t$的函数,连续且有界,当$t\in R$时恒成立$a(t)+b(t)<\delta<0$,则相应结论仍成立.

**例**10　考虑方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x^3(t)+b(t)x^3(t-r) \tag{4.14}$$

其中$a(t)$,$b(t)$是任意给定的连续有界函数,并且$a(t)\geqslant\delta>0$,$|b(t)|<q\delta$,$0<q<1$,我们取泛函

$$V(\varphi)=\frac{\varphi^4(0)}{4}-\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\varphi^6(\theta)d\theta \tag{4.15}$$

显然,由$V(\varphi)$的取法有

$$V(\varphi)\leqslant\varphi^4(0)/4$$

$V$关于(4.4)的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4.14)}(\varphi)&=\dot{V}(\varphi)\\&=\left[a(t)-\frac{\delta}{2}\right]\varphi^6(0)+b(t)\varphi^3(0)\varphi^3(-r)+\frac{\delta}{2}\varphi^6(-r)\end{aligned} \tag{4.16}$$

注意到(4.16)是$\varphi^3(0)$,$\varphi^3(-r)$的正定二次型,若令

$$V=\{\varphi\in C:\frac{\varphi^4(0)}{4}>\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\varphi^6(\theta)d\theta\}$$

则和例9类似推理知(4.14)零解是不稳定的.

若$a(t)\leqslant-\delta<0$,$|b(t)|<q\delta$,取$V$泛函为

$$V(\varphi)=\frac{\varphi^4(0)}{4}+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\varphi^6(\theta)d\theta$$

则由定理4.1⇒(4.14)零解一致渐近稳定的.

**注**4.2　对方程

$$\dot{x}(t)=ax^3(t)+b(t)x^3(t-r) \tag{4.17}$$

也可以用泛函(4.15).可以证明当$|b(t)|$在$R$中是有界时(4.17)的零解是稳定的或者不稳定的,仅由$a<0$或$a>0$确定.

下面再给出一些用$V$泛函判断FDE稳定性的准则.但不再

详细证明而是给出文献(此外还相应给出例子).

**定理 4.3** 设 $u,v,w\in K$,若存在 $V(t,\varphi)$ 满足

(1)对 $\forall\ t\geqslant 0,\varphi\in C$ 有

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

(2)对 $\forall\ \sigma\geqslant 0,\varphi\in C,\exists\ r_0\in(0,r],\lambda\geqslant 1$ 使得当 $t\in[\sigma,\sigma+r_0)$ 且当

$$V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant\lambda v(|\varphi|)$$

$$V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(\sigma,\varphi)),\sigma\leqslant\xi\leqslant t$$

$$V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(\sigma,\varphi)),\sigma\leqslant\xi\leqslant t,t\geqslant\sigma+r_0$$

时有

$$\dot V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant G(t,V(t,x(\sigma,\varphi)))\tag{4.18}$$

其中 $G:R_+\times R_+\to R_+$ 连续 $G(t,0)=0$.

(3)方程

$$\dot y(t)=G(t,y(t))\tag{4.19}$$

的零解是一致稳定的.

则方程(4.1)的零解一致稳定[11].

作为定理 4.3 的推论有

**定理 4.4** 若定理 4.3 中条件(1)满足,条件(2)中式(4.18)改为下式.略去条件(3)

$$\dot V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant h(t)H(V(t,x_t(\sigma,\varphi)))\tag{4.20}$$

则(4.1)的零解是一致稳定的.

(4.20)中函数 $h,H\in K$,并满足

$$\int^\infty h(t)dt<\infty,\int_0^a\frac{dV}{H(V)}=\infty,(a>0)$$

所以定理 4.4 结论成立,相当于可以证 $\dot y(t)=h(t)H(y(t))$ 的零解是一致稳定的,这一点留作练习.

**定理 4.5** 设 $u,v\in K$,且存在 $V(t,\varphi)$ 满足

(1)对 $\forall\ t\geqslant 0,\varphi\in C$ 有

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

(2)对$\forall\ \sigma\geqslant 0,\varphi\in C$有

$$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant 0,t\geqslant\sigma$$

则(4.1)的零解是一致稳定的.

类似的判断准则有大量的、各式各样的改进工作.整体推进状况湖南大学有一份很完整的综合介绍.我们要说明两点:

Ⅰ.$V$泛函的存在性问题由H.H.Красовский有效地解决了.也正是因为他要解决$V$泛函的存在性而引入了空间$C$中的解映射概念.

Ⅱ.在$V$泛函求导数时用FDE的解代入.先从理论上给出使用$V$泛函的设想与可能性.毫无疑问我们的最终目的是对给定的FDE,以种种样式去具体构造出$V$泛函,使之既满足各种判断准则的要求又能直接应用FDE自身的构造.遗憾的是,$V$泛函的普遍构造方法还没有找到,虽然我们知道它是存在的.

为了使读者对建立$V$泛函有更多的直观认识,我们再举一些例子.

**例11** 设$a,b$为正数,再考察一阶方程

$$\dot{x}(t)=-ax(t)+bx(t-r) \tag{4.21}$$

其中$a>b,r=\text{const.}>0$.取$V$泛函为

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+\mu\int_{-r}^{0}\varphi^2(\theta)d\theta$$

其中$\mu$待定,于是有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4.21)}(x_t)&=x(t)\dot{x}(t)+\mu x^2(t)-\mu x^2(t-r)\\&=-(a-\mu)x^2(t)+bx(t)x(t-r)-\mu x^2(t-r)\\&=-(a-\mu)\left[x(t)-\frac{b}{2(a-\mu)}x(t-r)\right]^2\\&\quad+\frac{b^2-4\mu(a-\mu)}{4(a-\mu)}x^2(t-r)\end{aligned}$$

显然当取 $\mu=\dfrac{a}{2}$ 时有

$$V_{(4.21)}(x_t)=-\frac{a}{2}[x(t)-\frac{b}{2(a-\mu)}x^2(t-r)]^2$$
$$+\frac{b^2-a^2}{2a}x^2(t-r)\leqslant 0$$

$\Rightarrow$ 定理 4.5(2)成立. 再取 $u(s)=\dfrac{s^2}{2}$, $v(s)=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{ar}{2})s^2$, 则 $u,s\in K$, 定理 4.5(1)也成立$\Rightarrow$(4.21)零解是一致稳定的.

这个例子中我们索性把 $\varphi(0)$ 用 $x(t)$ 代入, $\varphi(-r)$ 用 $x(t-r)$ 代入. 而且引用的判断准则——定理也不同于前述的诸例.

**例 12** 考察纯量方程

$$\dot{x}(t)=-ax^3(t)+bx^3(t-1)+\frac{g(x(t))}{1+t^2}[-\frac{1}{4}x^4(t)$$
$$-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta+\frac{1}{2}x^4(t-\frac{1}{2})$$
$$+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta] \tag{4.22}$$

其中 $a$, $b$ 为正常数, $a>b$, $g(x)$是连续函数, 当 $x\neq 0$ 时, $xg(x)>0$, $g(0)=0$. 又存在 $M>0$, 使 $x^3g(x)<M$.

对(4.22)取 $V$ 泛函为

$$V(\varphi)=\frac{1}{4}\varphi^4(0)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}\varphi^6(\theta)d\theta$$

再取 $k$ 类函数

$$u(s)=\frac{1}{4}s^4,\qquad v(s)=\frac{1}{4}s^4+\frac{a}{2}s^6,$$
$$h(t)=\frac{1}{1+t^2}, H(V)=MV.$$

沿方程(4.22)的解的导数为

$$\dot{V}_{(4.22)}(x_t)=x^3(t)\dot{x}(t)+\frac{a}{2}x^6(t)-\frac{a}{2}x^6(t-1)$$

$$=-\frac{a}{2}x^6(t)+bx^3(t)x^3(t-1)-\frac{a}{2}x^6(t-1)+\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}$$

$$\cdot[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2}x^4(t-\frac{1}{2})+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta]$$

由于二次型$-\frac{a}{2}x^6(t)+bx^3(t)x^3(t-1)-\frac{a}{2}x^6(t-1)$是负定的，于是

$$\dot{V}_{(4.22)}(x_t)\leqslant\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$$

$$+\frac{1}{2}x^4(t-\frac{1}{2})+a\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta]$$

现在取 $r_0=\frac{1}{2}$，$\lambda=2$，当 $t\in[\sigma,\sigma+\frac{1}{2})$时，有

$$x^4(t-\frac{1}{2})\leqslant|\varphi|^4,\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta\leqslant\frac{1}{2}|\varphi|^6$$

其中 $\sigma$ 为初始时刻，$\varphi$ 为初始函数，若 $V(x_t)\geqslant\lambda v(|\varphi|)$成立，这就是

$$\frac{1}{4}x^4(t)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta\geqslant\frac{1}{2}|\varphi|^4+a|\varphi|^6$$

因此有

$$\dot{V}_{(4.22)}(x_t)\leqslant\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}[-\frac{1}{2}|\varphi|^4-a|\varphi|^6+\frac{1}{2}|\varphi|^4$$

$$+\frac{a}{2}|\varphi|^6]\leqslant 0$$

可见满足定理 4.4 的条件(2)中的第一部分.

当 $t\geqslant\sigma+\frac{1}{2}$时，若 $V(x_t)\geqslant V(x_\xi)$，$\sigma\leqslant\xi\leqslant t$，则取 $\xi=t-\frac{1}{2}$便得

到

$$\frac{1}{4}x^4(t)+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$$

$$\geqslant\frac{1}{4}x^4(t-\frac{1}{2})+\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta$$

$$\geqslant\frac{1}{4}x^4(t-\frac{1}{2})+\frac{a}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x^6(t-\frac{1}{2}+\theta)d\theta$$

于是有 $V_{(4.22)}(x_t)\leqslant\frac{x^3(t)g(x(t))}{1+t^2}[-\frac{1}{4}x^4(t)-\frac{a}{2}\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta$
$+\frac{1}{2}x^4(t)+a\int_{-1}^{0}x^6(t+\theta)d\theta]\leqslant\frac{M}{1+t^2}V(x_t)$

⇒满足定理 4.4 条件(2)中的第二部分. 而条件(1)是显然成立的
⇒(4.22)零解是一致稳定的.

## §5 Разумихин 型定理

本世纪五十年代刚刚开始研究 FDE 稳定性理论时,很自然地把常微分方程的现成方法之一——Ляпунов 函数法拿来试探一下,结果发现只对极为少量的 FDE 有效,这种结果曾经令所有学者大失所望. 六十年代 Разумихин 在没有增加对 FDE 限制的前提下,指出了称之为"Разумихин 条件"的附加说明,使得运用常微分方程的 Ляпунов 函数法来研究 FDE 有了长足的进展. 但是这种 $V$ 函数的存在性始终无法证明,实际上,到现在为止还没有人给出证明. 尽管如此,对许多常见的 FDE 建立 Разумихин 条件下的 $V$ 函数是可能的,有效的.

上述历史发展过程可以用一系列例子予以说明(考虑简单的 DDE,目的为说清问题).

### 1. Ляпунов 稳定性定理的形式推广

对非线性 RDDE,$x\in R^n$,$f\in R^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \cdots\cdots, x(t-\tau_m(t))) \tag{5.1}$$

相应的常微分方程的李雅普诺夫第二方法的一系列定理，可以不加变动地进行推广.

**定理** 5.1　对(5.1)，若存在正定函数 $V(t, x_1\cdots\cdots, x_n)$（或简记为 $V(t,x)$）它关于(5.1)的全导数仍定义为

$$\dot{V}_{(5.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x(t)), x(t-\tau_1(t)), \cdots\cdots, x(t-\tau_m(t))) \tag{5.2}$$

是常负的⇒(5.1)的零解是稳定的.

若 $\dot{V}_{(5.1)}$是负定的. 则零解是渐近稳定的.

可以类似地再引入 Четаев 不稳定定理及其他常微分方程稳定性的有关定理.

这种做法只是形式上的推广，对一般的 FDE 的效果并不好. 如

**例** 13　对方程

$$\dot{x}(t) = -x(t)x^2(t-\tau) \tag{5.3}$$

取 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$，则

$$\dot{V}_{(5.3)}(x) = -x^2(t)x^2(t-\tau) \leqslant 0$$

⇒(5.3)的零解是稳定的.

**例** 14　方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t) \tag{5.4}$$

取 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$，则有

$$\dot{V}_{(5.4)}(x) = ax^2(t) + bx(t)x(t-\tau) \tag{5.5}$$

(5.5)的右边第二项的正负号是很难判断的，即使 $a<0, b<0$ 也无法肯定 $\dot{V}_{(5.4)}$是否满足稳定性定理条件 $\leqslant 0$ 或 $<0$.

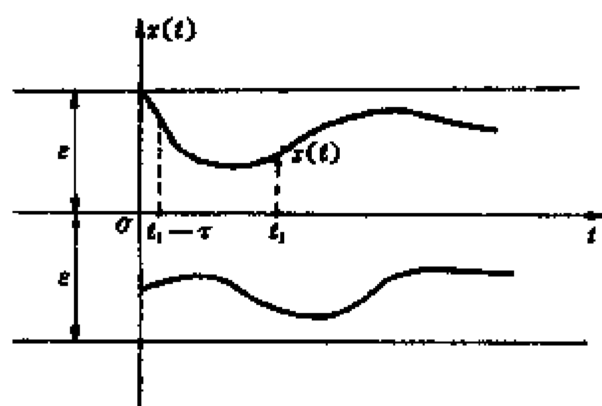



图 7.3

只要细心分析一下便会发现，按常微分方程给出的定理 5.1 去要求 DDE 或 FDE 是过分苛刻的，因为 $V$ 是沿着解来判断正负号的，所以如图 7.3 所示，只要求 $|x(t)|>|x(t-\tau)|$ 时 $\dot{V}\leqslant 0$（或 $\dot{V}<0$）即可，因为在某一时刻 $t_1$（例如 $x(t)\geqslant 0$），若 $|x(t)|<|x(t-\tau)|$，则 $x(t)$ 之后继值在适当小的邻域内允许上升而不必要 $\dot{V}\leqslant 0$ 或 $\dot{V}<0$. 这并没有对方程自身增加限制关系.

$$\text{当 } |x(t-\tau)|<|x(t)| \text{ 时 } \dot{V}\leqslant 0\text{（或}<0\text{）} \tag{5.6}$$

叫做 Разумихин 条件. (5.6)可以推广为：设 $P\in K$

$$\text{当 } P(|x(t-\tau)|)<P(|x(t)|)\text{ 时 } \dot{V}\leqslant 0\text{（或}<0\text{）} \tag{5.7}$$

或者对 Ляпунов 函数 $V(t,x)$ 成立

当 $V(\xi,x(\xi))<V(t,x(t))$　$\xi\in[t-\tau,t]$ 时 $\dot{V}\leqslant 0$（或 $\dot{V}<0$）

在这个条件下，我们重新考察例 14 中(5.5)式的右边第二项. 应用条件(5.6)，对(5.5)有

$$\dot{V}_{(5.4)}\leqslant -ax^2(t)+|b|x^2(t)=(|b|-a)x^2(t).$$

当 $|b|-a\leqslant 0$ 时 $\dot{V}\leqslant 0\Rightarrow$(5.4)零解是稳定的.

## 2. Разумихин 型定理

所谓 Разумихин 型定理，是指用通常的李雅普诺夫函数 $V(t, x): R\times R^n\to R$. 加上 Разумихин 条件以得到与常微分方程平行的种种稳定性与不稳定性准则. 为统一起见，设 $V$ 沿方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{5.8}$$

导数定义为

$$\dot{V}(t, \varphi(0)) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}[V(t+h, x(t,\varphi)(t+h)) - V(t, \varphi(0))] \tag{5.9}$$

其中 $x(t,\varphi)(t)$ 为 RFDE($f$)(5.8)过$(t,\varphi)$的解(用解代入).

**定理** 5.1 设(5.8)中 $f: R\times C\to R^n$ 把 $R\times$($C$ 中有界集)映入 $R^n$ 中的有界集. $u, v\in K$, $w: R_+\to R_+$ 连续，若存在一个连续函数 $V$ 使得 $t\in R, x\in R^n$ 时有

$$u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|) \tag{5.10}$$

$$\dot{V}(t,\varphi(0))\leqslant -w(|\varphi(0)|) \tag{5.11}$$

(5.11)当 $V(t+\theta,\varphi(\theta))\leqslant V(t,\varphi(0))$, $\theta\in[-r,0]$时成立，则(5.8)的零解是一致稳定的.

**证** 可用类似于常微分方程相应定理的证明方法，也可以用下述方法证之：对 $t\in R, \varphi\in C$ 定义

$$\overline{V}(t,\varphi) = \sup_{\theta\in[-r,0]} V(t+\theta, \varphi(\theta)) \tag{5.12}$$

则存在 $\theta_0\in[-r,0]$使得

$$\overline{V}(t,\varphi) = V(t+\theta_0, \varphi(\theta_0))$$

其中或者 $\theta_0=0$ 或者 $\theta_0<0$.

当 $\theta_0<0$ 时，有 $V(t+\theta,\varphi(\theta))<V(t+\theta_0,\varphi(\theta_0))\quad \theta\in[\theta_0,0]$ 故对充分小的 $h>0$ 成立

$$\overline{V}(t+h, x_{t+h}(t,\varphi)) = \overline{V}(t,\varphi)$$

$\Rightarrow \dot{V}=0$,当 $\theta_0=0$ 时,由条件(5.11)$\Rightarrow \dot{V}\leqslant 0$

此外,对 $t\in R,\varphi\in C$,(5.10)成立,即

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant \bar{V}(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

由上一节定理 4.1$\Rightarrow$(5.8)的零解一致稳定.

**定理5.2** 设定理5.1的条件全部满足,且设当$s>0$时,$w(s)>0$. 若$\exists$ 一个连续非减函数 $p(s)>s(s>0)$,使得(5.11)加强为

$$V(t,\varphi(0))\leqslant -w(|\varphi(0)|) \tag{5.13}$$

当 $V(t+\theta,\varphi(\theta))<P(V(t,\varphi(0)))$, $\theta\in[-r,0]$时.

则(5.8)的零解是一致渐近稳定的.

若 $s\to\infty$时,$u(s)\to\infty$,则零解是全局吸引的.

**证** 由定理 5.1$\Rightarrow$零解一致稳定.

设 $\delta>0$, $H>0$ 满足 $v(\delta)=u(H)$. 事实上,由 $v(0)=0$,有 $0<u(s)\leqslant v(s)$, $s>0$. 取定 $H$,再确定 $\delta$ 使 $v(\delta)=u(H)$是可行的. 若当$s\to\infty$时,$u(s)\to\infty$,则对任意的 $\delta$ 可确定 $H$ 使 $v(\delta)=u(H)$. 由此及以下的论证可以说明(5.8)零解的一致渐近稳定性并且是全局吸引的. 记初始时刻为 $\sigma$.

设 $v(\delta)=u(H)$,由定理 5.1 的论证$\Rightarrow$若$|\varphi|\leqslant\delta$,则

$$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant H, V(t,x(\sigma,\varphi)(t))<v(\delta)$$

对$\forall$ $t\geqslant\sigma-r$ 成立. 设 $0<\eta\leqslant H$ 为任一给定的数,我们要证明存在 $T=T(\eta,\delta)$使得对$\forall$ $\sigma\geqslant 0$, $|\varphi|\leqslant\delta$,(5.8)的解 $x(\sigma,\varphi)(t)$当 $t\geqslant\sigma+T+r$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant\eta$$

若我们能证明当 $t\geqslant\sigma+T$ 时 $V(t,x(\sigma,\varphi)(t))\leqslant u(\eta)$,则上述结论得证. 为方便起见记 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$.

由 $P(s)$的性质,$\exists$ $a>0$ 使得对 $u(\eta)\leqslant s\leqslant v(\delta)$,成立 $P(s)-s>a$. 记 $N$ 为满足 $u(\eta)+Na\geqslant v(\delta)$的最小正整数,并且记

$$r = \inf_{V^{-1}(u(\eta)) \leqslant s \leqslant H} w(s), T = Nv(\delta)/r$$

我们指出对$\forall\ t \geqslant \sigma + T, V(t, x(t)) \leqslant u(\eta)$. 首先，对 $t \geqslant \sigma + (v(\delta))/r$ 有

$$V(t, x(t)) \leqslant u(\eta) + (N-1)a$$

若 $\sigma \leqslant t \leqslant \sigma + (v(\delta)/r)$，则 $u(\eta) + (N-1)a < V(t, x(t))$，因为对$\forall\ t \geqslant \sigma - r$ 有 $V(t, x(t)) \leqslant v(\delta)$，从而

$$P(V(t, x(t))) > V(t, x(t)) + a \geqslant u(\eta) + Na$$
$$\geqslant v(\delta) \geqslant V(t+\theta, x(t+\theta))$$

$\sigma \leqslant t \leqslant \sigma + v(\delta)/r, \theta \in [-r, 0]$

由条件(5.13)得

$$V(t, x(t)) \leqslant -w(|x(t)|) \leqslant -r,$$

$\sigma \leqslant t \leqslant \sigma + (v(\delta)/r)$.

因此有

$$V(t, x(t)) \leqslant V(\sigma, x(\sigma)) - r(t-\sigma)$$
$$\leqslant v(\delta) - r(t-\sigma), \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + v(\delta)/r.$$

由 $V$ 的正定性，(5.10)意味着 $t = t_1 = \sigma + v(\delta)/r$ 时，有

$$V(t, x(t)) \leqslant u(\eta) + (N-1)a$$

但由条件(5.13)$\Rightarrow$当 $V(t, x(t)) = u(\eta) + (N-1)a$ 时，$\dot{V}(t, x(t))$ 为负$\Rightarrow$对$\forall\ t \geqslant \sigma + (v(\delta/)r)$有

$$V(t, x(t)) \leqslant u(\eta) + (N-1)a$$

今设 $T_j = jv(\delta)/r$. $j = 1, 2 \cdots\cdots, N$. $T_0 = 0$. 并设对某一整数 $k \geqslant 1$. 在区间 $T_{k-1} \leqslant t - \sigma \leqslant T_k$ 上有

$$u(\eta) + (N-k)a \leqslant V(t, x(t)) \leqslant u(\eta) + (N-k+1)a$$

同理我们有

$$V(t, x(t)) \leqslant -r, T_{k-1} \leqslant t - \sigma \leqslant T_k.$$

以及当 $t - \sigma - T_{k-1} \geqslant v(\delta)/r$ 时有

$$V(t,x(t)) \leqslant V(\sigma+T_{k-1},x(\sigma+T_{k-1}))-r(t-\sigma-T_{k-1})$$
$$\leqslant v(\delta)-r(t-\sigma-T_{k-1}) \leqslant 0$$

因此有

$$V(\sigma+T_k,x(\sigma+T_k)) \leqslant u(\eta)+(N-k)a$$

最后得到当 $t \geqslant \sigma+T_k$ 时，有

$$V(t,x(t)) \leqslant u(\eta)+(N-1)a$$

用归纳法有 $V(t,x(t)) \leqslant u(\eta)$ 对 $\forall\ t \geqslant \sigma+Nv(\delta)/r$ 成立．定理证毕.

**例 15** 对方程

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)-b(t)x(t-r_0(t)) \tag{5.14}$$

其中 $x \in R$. $a,b,r_0$ 都是 $R$ 中有界连续函数，且

$$|b(t)| \leqslant a(t),0 \leqslant r_0(t) \leqslant r,t \in R.$$

取 $V$ 函数为 $V(x)=x^2/2$，则当 $|x(t)| \geqslant |x(t-r_0(t))|$ 时有 $V$ 的估计

$$\dot{V}_{(5.14)}(x(t))=-a(t)x^2(t)-b(t)x(t-r_0(t))$$
$$\leqslant -a(t)x^2(t)+|b(t)||x(t)||x(t-r_0(t))|$$
$$\leqslant -[a(t)-|b(t)|]x^2(t) \leqslant 0$$

而 $V(x)=x^2/2 \Rightarrow V(x(t)) \geqslant V(x(t-r_0(t)))$ 时，$\dot{V}(x(t)) \leqslant 0$，由定理 5.1⇒(5.4)的零解是一致渐近稳定的.

此外，若 $a(t) \geqslant \delta>0$，且存在 $k \in [0,1)$，使得 $|b(t)| \leqslant k\delta$，则(5.14)的零解也是一致渐近稳定的.

事实上，对某常数 $q>1$，设 $V(x)=x^2/2$，则当 $p(V(x(t)))>V(x(t-r_0(t)))$ 时有

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -(1-qk)\delta x^2(t)$$

因为 $k<1 \Rightarrow \exists\ q>1$ 使 $1-qk>0$. 由定理 5.2⇒(5.14)零解是一致渐近稳定的.

这个结果可推广到多滞量的情形，对方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - \sum_{j=1}^{n} b_j(t)x(t - r_j(t)) \qquad (5.15)$$

仍取 $V$ 函数为 $x^2/2$，类似地可以证明(5.15)零解是一致渐近稳定的. 其中 $a, b_j, r_j$ 是有界连续函数，并且要求对 $\forall\ t \in R$ 成立

$$a(t) \geqslant \delta > 0, \sum_{j=1}^{n} |b_j(t)| < k\delta,$$

$$0 < k < 1, 0 \leqslant r_j \leqslant r.$$

**例** 16　考虑一阶非线性方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - r(t)))$$

$$f(t,0) = 0, 0 \leqslant r(t) \leqslant r \qquad (5.16)$$

其中 $x \in R$, $r(t)$ 是 $t$ 的连续函数, $f(t,x): R_+ \times R \to R$ 连续，关于 $x$ 有连续偏导数且

$$|\partial f(t,x)/\partial x| < L, t \in R_+, x \in R$$

对 $t \geqslant 2r$，我们可以把方程(5.16)写成

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)) - [f(t,x(t)) - f(t,x(t - r(t)))]$$

$$= f(t,x(t)) - \int_{t-r(t)}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(\theta))f(\theta,x(\theta - r(\theta)))d\theta$$

对 $V(\varphi) = \varphi^2(0)$，即 $V = x^2$，我们有

$$\dot{V}(x_t) = 2x(t)f(t,x(t))$$

$$- 2\int_{t-r(t)}^{t} x(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(\theta))f(\theta,x(\theta - r(\theta)))d\theta$$

$$\leqslant 2x(t)f(t,x(t)) + 2L^2\int_{t-r(t)}^{t} |x(t)x(\theta - r(\theta))|d\theta$$

$$\leqslant 2x(t)f(t,x(t)) + 2L^2 r(t)|x(t)||x_{t-r(t)}|, t \geqslant 2r.$$

若 $q > 1$ 是固定的数，考虑所有满足

$$x^2(t - \xi) \leqslant q^2 x^2(t), 0 \leqslant \xi \leqslant 2r$$

的 $x(t)$ 的集合，若

$$(f(t,x)/x) + L^2 r(t)q < -\mu < 0.$$

则有

$$V_{(5.16)}(x_t)\leqslant 2\left[\frac{f(t,x(t))}{x(t)}+L^2 r(t)q\right]x^2(t)<-2\mu x^2(t)$$

对 $\mu>0,t\in R_+,x\in R$ 及 $p(s)=q^2 s$，由定理 5.2⇒(5.16)零解是一致渐近稳定的，并且是全局吸引的.

拉兹密辛型定理近年来有一系列推广，我国的工作也不少，这里只作举例性的介绍，参看[11].

**定理 5.3** 设对方程(5.8)存在 $V(t,x)$ 及 $u,v\in K$ 满足下列条件

(1) $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|),t\in R_+,x\in R^n$

(2)对 $\forall\ \varphi\in C$，若 $P(V(t,\varphi(0)))>V(t+\theta,\varphi(\theta))$ 当 $\theta\in[-r,0]$ 时成立，则

$$V_{(5.8)}(t,\varphi(0))\leqslant -F(t,|\varphi(0)|)+g(t)G(V(t,\varphi(0))).$$

其中 $p,g,G:R_+\to R_+$，当 $s>0$ 时 $p(s)>s,G(s)>0,G(0)=0$.

又 $\int_0^\infty g(t)dt<\infty$，对 $a>b>0$ 有

$$\lim_{b\to 0^+}\int_b^a\frac{ds}{G(s)}=\infty$$

又 $F: R_+\times R_+\to R_+$ 是连续的，当 $|\varphi(0)|\geqslant\delta>0$ 时成立 $F(t,|\varphi(0)|)\geqslant\psi(t,\delta)>0$. $\psi(t,\delta)$ 是连续函数. 且对 $H>0,\delta>0$. $\exists\ \hat{T}=\hat{T}(H,\delta)>0$ 使得对 $\forall\ T>0$ 均有

$$\int_T^{T+\hat{T}}\psi(t,\delta)dt\geqslant 2v(H)$$

则(5.8)的零解是一致渐近稳定的.

**证** 先证一致稳定性，因为

$$V(t,x(t))\geqslant V(\xi,x(\xi))\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t$$

$$\Rightarrow P(V(t,x(t)))>V(\xi,x(\xi))\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t$$

由(2)及上式得出

$$V(t,x(t))\leqslant g(t)G(V(t,x(t)))$$

满足上一节定理 4.4 条件⇒零解一致稳定.

再证一致吸引：

取定 $H>0$，由一致稳定性 $\Rightarrow \exists\ \delta>0$，使得当初始函数 $\varphi$ 满足 $|\varphi|\leqslant\delta$ 时便有 $|x(t)|=|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant H$

任意给定 $\varepsilon>0,\varepsilon<H$，记 $M=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant v(H)}G(s)$，取 $a$ 满足

$$0<a<\inf_{u(\varepsilon)/2\leqslant s\leqslant v(H)}[p(s)-s],a<\frac{u(\varepsilon)}{2}$$

设正整数 $N$ 满足

$$u(\varepsilon)/2+(N-1)a<v(H)\leqslant u(\varepsilon)/2+Na$$

由于 $\int^{\infty}g(t)dt<\infty\Rightarrow$ 存在 $T=\sigma+\beta r.\ \beta=\text{const.}\geqslant 1$，使得当 $t\geqslant T$ 时有 $\int_T^t g(s)ds\leqslant\lambda,\lambda=\min(v(H),\frac{a}{2})$.

现在证：$\exists\ T_1>T$ 使

$$V(T_1,x(T_1))<u(\varepsilon)/2+(N-1)a \tag{5.17}$$

若不然，则对 $\forall\ t>T$ 有

$$V(t,x(t))\geqslant u(\varepsilon)/2+(N-1)a\geqslant u(\varepsilon)/2$$

由条件(1)$\Rightarrow v(|x(t)|)\geqslant u(\varepsilon)/2$，因为 $v$ 为非减函数 $\Rightarrow\exists$ 常数 $\delta>0$ 使得 $|x(t)|\geqslant\delta$，再由对 $F$ 的假定，有 $F(t,|x(t)|)\geqslant\psi(t,\sigma)$.

又由上述有

$$\begin{aligned}P(V(t,x(t)))&>V(t,x(t))+a\geqslant u(\varepsilon)/2+(N-1)a+a\\&=u(\varepsilon)/2+Na\geqslant v(H)\geqslant V(\xi,x(\xi)).\\&\quad t-r\leqslant\xi\leqslant t\end{aligned}$$

再由条件(2)有

$$\begin{aligned}V(T+\hat{T},x(T+\hat{T}))&\leqslant V(T,x(T))\\&\quad-\int_T^{T+\hat{T}}\psi(t,\delta)dt+M\int_T^{T+\hat{T}}g(t)dt\\&\leqslant v(H)-\int_T^{T+\hat{T}}\psi(t,\delta)dt+\lambda\\&\leqslant 2v(H)-\int_T^{T+T}\psi(t,\delta)dt<0\end{aligned}$$

这与$V>0$矛盾⇒(5.17)成立，其中$T_1$可取为$T+\hat{T}$.

下面证明当$t\geqslant T_1$时有

$$V(t,x(t))<u(\varepsilon)/2+(N-1)a+\frac{a}{2} \tag{5.18}$$

若不然，必存在$t_2>t_1>T_1$使得

$$V(t_1,x(t_1))=u(\varepsilon)/2+(N-1)a \tag{5.19}$$

$$V(t_2,x(t_2))=u(\varepsilon)/2+(N-1)a+\frac{a}{2} \tag{5.20}$$

且有

$$V(t_1,x(t_1))\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(t_2,x(t_2)),t_1\leqslant t\leqslant t_2 \tag{5.21}$$

由(5.18)(5.21)推出

$$\begin{aligned}&P(V(t,x(t)))>V(t,x(t))+a\geqslant V(t_1,x(t_1))+a\\&=\frac{u(\varepsilon)}{2}+(N-1)a+a=\frac{u(\varepsilon)}{2}+Na\\&\geqslant v(H)\geqslant V(\xi,x(\xi)),\\&t-r\leqslant\xi\leqslant t,t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{aligned}$$

再由条件(2)得

$$V(t_2,x(t_2))\leqslant V(t_1,x(t_1))+M\int_{t_1}^{t_2}g(t)dt<u(\varepsilon)+(N-1)a+\lambda$$

这与(5.20)矛盾⇒(5.18)成立.

现在用$T_1$代替$T$，沿用上述论证方法⇒存在$T_2=T_1+\hat{T}$使得$t\geqslant T_2$时有

$$V(t,x(t))<\frac{u(\varepsilon)}{2}+(N-1)a$$

同样又∃ $T_3=T_2+\hat{T}$，使得当$t\geqslant T_3$时有

$$V(t,x(t))<\frac{u(\varepsilon)}{2}+(N-2)a+\frac{a}{2}$$

继续做下去⇒存在$T_{2N}=T_{2N-1}+\hat{T}$，使得当$t\geqslant T_{2N}$时有

$$V(t,x(t))<\frac{u(\varepsilon)}{2}+a<u(\varepsilon)$$

由条件(1)即得$|x(t)|<\varepsilon(t\geqslant T_{2N})$.

由于$T_{2N}=T+2N\hat{T}=\sigma+\beta r+2N(\hat{T}+r)$且$\beta r+2N\hat{T}$与$\sigma$无关$\Rightarrow$方程(5.8)的零解是一致渐近稳定的.

**推论 5.1** 若$F(t,s)=\psi(t)W(s)$,其中$\psi:R_+\to R_+$是连续的,对任给的$\beta>0$,$\exists\ \hat{T}=\hat{T}(\beta)$使得对任一$T>0$都有$\int_T^{T+\hat{T}}\psi(s)ds\geqslant\beta$,$W:R_+\to R_+$连续非减,当$s>0$时$W(s)>0$.定理的其他条件不变$\Rightarrow$(5.8)零解是一致渐近稳定的.

**推论 5.2** 设$F:R_+\times R_+\times R_+\to R$,$N$,$\psi$,$W:R_+\to R_+$皆为连续函数,如果满足下列条件:

(1)定理5.3的条件(1)成立.

(2)当$V(t+\theta,\varphi(\theta))\leqslant N(t)$,$-r\leqslant\theta\leqslant 0$时有

$$\dot{V}(t,\varphi(0))\leqslant F(t,V(t,\varphi(0)),N(t))$$

(3)当$V>0$时,$F(t,V,V)\leqslant-\psi(t)W(V)$,这里函数$\psi(t)$和$W(V)$如推论5.1所限定.

(4)当$N_i\geqslant a>0$,$i=1,2$时有

$$|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant\psi(t)k(a)|N_1-N_2|$$

其中$k(a)>0$,则方程的零解是一致渐近稳定的.

**推论 5.3** 若定理5.3中关于$\psi(t,\delta)$的条件改为:

$\int_\sigma^\infty\psi(t,\delta)dt=\infty$,其他条件保持.或者把推论5.1、推论5.2中关于$\psi(t)$的条件改为$\int^\infty\psi(t)dt=\infty$.其他条件保持,则方程(5.8)的零解是渐近稳定的.

三个推论的证明均与定理类似,从略.

**例 17** 设$x\in R$.考虑纯量方程

$$\dot{x}(t)=-ax(t)+b(t)x(t-r(t))+f(t,x_t) \qquad (5.22)$$

其中$f:R\times C_H\to R$连续,$f(t,0)=0$,$0\leqslant r(t)\leqslant r$,$r(t)$连续,$b(t)$是连续函数,$a$为正常数,此外$f$还满足

$|f(t,x_t)|\leqslant\hat{\psi}(t)|x_t|,\hat{\psi}(t)\geqslant 0$ 连续．

现在取 $V(x)=x^2$，则 $V$ 沿方程(5.22)解的导数为

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x(t))|_{(5.22)}\\&=2x(t)[-ax(t)+b(t)x(t-r(t))+f(t,x_t)]\\&\leqslant -2ax^2(t)+2|x(t)|[|b(t)||x(t-r(t))|+\hat{\psi}(t)|x_t|]\end{aligned}$$

当 $V(x(t+\theta))\leqslant N(t)$，$-r\leqslant\theta\leqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))&\leqslant -2aV(x(t))+2\sqrt{V(x(t))}[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]\sqrt{N(t)}\\&\triangleq F(t,V(x(t)),N(t))\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 满足推论5.2的条件(2)．而 $F(t,V,V)=-2[a-|b(t)|-\hat{\psi}(t)]V$．令 $\psi(t)=a-|b(t)|-\hat{\psi}(t)$，若 $\psi(t)$ 满足推论 5.1 的条件，则 $F$ 满足推论 5.2 的条件(3)．

又当 $N_1,N_2\geqslant\alpha>0,0<V\leqslant H$ 时，有

$$\begin{aligned}&|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\\&\leqslant 2V^{\frac{1}{2}}[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]\frac{|N_1-N_2|}{N_1^{\frac{1}{2}}+N_2^{\frac{1}{2}}}\\&\leqslant \hat{K}(\alpha)[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]|N_1-N_2|,\ \hat{K}(\alpha)=H^{\frac{1}{2}}/\alpha^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

若 $\exists\ \delta>0$ 使 $|b(t)|+\hat{\psi}(t)\leqslant\frac{a}{1+\delta}$ 对 $\forall\ t\in R_+$ 成立，则有

$$\delta[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]\leqslant a-|b(t)|-\hat{\psi}(t)=\psi(t)$$

令 $K(\alpha)=\delta^{-1}\hat{K}(\alpha)$，便得

$$\begin{aligned}&\hat{K}(\alpha)[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]|N_1-N_2|\\&=\frac{\hat{K}(\alpha)}{\delta}\delta[|b(t)|+\hat{\psi}(t)]|N_1-N_2|\\&\leqslant K(\alpha)\psi(t)|N_1-N_2|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 推论 5.2 的条件(4)满足．而推论 5.2 条件(1)显然成立．

$\Rightarrow$(5.22)零解是一致渐近稳定的．

## §6 自治FDE的$V$泛函

考虑自治 RFDE

$$\dot{x}(t)=f(x_t) \tag{6.1}$$

其中 $f:C\to R$ 全连续，且方程(6.1)的解对初值连续依赖，过$(0,\varphi)$的解记为 $x(\varphi)$，当然，必须假定滞量是常数，我们把 LaSalle 的不变集的有关概念平移过来，使稳定的概念更为广泛.

**定义 6.1** 集 $r^+(\varphi)\triangleq\{x_t(\varphi):t\geqslant 0\}$ 称为(6.1)解在空间 $C=C([-r,0],R^n)$ 中的正半轨.

**定义 6.2** 若$\exists$ 序列$\{t_k\}$，$t_k\to\infty$(当 $n\to\infty$)时，$x_{t_k}(\varphi)\to\psi$，$\psi\in C$，则称 $\psi$ 是 $r^+(\varphi)$的一个 $\omega$ 极限点. $r^+(\varphi)$的一切 $\omega$ 极限点的集合称为 $r^+(\varphi)$的 $\omega$ 极限集，记之为 $\omega(r^+(\varphi))$.

**定义 6.3** 设 $A\subset C$，若当 $\varphi\in A$ 时对$\forall\ t\in R$ 都有 $x_t(\varphi)\in A$，则称 $A$ 为不变集.

**引理 6.1** 若(6.1)的正半轨 $r^+(\varphi)$有界，则 $r^+(\varphi)$相对紧. 且 $\omega(r^+(\varphi))$是非空紧集，连通，不变的.

泛函 $V$ 不显含 $t$，$V(\varphi)$关于(6.1)的导数简化为形式

$$\dot{V}_{(6.1)}(\varphi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(x_h(\varphi))-V(\varphi)] \tag{6.2}$$

注意此时初始时刻恒取为 0.

**定义 6.4** 对$C$ 中子集$G$，若$V:C\to R$ 在$G$ 的闭包$\overline{G}$ 上连续，并且在 $G$ 上 $\dot{V}\leqslant 0$，则称 $V$ 是$G$ 上的 $V$ 泛函.

设 $S=\{\varphi:\varphi\in\overline{G},\dot{V}(\varphi)=0\}$，$M$ 为方程(6.1)在 $S$ 中的最大不变集.

**定理 6.1**(不变性原理) 若$V$ 是$G$ 上的 $V$ 泛函，$x_t(\varphi)$是方程(6.1)的有界解并且留在 $G$ 内，则当 $t\to\infty$时

$$\lim_{t\to\infty}\inf\{|x_t(\varphi)-\varphi|:\varphi\in M\}=0 \tag{6.3}$$

式(6.3)称为 $x_t(\varphi)\to M, t\to\infty$.

**证** 由引理 6.1⇒$r^+(\varphi)$相对紧. 并且具有非空的 $\omega$ 极限集 $\omega(r^+(\varphi))$. 又因为在 $G$ 上 $\dot V\leqslant 0$, 故 $V(x_t(\varphi))$ 非增且有下界, 则当 $t\to\infty$ 时必趋于某极限 $a$, 由于 $V$ 在 $\bar G$ 上连续, 故对 $\psi\in\omega(r^+(\varphi))$ 便有 $V(\psi)=a$, 从而 $\dot V(\psi)=0$. 再由引理 6.1⇒$\omega(r^+(\varphi))$是不变的, 故 $\omega(r^+(\varphi))\subseteq M$. 因 $x_t(\varphi)\to\omega(r^+(\varphi))$, 故 $x_t(\varphi)\to M$. 证毕.

**定理 6.2** 若 $V$ 是 $U_a=\{\varphi\in C: V(\varphi)<a\}$ 上的 $V$ 泛函, 且存在常数 $k=k(a)$ 使得 $\varphi\in U_a$ 时就有 $|\varphi(0)|<k$, 则对任何 $\varphi\in U_a$, 当 $t\to\infty$ 时有 $x_t(\varphi)\to M$.

**证** 若 $\varphi\in U_a$ 且在 $U_a$ 上 $\dot V\leqslant 0$, 则当 $t\geqslant 0$ 时 $x_t(\varphi)\in U_a$, 由条件知 $t\geqslant 0$ 时有 $|x(t,\varphi)|\leqslant k$, 这说明 $x_t(\varphi)$ 有界, 由定理 6.1⇒本定理得证.

**推论 6.1** 设 $V: C\to R$ 连续, $V(0)=0$ 又存在非负连续非减函数 $u(r)$ 和 $w(r)$, 当 $r\to\infty$ 时 $u(r)\to\infty$, $w(0)=0$ 使得

(1) $u(|\varphi(0)|)\leqslant V(\varphi)$.

(2) $\dot V(\varphi)\leqslant -w(|\varphi(0)|)$.

则方程(6.1)的零解是稳定的, 一切解有界, 若 $w(r)$ 为正定, 则当 $t\to\infty$ 时所有解趋于零.

**证** 根据 $V(\varphi)$ 连续及 $V(0)=0$, 对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 使得 $|\varphi|<\delta$ 时 $V(\varphi)<u(\varepsilon)$. 再由(2), 当 $|\varphi|<\delta$ 时有

$$u(|x(t)|)\leqslant V(x_t)\leqslant V(\varphi)<u(\varepsilon) \tag{6.4}$$

由(6.4)⇒$|x(t)|<\varepsilon$⇒(6.1)零解是稳定的.

再由 $r\to\infty$ 时 $u(r)\to\infty$ 的性质⇒(6.1)的所有解均为有界. 若 $w(r)$ 正定, 则定理 6.2 的条件满足, 事实上, 对任何 $a>0$, 当 $\varphi\in U_a$ 时, 由(1)得 $u(|\varphi(0)|)\leqslant V(\varphi)<a$, 再由 $u$ 的非减性⇒$\exists\ k>0$, 使得 $|\varphi(0)|<k$, 故由定理 6.2⇒当 $t\to\infty$ 时 $x_t(\varphi)\to M$.

现以取 $S=\{\varphi\in\bar U_a: \dot V(\varphi)=0\}$, 当 $\dot V(\varphi)=0$ 时, 由条件(2)得 $\omega(|\varphi(0)|)\leqslant -\dot V(\varphi)=0\Rightarrow|\varphi(0)|=0$, 因此

$$S\subseteq\{\varphi\in\overline{U}_a:\varphi(0)=0\},M=\{0\}$$

故 $\varphi\in U_a$ 时，$x_t(\varphi)\to0,t\to\infty$，由 $a>0$ 的任意性 $\Rightarrow$ 对 $\forall\ \varphi\in C$ 结论成立.

**定理 6.3（不稳定性）** 设开集 $U\subseteq C$ 含有 $C$ 中的零元，$N$ 是零元的一个邻域，设

(1) $V$ 是 $G=N\cap U$ 上的一个 $V$ 泛函.

(2) $M\cap G$ 或为空集或为单点集 $\{0\}$.

(3) 当 $\varphi\in G,\varphi\neq0$ 时，$V(\varphi)<\eta$.

(4) $V(0)=\eta$ 及 $V(\varphi)=\eta$，当 $\varphi\in\partial G\cap N$ 时.

若 $N_0\subseteq N$ 是 $C$ 的零元的一个有界邻域，则对任何非零元素 $\varphi\in G\cap N_0$，总存在一个时刻 $\tau$ 使 $x_\tau(\varphi)\in\partial N_0$.

**证** 若 $\varphi$ 为 $G\cap N_0$ 中的非零元素，则当 $t\geqslant0$ 且 $x_t(\varphi)$ 保留在 $N_0\cap G$ 时，有 $V(x_t(\varphi))\leqslant V(\varphi)<\eta$. 若对所有的 $t\geqslant0$ 都有 $x_t(\varphi)\in N_0\cap G$，则 $\omega$ 极限集 $\omega(r^+(\varphi))\subseteq N_0\cap G$，由 $\omega(r^+(\varphi))$ 的不变性及条件(2) $\Rightarrow\omega(r^+(\varphi))=\{0\}$，另一方面，由条件(4) $\Rightarrow V(0)=\eta\Rightarrow$ 矛盾. 故必存在 $\tau>0$，使得 $x_\tau(\varphi)\in\partial(N_0\cap G)$，再由条件(4)即知 $x_\tau(\varphi)\in\partial N_0$. 证毕.

**例 18** 讨论纯量方程

$$\dot{x}(t)=-\int_{-r}^{0}a(-\theta)g(x(t+\theta))d\theta\quad r>0\tag{6.5}$$

其中 $a(t)$ 是定义在 $[0,r]$ 上的非负连续函数，且 $a(r)=0$，$a(t)$ 有二阶连续导数且 $\dot{a}(t)\leqslant0,\ddot{a}(t)\geqslant0$，当 $|x|\to\infty$ 时，$G(x)\triangleq\int_0^x g(s)ds\to\infty$.

事实上，(6.1)右端算子取

$$f(\varphi)=-\int_{-r}^{0}a(-\theta)g(\varphi(\theta))d\theta$$

则(6.1)化为(6.5)，(6.5)作自变量代换，可写成

$$\dot{x}(t)=-\int_{t-r}^{t} a(t-u)g(x(u))du \tag{6.6}$$

(6.6)两边求导$\Leftarrow\Rightarrow$(6.6)的解满足

$$\ddot{x}(t)+a(0)g(x(t))=-\int_{t-r}^{t} \dot{a}(t-u)g(x(u))du \tag{6.7}$$

或

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t)+a(0)g(x(t))=&-\dot{a}(r)\int_{-r}^{0} g(x(t+\theta))d\theta \\ &+\int_{-r}^{0} \ddot{a}(-\theta)\left(\int_{\theta}^{0} g(x(t+u))du\right)d\theta\end{aligned} \tag{6.8}$$

现在取 $V$ 泛函为

$$V(\varphi)=G(\varphi(0))-\frac{1}{2}\int_{-r}^{0} \dot{a}(-\theta)\left[\int_{\theta}^{0} g(\varphi(s))ds\right]^2 d\theta,$$

则 $V$ 沿方程(6.5)解的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(6.5)}(\varphi)=&\frac{1}{2}\dot{a}(r)\left[\int_{-r}^{0} g(\varphi(\theta))d\theta\right]^2 \\ &-\frac{1}{2}\int_{-r}^{0} \ddot{a}(-\theta)\left[\int_{\theta}^{0} g(\varphi(s))ds\right]^2 d\theta\end{aligned}$$

由关于 $a$ 的假定$\Rightarrow\dot{V}(\varphi)\leqslant 0$，再由推论 6.1$\Rightarrow$(6.5)的一切解有界.

现在用定理 6.1 来考察方程(6.5). 对$\forall\ s\in[0,r]$，设

$$H_s(\varphi)=\int_{-s}^{0} g(\varphi(\theta))d\theta \tag{6.9}$$

则定理 6.1 中的集合 $S$ 可定义为

$S=\{\varphi\in C$：当 $\dot{a}(r)\neq 0$ 时，$H_r(\varphi)=0$，当 $\ddot{a}(s)\neq 0$ 时 $H_s(\varphi)=0\}$.

由方程(6.8)$\Rightarrow$方程(6.5)在 $S$ 中的最大不变集 $M$ 应满足：

$M\subseteq\{x_t\in C$：$x$ 为方程 $\ddot{x}+a(0)g(x)=0$ 的有界解，且当 $\dot{a}(r)\neq 0$ 时 $H_r(x_t)=0$，当 $\ddot{a}(s)\neq 0$ 时 $H_s(x_t)=0, t\in R\}$

若 $\dot{a}(r)\neq 0$，$x$ 满足方程 $\ddot{x}+a(0)g(x)=0$ 是有界的，并且对 $t$

$\in R$ 有 $H_r(x_t)=0$，则 $\dot{x}(t)=\dot{x}(t-r)\Rightarrow x(t)=kt+$（周期为 $r$ 的周期函数），又由 $x$ 的有界性$\Rightarrow$对所有的 $t$ 均有 $x(t)=x(t-r)$，若存在一个 $s_0$ 使 $\ddot{a}(s_0)\neq 0$，则必$\exists$ 含 $s_0$ 的区间 $I_{s_0}$，使得 $s\in I_{s_0}$时 $\ddot{a}(s)\neq 0$，若 $x$ 满足方程 $\ddot{x}+a(0)g(x)=0$ 是有界的. 并且 $t\in R, s\in I_{s_0}$时 $H_s(x_t)=0$，则对$\forall\ s\in I_{s_0}$，$\dot{x}(t)$是以 $s$ 为周期的周期函数，再由 $x$ 的有界性$\Rightarrow x$ 为常数.

若 $M$ 只含零解，则 § 4、§ 5 的所有定理对自治系统(6.1)都适用. 特别地，当(6.1)为线性系统

$$\dot{x}(t)=L(x_t) \tag{6.10}$$

时，如何建立 $V$ 泛函，除了 § 4 的 J. Hale 的公开问题以外，实际上还没有什么突破性的工作，换句话说对(6.10)急待解决的问题是：

(1)对给定的线性自治系统(6.1)，如何建立 $V$ 泛函以判断它的零解的稳定性——$V$ 的构造法?

(2)如何应用 $V$ 泛函去判断稳定区与估计时滞界限? 例如[4][237].

关于 $V$ 泛函的存在性，普遍的非线性系统零解一致渐近稳定性情形的 Massera 定理，已由 H. H. Красовский 推广至 RFDE($f$). 对线性自治方程(6.10)我们有 RDDE 的一些结果. 对方程

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{j=1}^{m}A_j(t-r_j) \tag{6.11}$$

其中 $A_j$ 为 $n\times n$ 常数阵，$j=0,l,\cdots\cdots,m$. $r_j=\text{const.}>0$，$j=0,\cdots\cdots m$.

**定理** 6.4 若(6.11)的特征方程

$$h(\lambda)=\det|\lambda I-A_0-\sum_{j=1}^{m}A_je^{-\lambda r_j}|=0 \tag{6.12}$$

的任意两个根 $\lambda_1,\lambda_2$ 恒成立 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$，则对任意给定的实对称阵 $W\in R^{n\times n}$. $\exists\ V:C([-r,0],R^n)\to R^n$，$r=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{r_j\}$，定义为

$$V(\varphi)\triangleq\varphi'(0)T\varphi(0)+2\varphi'(0)\sum_{j=1}^{m}\int_{-r_j}^{0}F(r_j+\theta)A_j\varphi(\theta)d\theta$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{-r_j}^{0}\varphi'(u)A'_i\int_{-r_j}^{0}F(r_j+\theta-r_i-u)A_j\varphi(\theta)d\theta du$$

(6.13)

同前文所设“$'$”表示折转向量或阵，$T$ 是 $n\times n$ 对称阵，$F\in C(R, R^{n\times n})$. $V(\varphi)$沿(6.11)解的导数为

$$\dot V_{(6.11)}(x_t)=-x'(t)Wx(t) \tag{6.14}$$

这个定理完整地把常微分方程的 Ляпунов 定理推广到 RDDE (6.11)上来.

**定理** 6.5　对(6.11)，若其特征方程(6.12)的全部根位于左半平面$\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\lambda_j<0$，则 $W$ 正定$\Rightarrow T$ 正定，并且存在 $u\in C(I_{sa}, R_+)$，$v\in C(R_+, R_+)$，$u(0,a)=v(0)=0$. $u(s,a)>0$，$v(s)>0$，当 $s>0$，$a>0$. $u(s,a)$，$v(s)$关于 $s$ 单调非减，$u(a,a)\to\infty$，$a\to\infty$. $I_{sa}=\{(s,a):0\leqslant s<a<\infty\}$，使得

$$u(|\varphi(0)|,a)\leqslant V(\varphi)\leqslant v(|\varphi|), \varphi\in\{\psi:\psi\in C, |\psi|\leqslant a\}$$

(6.15)

要证定理 6.4 及 6.5 要用到的记号和引理如下，给定(6.11)记

$$H(\lambda)=\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_je^{-\lambda r_j}$$

$$\Lambda=\{\lambda_0:\mathrm{Re}\lambda_0>0, \det H(\lambda_0)=0\}$$

$G(\lambda, W)=H'(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}$，$W$ 为 $n\times n$ 对称阵，$\det H(\lambda)\neq 0$

$$\hat G(\lambda_0, W, s)=\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)+\mathrm{Res}(\bar G'(\lambda,W)e^{-\bar\lambda s},\bar\lambda_0)$$

且“$'$”表示折转，“—”表示共轭，$\mathrm{Res}(\cdot)$为留数.

**引理** 6.2　设 $\det H(\lambda_0)=0$，$s\in R$，则有

(1)$\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)$关于 $s$ 连续可微，且

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)=\mathrm{Res}(\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0).$$

(2) $\overline{\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)}=\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\overline{\lambda}_0)$.

(3) $[\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0]'=\mathrm{Res}(G'(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)$.

若 $\det(H(-\lambda_0)\neq 0$，则有

(4) $\frac{d}{dt}\hat{G}(\lambda_0,W,s)-\sum_{j=0}^{m}A_j'\hat{G}(\lambda_0,W,s-r_j)$

$\quad =\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0)$

(5) $\sum_{j=0}^{m}A_j'\hat{G}'(\lambda_0,W,r_j)+\sum_{j=0}^{m}\hat{G}(\lambda_0,W,r_j)A_j$

$=-\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)-\mathrm{Res}(H'(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)$

**证** 以(5)为例，由所设，可作圆 $C:|\lambda-\lambda_0|=h>0$，使 $\det H(\lambda)\neq 0,0<|\lambda-\lambda_0|\leqslant h,\det H(-\lambda)\neq 0,0\leqslant|\lambda-\lambda_0|\leqslant h$，按留数的定义有

$$\sum_{j=0}^{m}A'_j\hat{G}'(\lambda_0,W,r_j)+\sum_{j=0}^{m}\hat{G}(\lambda_0,W,r_j)A_j$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}[(\sum_{j=0}^{m}A_j'e^{-\lambda r_j})G(\lambda,W)$$

$$+G(\lambda,W)(\sum_{j=0}^{m}A_je^{\lambda r_j})]d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}[(\sum_{j=0}^{m}A'_je^{\lambda r_j})G'(\lambda,W)$$

$$+G'(\lambda,W)(\sum_{j=0}^{m}A_je^{-\lambda r_j})]d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}[(\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_j'e^{-\lambda r_j})G(\lambda,W)+G(\lambda,W)$$

$$\cdot(-\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_je^{-\lambda r_j})]d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}[(-\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_j'e^{-\lambda r_j})G'(\lambda,W)$$

$$+G'(\lambda,W)(\lambda I-\sum_{j=0}^{m}A_je^{-\lambda r_j})]d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}WH(-\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}H'(\lambda)^{-1}Wd\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} WH(-\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} H'(\lambda)^{-1}Wd\lambda \tag{6.16}$$

由 $C$ 的作法⇒$\det H(-\lambda)=\det H'(-\lambda)\neq 0,\lambda\in C$ 及内部. 故由 Cauchy 定理⇒(6.16)第一、四个积分等于 0⇒(5)成立，对(1)～(4)可类似证明.

注意到 $\det H(\lambda)=0$ 根必为共轭对和 $\Lambda$ 的有限性有

**推论 6.2** 若对$\forall\ \lambda_0\in\Lambda$ 成立 $\det H(-\lambda)\neq 0$，则有

(1)$\Phi(s)=\sum\limits_{\lambda_0\in\Lambda}\hat{G}(\lambda_0,W,s)$关于 $s$ 的 $n\times n$ 实连续可微矩阵，且

$$\Phi'(s)=\Phi(-s)$$

$$\frac{d\Phi(s)}{ds}-\sum_{j=0}^{m}A'_j\Phi(s-r_j)=\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0)$$

(2)$\Phi(0)=\sum\limits_{\lambda_0\in\Lambda}\hat{G}(\lambda_0,W,0)$为 $n\times n$ 实对称阵.

(3)
$$\sum_{j=0}^{m}A'_j\Phi'(r_j)+\sum_{j=0}^{m}(r_j)A_j$$
$$=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H'(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)].$$

**引理 6.3** 设 $\det H(iy)\neq 0,y\in R$，则

$$\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda,s\in R$$

为$n\times n$实连续函数矩阵，且$\Psi'(s)=\Psi(-s)$，特别地$\Psi'(0)=\Psi(0)$为对称阵.

**证** 由上述积分的绝对收敛性即可推得 $\Psi(s)$关于 $s$ 的连续性，引理的其余结论可由 $\Psi(s)$的定义直接推出.

**引理 6.4** 设 $\det H(iy)\neq 0,y\in R$，则积分

$$I(s)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda,s\in R$$

关于 $s$ 在任一不含 $s=0$ 的闭区间上一致收敛.

由引理 6.4 可得

**推论 6.3** 若 $\det H(iy)\neq 0, y\in R$，则 $\Psi(s)$ 关于 $s$ 在 $s\neq 0$ 处连续可微，且成立

$$\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda=-\Psi'(-s),\quad s=0 \tag{6.17}$$

$$\Psi(s)-\sum_{j=0}^{m}A'_j\Psi(s-r_j)=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH^{-1}(\lambda)e^{-\lambda s},\lambda_0)$$

$$s>0 \tag{6.18}$$

$\lim\limits_{s\to 0^+}\Psi(s)$，$\lim\limits_{s\to 0^-}\Psi(s)$ 都存在且有限.

**证** $\Psi(s)$ 的连续性，由 (6.17) 与引理 6.4 推出. 又由 Jordon 引理 $\Rightarrow$ 当 $s>0$ 时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s}d\lambda=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0)$$

故有

$$\begin{aligned}
\Psi(s)-\sum_{j=0}^{m}A'_j\Psi(s-r_j)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\lambda G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Big(\sum_{j=0}^{m}A'_je^{\lambda r_j}\Big)G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H'(\lambda)G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(-\lambda)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(-\lambda)^{-1}e^{-\lambda s}d\lambda\\
&=-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0),\ s>0.
\end{aligned}$$

故 (6.18) 成立. 注意到 $\Psi(s)$ 及 $\sum\limits_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1}e^{-\lambda s},\lambda_0)$ 关于 $s$ 是连续的，在 (6.18) 中令 $s\to 0^+$（及 $0^-$）即得

$$\lim_{s\to 0^+}\Psi(s)=\sum_{j=0}^{m}A'_j\Psi(-r_j)-\sum_{\lambda_0\in\Lambda}\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)$$

$$\lim_{s\to 0^-}\Psi(s)=\lim_{s\to 0^-}(-\Psi'(-s))=-\lim_{s\to 0^+}\Psi(s)$$

推论证毕.

**引理 6.5** 若 $C_R$ 为半圆：$|\lambda|=R,\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$，$C_R^+$ 表示积分沿正向进行，则有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}H(\lambda)^{-1}d\lambda=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H'(\lambda)^{-1}d\lambda=i\pi I_{n\times n} \tag{6.19}$$

其中 $I_{n\times n}$ 即 $n$ 阶单位阵.

**证** 若记 $\tilde{H}(\lambda)$ 为 $H(\lambda)$ 伴随阵为 $\tilde{H}(\lambda)=(h_{ij}(\lambda))$.

$$h_{ij}(\lambda)=\tilde{h}_{ij}(e^{-\lambda r_1},\cdots\cdots,e^{-\lambda r_m},\lambda).\ i\neq j \tag{6.20}$$

是 $e^{-\lambda r_j}$，$\lambda$ 的多项式且关于 $\lambda$ 的次数$\leqslant n-2$，关于 $e^{-\lambda r_j}$ 的次数$\leqslant n-1$，而

$$h_{ii}(\lambda)=\lambda^{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}a_j^{(i)}(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_m})\lambda^{n-1-j},i=1,2,\cdots n \tag{6.21}$$

$$\det H(\lambda)=\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_j(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_m})\lambda^{n-j} \tag{6.22}$$

其中 $a_j^{(i)}(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_m})$，$a_j(e^{-\lambda r_1},\cdots,e^{-\lambda r_m})$ 均为关于 $e^{-\lambda r_j}$ 的多项式，且次数$\leqslant n$.

对 $\lambda$ 作变量代换 $\lambda=Re^{i\theta}$，我们有

$$\int_{C_R^+}H^{-1}(\lambda)d\lambda=\int_{C_R^-}\tilde{H}(\lambda)/\det H(\lambda)d\lambda$$

$$=i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(h_{ij}^{*}(Re^{i\theta}))_{n\times n}d\theta$$

其中 $h_{ij}^{*}(Re^{i\theta})=\dfrac{Re^{i\theta}h_{ij}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}$，注意当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$R>0$ 时 $e^{-Rr_j\exp i\theta}$ 一致有界. $j=1,\cdots\cdots m$. 故由(6.20)(6.21)(6.22)$\Rightarrow$当 $\theta\in$

$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时一致成立

$$|h_{ij}^*(Re^{i\theta})|=|\frac{Re^{i\theta}h_{ij}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}|\to 0.\ R\to+\infty,\ i\neq j$$

$$|h_{ii}^*(Re^{i\theta})|=|\frac{Re^{i\theta}h_{ii}(Re^{i\theta})}{\det H(Re^{i\theta})}|\to 1,\ R\to+\infty. \tag{6.23}$$

由 Lebesque 控制收敛定理⇒

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^-}H^{-1}(\lambda)d\lambda=i\lim_{k\to+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|h_{ij}^*(Re^{i\theta}))_{n\times n}d\theta=i\pi I_{n\times n}$$

同理可得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H(\lambda)^{-1}d\lambda=i\pi I_{n\times n}$$

**推论** 6.4 设 $\det H(iy)\neq 0, y\in R, \Psi(s)$如引理 6.3 所定义，则

$$\sum_{j=0}^{m}[A'_j\Psi'(r_j)+\Psi(r_j)A_j]$$
$$=-W+\sum_{\lambda_0\in A}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H'(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)] \tag{6.24}$$

**证** 注意到 $\Psi'(r_j)=\Psi(-r_j)$，利用 Cauchy 定理及引理 6.5 即得

$$\sum_{j=0}^{m}[A'_j\Psi'(r_j)+\Psi(r_j)A_j]=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}(\sum_{j=0}^{m}A'_je^{-\lambda r_j})G(\lambda,W)d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}G(\lambda,W)\sum_{j=0}^{m}A_je^{\lambda r_j}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{t\to\infty}[\int_{-it}^{it}[(-\lambda I+\sum_{j=0}^{m}A'_je^{-\lambda r_j})G(\lambda,W)$$
$$+G(\lambda,W)(\lambda I+\sum_{j=0}^{m}A_je^{\lambda r_j})]d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}WH(\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H'(\lambda)^{-1}Wd\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}W\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H(\lambda)^{-1}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}H'(\lambda)^{-1}d\lambda W$$

$$+\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)]$$

$$=-W+\sum_{\lambda_0\in\Lambda}[\mathrm{Res}(WH(\lambda)^{-1},\lambda_0)+\mathrm{Res}(H'(\lambda)^{-1}W,\lambda_0)]$$

现在给出定理 6.4,6.5 的证明.

证定理 6.4. 在定理 6.4 的假定之下,显有 $\det H(iy)\neq 0, y\in R, \det H(-\lambda_0)\neq 0, \lambda_0\in\Lambda$. 今设 $W$ 为任意给定的 $n\times n$ 实对称阵. 在(6.12)中令

$$T=\psi(0)+\Phi(0),\qquad F(s)=\Psi(s)+\Phi(s)$$

其中

$$\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}G(\lambda,W)e^{\lambda s}d\lambda$$

$$G(\lambda,W)=H'(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}$$

$$\Phi(s)=\sum_{\lambda_0\in\Lambda}([\mathrm{Res}(G(\lambda,W)e^{\lambda s},\lambda_0)$$

$$+\mathrm{Res}(G'(\lambda,W)e^{-\lambda s},\lambda_0)]$$

由推论 6.2、引理 6.3 及推论 6.3⇒$T$ 为 $n\times n$ 实对称阵,$F(s)$ 为 $n\times n$ 实连续阵,且 $F(s)$在 $s\neq 0$ 处连续,而在 $s=0$ 处为第一类间断点. 故对(6.11)的任一解 $x_t$ 用部分积分法可得

$$\dot V(x_t)=x'_t(0)(A_0'T+\sum_{j=1}^{m}A'_jF'(r_j)+\sum_{j=1}^{m}F(r_j)A_j$$

$$+TA_0)x_t(0)+2x'_t(0)(T-F(0))\sum_{j=1}^{m}A_jx_t(-r_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}x'_t(-r_i)A'_i\int_{-r_j}^{0}[F(r_i+\theta-F'(-r_j-\theta))]A_jx_t(\theta)d\theta$$

$$-x'_t(0)\sum_{j=1}^{m}\int_{-r_j}^{0}[2F(r_j+\theta)-2A_0'F(r_j+\theta)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}A_j'F(r_j+\theta-r_i)-\sum_{i=1}^{m}A'_iF'(-r_j-\theta+r_i)]A_jx_t(\theta)d\theta$$

(6.25)

由 $T$,$F(s)$的定义及推论 6.2 的(1),(3),推论 6.3,推论 6.4 得

$$A_0'T+\sum_{j=1}^{m}A_j'F'(r_j)+\sum_{j=1}^{m}F(r_j)A_j+TA_0$$

$$=\sum_{j=0}^{m}[A'_j\Psi'(r_j)+\Psi(r_j)A_j]+\sum_{j=0}^{m}A'_j\Phi(r_j)+\Phi(r_j)A_j]$$

$$=-W \tag{6.26}$$

$$T-F(0)=0 \tag{6.27}$$

$$F(r_j+\theta)-F'(-r_j+\theta)\equiv F(r_j+\theta)-F(r_j+\theta)\equiv 0$$

$$-r_j\leqslant\theta\leqslant 0, j=1,2\cdots\cdots,m \tag{6.28}$$

$$2F(r_j+\theta)-2A'_0F(r_j+\theta)-\sum_{i=0}^{m}A'_i(r_j+\theta-r_i)$$

$$-\sum_{i=0}^{m}A'_iF'(-r_j-\theta+r_i)$$

$$\equiv 2[\Psi(r_j+\theta)-\sum_{i=0}^{m}A'_i\Psi(r_j+\theta-r_i)+\Phi(r_j+\theta)$$

$$-\sum_{i=0}^{m}A_i'\Phi(r_j+\theta-r_i)]\equiv 0, -r_j<\theta\leqslant 0, j=1,2,\cdots\cdots m$$

(6.29)

由(6.25)～(6.29)⇒

$$V(x_t)=-x'_t(0)Wx_t(0)=-x'(t)Wx(t),$$

定理 6.4 证毕.

现在证定理 6.5. 在定理假定之下,$A=\varphi$,且 $\det H(iy)\neq 0$, $y\in R$.故此时在(6.12)中

$$T=\Psi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H'(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}d\lambda$$

$$F(s)=\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}H'(\lambda)^{-1}WH(-\lambda)^{-1}e^{\lambda s}d\lambda$$

若 $W$ 正定，则存在 $n\times n$ 可逆实阵 $P$，使 $W=P'P$，从而对任意的 $x\in R^n$，$x\neq 0$ 成立

$$x'Tx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x'H'(iy)^{-1}P'PH(-iy)^{-1}xdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|PH(-iy)^{-1}x|^2dy>0$$

$\Rightarrow T$ 为正定阵，定理 6.5 第一个结论成立.

因为积分 $\Psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}H'(iy)^{-1}P'PH(-iy)^{-1}e^{iys}dy$ 对任意的 $s\in R$ 绝对收敛，故对 $\forall\ \varphi\in C([-r,0],R^n)$，由(6.12)中交换积分次序并详尽推导后，定义函数 $u(s,a)$ 及 $v(s)$ 使之满足(6.14)[11].

## §7 解的有界性定理

对 RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{7.1}$$

其中 $f:R\times C\to R^n$ 连续. 设 $V:R_+\times C\to R_+$ 连续，它沿(7.1)解的导数 $V_{(7.1)}(t,\varphi)$ 由 §1(1.8)式定义.

**定义** 7.1　若函数 $u:R_+\to R_+$ 连续且严格单调增加，$u(0)=0$. 当 $s\to\infty$ 时，$u(s)\to\infty$，则称 $u(s)$ 为楔函数. 或者说 $u\in K$.

**定理** 7.1　若存在泛函 $V$ 及楔函数 $u$，正常数 $U$，$\beta$，$\mu$ 满足条件

(1) $V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$，$t\in R$，$\varphi\in C$.

(2) 当 $|x(t)|\geqslant U$ 时，$V_{(7.1)}(t,x_t)\leqslant -\mu|f(t,x_t)|$.

(3)当$|x(t)|<U$时，$V_{(7.1)}(t,x_t)\leqslant\beta$.

则方程(7.1)的解一致有界.

**证** 若$f(t,\varphi)\equiv0$，只要取$V(t,\varphi)\equiv0$. $\beta=\mu=U=1$，$u(s)=s^2$，则(1)(2)(3)皆满足⇒(7.1)的解一致有界. 实际上此时对$\forall\sigma\in R$，$\forall\varphi\in C$，$x(\sigma,\varphi)(t)=\varphi(0)$，$t\geqslant\sigma$. 显然一致有界.

其次，我们证明此时(7.1)的解整体存在，若不然，则$x(t)$必为某一区间$[\sigma,T)$上的不可延拓解，由第四章的延拓定理⇒$x(t)$在$[\sigma,T]$上无界. 注意到$V(t,x_t)$仅当$|x(t)|<U$时才能增加，且在长度为$r$的区间上最多增加$\beta r$. 若在区间$[a,b]$上$|x(t)|\geqslant U$，则$V(t,x_t)$最少减少$\mu|x(b)-x(a)|$. 特别地，若$|x(t)|$由$U$移至$U+R(R>0)$，则$V(t,x_t)$至少要减少$\mu R$. 由于在任何区间$[\sigma,T)$上$V$至多增加$(T-\sigma)\beta$⇒有$\mu R\leqslant V(\sigma,x_t)+(T-\sigma)\beta$，这与$x(t)$在$[\sigma,T)$上为无界的假设不合，故$x(t)$可延拓到$[\sigma,+\infty)$.

现在可证一致有界性. 设$R_1=\frac{\beta r}{\mu}$，给定$R>R_1$及初始条件$(\sigma,\varphi)$，若$\sigma\geqslant0$，$|\varphi|<R+U$，则只要证

$$|x(t)|=|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant R+U+[v(R+U)+\beta r]/\mu$$

显然，或者当$t\geqslant\sigma$时$V(t,x_t)<v(R+U)+\beta r\triangleq s_1$，或者存在$s_1$使$V(t_1,x_{t_1})=s_1$，又$|x(t_1)|<U$，因为只有当$|x(t)|\leqslant U$时$V$才能增加.

在$[t_1-r,t_1]$上$V(t,x_t)$的增加不可能超过$\beta r$. 且$V(t,x)\leqslant U(|x_t|)$⇒存在$t^*\in[t_1-r,t_1]$，使$U(|x(t^*)|)\geqslant v(R+U)$. 从而有$|x(t^*)|\geqslant R+U$. 当$t$从$t^*$增至$t_1$时，$|x(t)|$从$|x(t^*)|\geqslant R+U$变到$|x(t)|=U$. 故$V$至少减少了$\mu R$，于是

$$V(t_1,x_{t_1})\leqslant V(t^*,x_{t^*})-\mu R+\beta r<V(t^*,x_{t^*})$$

这与$V(t_1,x_{t_1})$为$[\sigma,\tau_1]$上的极大值矛盾.

因此只有当$|\varphi|<R+U$及$t\geqslant\sigma$时$V(t,x_t)<s_1$，并且若在区间$[a,b]$上$|x(t)|\geqslant U$，则$t\in[a,b]$时有$0\leqslant V(t,x_t)\leqslant s_1-\mu|x(a)-x(t)|$⇒$|x(a)-x(t)|\leqslant s_1/\mu$. 从而$|x(t)|\leqslant R+U+\frac{s_1}{\mu}$⇒方程

(7.1)的解一致有界. 证毕.

**定理** 7.2　设定理 7.1 条件成立，且存在常数 $C>0$，使得当 $|x(t)|\geqslant U$ 时 $\dot{V}(t,x_t)\leqslant -C$，则方程(7.1)的解是一致最终有界的.

证法类似，从略.

设 $u,v:R_+\to R_+$ 为连续非减函数. 当 $s>0$ 时 $u(s)>0,v(s)>0$，且当 $s\to\infty$ 时 $u(s)\to\infty$.

**定理** 7.3　若存在上述函数 $u,v$ 满足

(1)对$\forall\ t\geqslant 0$ 及 $\varphi\in C$，有

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

(2)对$\forall\ \sigma\geqslant 0$ 及 $\varphi\in C$，存在 $r_0\in(0,r]$及 $\lambda\geqslant 1$，使得当 $t\in[\sigma,\sigma+r)$且 $V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant\lambda v(|\varphi|)$，$V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant V(\xi,x_\xi(\sigma,\varphi))$. $\sigma\leqslant\xi\leqslant t$ 时有

$$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant G(t,V(t,x_t(\sigma,\varphi)))$$

这里 $G=R_+\times R_+\to R_+$ 连续.

(3)方程

$$\dot{y}(t)=G(t,y(t))\tag{7.2}$$

的解一致有界. 则方程(7.1)的解是一致有界的.

**证**　记方程(7.2)过$(\sigma,y_0)$最大右行解为 $y(t)$，又把 $x_t(\sigma,\varphi)$ 与 $x(\sigma,\varphi)(t)$分别简记为 $x_t,x(t)$. 则

对$\forall\ H>0$. 取 $y_0>\lambda U(H)$，类似于§3 的证明方法$\Rightarrow$当$|\varphi|<H$ 时有

$$V(t,x_t)<y(t)$$

由方程(7.2)解的一致有界性$\Rightarrow$存在 $M_{y_0}>0$ 使得 $|y(t)|\leqslant M_{y_0}$. 再取 $M>0$ 使 $u(M)=M_{y_0}$，于是有

$$u(|x(t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant y(t)\leqslant M_{y_0}=u(M),t\geqslant\sigma$$

从而$|x(t)|\leqslant M,t\geqslant\sigma$. 证毕.

设函数 $h,H:R_+\to R_+$连续，且当 $V>0$ 时 $H(V)>0$.

而且满足

$$\int^{\infty} h(t)dt<\infty,\int^{\infty}\frac{dV}{H(V)}=\infty$$

于是对$\forall\ \alpha>0$,$\exists\ M>0$,使得

$$\int_{\sigma}^{\infty} h(t)dt=\int_{c}^{M}\frac{dV}{H(V)}$$

则可以证明方程

$$\dot{y}(t)=h(t)H(y(t))$$

的解一致有界,事实上,对$\forall\ \alpha>0$及初始条件$(\sigma,y_0)$,$y_0>0$,设$y(t)=y(t,\sigma,y_0)$,于是当$y_0<\alpha$时有

$$\int_{y_0}^{y(t)}\frac{dV}{H(V)}=\int_{\sigma}^{t}h(s)ds=\int_{\sigma}^{\infty}h(s)ds=\int_{y_0}^{M}\frac{dV}{H(V)}\Rightarrow y(t)\leqslant M.$$

**推论** 7.1 若满足定理 7.1 中的条件(1)(2),其中(2)中的$G(t,V(t,x_t(\sigma,\varphi)))\equiv h(t)H(V(t,x_t(\sigma,\varphi)))$,则方程(7.1)的解一致有界.

**推论** 7.2 若定理 7.1 的条件(1)成立,且对$\forall\ \sigma\geqslant 0$及$\forall\ \varphi\in C$有

$$\dot{V}(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant 0,t\geqslant\sigma$$

则(7.1)的解一致有界.

**推论** 7.3 若存在连续函数$V:R\times R^n\to R_+$.满足下列条件:

(1)$u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$,$t\geqslant 0$,$x\in R^n$.

(2)对$\forall\ \sigma\geqslant 0$及$\forall\ \varphi\in C$.当$V(t,x(\sigma,\varphi)(t))\geqslant V(\xi,x(\sigma,\varphi)(\xi))$,$t-r\leqslant\xi\leqslant t$时有

$$\dot{V}(t,x(\sigma,\varphi)(t))\leqslant h(t)H(t,x(\sigma,\varphi)(t)).$$

则方程(7.1)的解一致有界.

设$u$,$v$,$w:R_+\to R_+$连续非减,当$s>0$时,$u(s)>0$,$v(s)>0$,$w(s)>0$,当$s\to\infty$时$u(s)\to\infty$.

**定义** 7.2 设$P(t,\varphi)$为$R_+\times C_H$上连续正值泛函,对给定的泛函$V:R_+\times C_H\to R_+-\{0\}$.若

$$\inf_{a\leqslant V(t,\varphi)\leqslant b}[P(t,\varphi)-V(t,\varphi)]>0$$

对$\forall\ b>a>0$成立，则称$P$对于泛函$V$满足条件$(P)$.

**定理** 7.4　若$\exists$ 上述诸函数$u,v,w,p,V$满足

(1)对$\forall\ t\geqslant 0$及$\forall\ \varphi\in C$有

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

(2)对$\forall\ \sigma\geqslant 0$及$\forall\ \varphi\in C$，$\exists\ r_0\in(0,r]$及$\lambda\geqslant 1$，使得当$t\in[\sigma,\sigma+r)$且$V(t,x_t(\sigma,\varphi))\geqslant \lambda v(|\varphi|)$时有

$\dot V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant 0$. 当$t\geqslant\sigma+r_0$且$P(t,x_t(\sigma,\varphi))>V(\xi,x_\xi(\sigma,\varphi))$，$t-r_0\leqslant\xi\leqslant t$时，有$\dot V(t,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant -w(|x(\sigma,\varphi)(t)|)$.

(3)$\varphi'(0)f(t,\varphi)$在$R_+\times C_H$上有上界或者有下界.

则方程(7.1)的解一致最终有界.

**定理** 7.5　设存在定理 7.4 中的$u,v,w$且(7.1)中$f:R\times C\to R^n$把$R\times$($C$的有界子集)映为$R^n$的有界集. 若存在$V:R\times C\to R$满足

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$$

$$\dot V_{(7.1)}(t,\varphi)\leqslant -w(|\varphi(0)|)$$

则(7.1)的解一致有界.

事实上，因$s\to\infty$时，$u(s)\to\infty$. $\alpha>0$是任意给定的常数，取$\beta>0$使得$u(\beta)=v(\alpha)$. 相应地，若$|\varphi|\leqslant\alpha$，$x(\sigma,\varphi)(t)$是过$(\sigma,\varphi)$的解，则对$\forall\ t\geqslant\sigma$成立

$$|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant\beta$$

即一致有界性成立.

以上两个定理说明 FDE 解的有界性问题可以用$V$函数法(或$V$泛函法)去判断. 实际上，完全可以把 R. Bellman 关于常微分方程的不等式估计方法用于 FDE. 例如对二阶方程

$$\ddot x(t)+a(t)x(t)+b(t)f(x(t-\tau(t)))=0 \qquad (7.3)$$

其中$a(t)$，$b(t)$，$f(\cdot)$连续. $0\leqslant\tau(t)\leqslant r=\text{const}$. 其线性近似方程

是常微分方程

$$\ddot{x}(t)+a(t)x(t)=0 \tag{7.4}$$

**引理** 7.1　(7.4)有两个解 $x_1(t)$，$x_2(t)$满足

$$w=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}=1 \tag{7.5}$$

反之，若 $x_1(t)$，$x_2(t)$为(7.4)的两个满足(7.5)的解，则(7.3)过$(\sigma,\varphi)$的解可表示为

$$x(t,\sigma,\varphi)=C_1x_1(t)+C_2x(t)+\int_\sigma^t[x_1(s)x_2(t)-x_2(s)x_1(t)]$$

$$\cdot[P(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]ds \tag{7.6}$$

**证**　事实上，取 $x_1(\sigma)=1$，$\dot{x}_1(\sigma)=0$，$x_2(\sigma)=0$，$\dot{x}_2(\sigma)=1$ 立即推出 $x_1(t)$，$x_2(t)$满足(7.5)．反之，取这两个解 $x_1(t)$，$x_2(t)$用常数变易公式立即导出(7.6)．

**定理** 7.6　若成立条件：

(1)方程(7.4)的一切解有界．

(2)$\int^\infty |b(t)|dt<\infty$．

(3)$|f(x)|\leqslant f(|x|)$．当 $x>0$ 时 $f(x)$正值单增．

(4)$\int^\infty \dfrac{dx}{f(x)}=\infty$．

则(7.3)的一切解有界．

**证**　对$\forall\ \sigma\in R$，$\varphi\in C$．由引理 7.1 推出(7.3)的解可以表示为(7.6)，其中$C_1$，$C_2$ 为任意常数．

记 $M=\max\left[\sup\limits_{\sigma\leqslant t<\infty}|x_1(t)|,\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}|x_2(t)|,\int_\sigma |b(t)|dt\right]$，

$C=C_1+C_2$，

则当 $t\geqslant\sigma+\tau$ 时有

$$|x(t-\tau(t))|\leqslant CM+2M^3+2M^2\int_\sigma^{t-\tau(t)}|b(s)|f(x(s-\tau(s)))ds$$

$$\leqslant CM+2M^3+2M^2\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds \tag{7.7}$$

再记 $A=CM+2M^3, B=2M^2$,由(3)有

$$f(|x(t-\tau(t))|)\leqslant f(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds)$$

由此得

$$\frac{B|b(t)|f(|x(t-\tau(t))|)}{f(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds)}\leqslant B|b(t)|$$

记 $\Phi(u)=\int_A^u\frac{ds}{f(s)}$. $A<u$,则上式为

$$\frac{d}{dt}\Phi(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|ds)\leqslant B|b(t)|.$$

上式两边自 $\sigma$ 到 $t(t>\sigma)$ 积分得

$$\Phi(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds)\leqslant\int_\sigma^t B|b(s)|ds$$

由于 $\Phi(u)$ 单增,故

$$A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)ds\leqslant\Phi^{-1}(\int_\sigma^t B|b(s)|ds)$$

注意到 $M$ 的定义及(7.7)⇒当 $t\geqslant\sigma+\tau$ 时

$$|x(t-\tau(t))|\leqslant\Phi^{-1}(BM)$$

定理证毕.

上述例子既说明由线性部分控制非线性部分的 Bellman 方法,又表现出用常微分方程控制时滞系统的例子. 所论性态是有界性.

对于生态时滞系统,正解非 0 加上有界,构成生态系统持久性的全部含 义. 不仅如此,在诸多应用领域中有界性及这种界的估计是至关重要的.

## §8 非算子型 NFDE 的稳定性

考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{8.1}$$

$$\dot{x}(t)=\tilde{f}(t,x_t,\dot{x}(t-r(t)),\int_{-r}^{-\tau}A(t,\theta)G(\dot{x}(t+\theta))d\theta) \tag{8.2}$$

记 $C_H=\{\varphi\in C:|\varphi|<H\}$. $0<\tau\leqslant r(t)\leqslant r$. $A$ 为 $n\times n$ 连续函数阵. $G:R^n\to R^n$, $f:R_+\times R^n\times R^n\to R^n$, $\tilde{f}:R_+\times C_H\times R^n\times R^n\to R^n$, 都是连续的. 且 $f(t,0,0)=0$, $\tilde{f}(t,0,0,0)=0$. 它们都满足局部 Lipschitz 条件, 分别为

$$\begin{aligned}&|f(t,x(t),x(t-\tau(t)))-f(t,y(t),y(t-\tau(t)))|\\&\leqslant L[|x(t)-y(t)|+|x(t-\tau(t))-y(t-\tau(t))|]\end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}&|\tilde{f}(t,x_t,\dot{x}(t-r(t)),\int_{-r}^{-\tau}A(t,\theta)G(\dot{x}(\tau+\theta))d\theta)\\&-\tilde{f}(t,y_t,\dot{y}(t-r(t)),\int_{-r}^{-\tau}A(t,\theta)G(\dot{y}(t+\theta))d\theta)|\\&\leqslant L_1|x_t-y_t|+L_2|\dot{x}(t-r(t))-\dot{y}(t-r(t))|\\&+L_3\int_{-r}^{-\tau}|A(t,\theta)|\alpha\cdot|\dot{x}(t+\theta)-\dot{y}(t+\theta)|d\theta\end{aligned} \tag{8.4}$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 是常数, $L,L_1,L_2,L_3$ 是常数或正值连续不减函数. $L_i(0)=0(i=1,2,3)$ 且对 $\forall\ \rho>0$, 当 $\mu\to 0$ 时

$$L_3[\int_{-r}^{-\tau}|A(t,\theta)|\alpha(\rho+\mu)d]-L_3[\int_{-r}^{-\tau}|A(t,\theta)|\alpha\rho d\theta]\to 0$$

对 $t\geqslant 0$ 一致成立.

设(8.1)或(8.2)的初始函数 $\varphi\in C_H$. 当 $\theta\in[-r,0]$, $\varphi(\theta)$ 或者连续, 或者至多有有限个第一类间断点.

**定义 8.1** 称(8.1)(或(8.2))的零解为稳定的,若对$\forall\ \epsilon>0$, $\sigma\geqslant 0$,$\exists\ \delta=\delta(\sigma,\epsilon)$,使对$\forall\ \varphi\in C$,当$|\varphi|<\delta(\sigma,\epsilon)$,$|\dot{\varphi}|<\delta(\sigma,\epsilon)$时,$|x(t,\sigma,\varphi)|<\epsilon, t\geqslant\sigma$.

若上述$\delta$与$\sigma$无关,则称(8.1)(或(8.2))的零解是一致稳定的.

若方程(8.1)(或 8.2))的零解稳定,且对$\forall\ \sigma\in R_+$,$\exists\ \delta(\sigma)\geqslant 0$,使当$|\varphi(\theta)|<\delta(\sigma)$,$|\dot{\varphi}(\theta)|<\delta(\sigma)$,$\theta\in[-r,0]$时有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t,\sigma,\varphi)=0$,则称(8.1)(或 8.2))的零解渐近稳定.

注意现在定义中增加了$|\dot{\varphi}|<\delta$这一限制.当$f$是线性自治的情形在§2 中已述及.$f$为非线性时,仍可用 Ляпунов 方法.对连续函数$V: R_+\times R^n\to R_+$,导数为

$$V_{(8.1)}(t,\varphi(0))\ (\text{或}\ V_{(8.2)}(t,\varphi(0)))$$
$$=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h,t,\varphi))-V(t,\varphi(0))] \qquad (8.5)$$

我们对(8.2)给出两个稳定性准则((8.1)是(8.2)的特殊情形).设$\exists$ 连续严格单增函数$k: R_+\to R_+$,$k(0)=0$,$k(s)\geqslant s$,使当$Z\leqslant L_1(r)+L_2(Z)+L_3(\int_{-r}^{-r}|A(t,\theta)|\alpha z d\theta)$时,$Z\leqslant k(\Gamma)$.

**定理 8.1** 设存在连续函数$V: R_+\times R^n\to R$及楔函数$u, v$满足

(1)$u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$.

(2)对$t\geqslant T\geqslant\sigma$及任意的连续函数$N: R_+\to R_+$,当$V(s,x(s))\leqslant N(t)$,$|\dot{x}(s)|\leqslant K[u^{-1}(N(t))]$对$T-r\leqslant s\leqslant t$成立时有

$$V_{(8.2)}(t,x(t))\leqslant F(t,V(t),N(t)),$$

其中$F(t,V,V)\leqslant -W(V)+g(t)G(V)$,$W(s)$连续,当$s>0$时,$W(s)>0$,$g(t)\geqslant 0$,$\int^{+\infty} g(t)dt<+\infty$,$G(V)$连续,$\lim\int^{V}\frac{dV}{G(V)}=+\infty$,对$\alpha>0$成立,则(8.2)的零解一致稳定.

**证** 作方程

$$\dot{y}(t)=\bar{g}(t)G(y),\bar{g}(t)=g(t)+\frac{1}{1+t^2} \tag{8.6}$$

对$\forall\ \varepsilon>0,\varepsilon<\min\{H,k^{-1}(H)\}$，选择$\varepsilon_1>0$使$\varepsilon_1>\min\{\varepsilon,u(\varepsilon)\}$

由条件(2)$\Rightarrow\exists\ y_0>0,y_0<\varepsilon_1$，使得

$$\int_{y_0}^{\varepsilon_1}\frac{dy}{G(y)}=\bar{M}=\int_0^{+\infty}\bar{g}(t)dt$$

设$y(t)$为(8.6)的解，$y(\sigma)=y_0$，则

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{G(y)}=\int_0^t\bar{g}(t)dt<\int_0^{+\infty}\bar{g}(t)dt=\bar{M}=\int_{y_0}^{\varepsilon_1}\frac{dy}{G(y)} \tag{8.7}$$

故当$t\geqslant\sigma$时，有$0<y_0\leqslant y(t)\leqslant\varepsilon_1$.

取$\delta>0$，使$\delta<\min\{y_0,u^{-1}(y_0),k^{-1}(\varepsilon_1)\}$及$v(\delta)\leqslant y_0$，下面要证当$|\varphi(\theta)|<\delta,|\dot{\varphi}(\theta)|<\delta$时对方程(8.2)的解$x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$，$V(t)=V(t,x(t))$满足

$$V(t)\leqslant y(t),t\geqslant\sigma \tag{8.8}$$

因为$V(\sigma)\leqslant v(|\varphi(0)|)=v(|\varphi(0)|)\leqslant v(\delta)\leqslant y(\sigma)$. 若(8.8)不成立，则$\exists\ t_1>\sigma$使$V(t)\leqslant y(t),\sigma\leqslant t\leqslant t_1,V(t_1)=y(t_1)$及存在足够小的$\gamma>0$和数列$\bar{t}_i\in[t_1,t_1+\gamma]$，使

$$V(\bar{t}_i)>y(\bar{t}_i)，且\lim_{i\to\infty}\bar{t}_i=t_1$$

由上极限的定义$\Rightarrow$

$$\dot{V}(t_1)\geqslant\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1}=\bar{g}(t_1)G(y(t_1))=\bar{g}(t_1)G(V(t_1)) \tag{8.9}$$

另一方面，当$\sigma-r\leqslant s\leqslant t$时，$V(s)\leqslant V(t_1)$，即

$$|x(s)|\leqslant u^{-1}(V(s))\leqslant u^{-1}(V(t_1))$$

而当$\sigma-r\leqslant\eta\leqslant\sigma$时

$$|\dot{x}(\eta)|\leqslant\delta\leqslant u^{-1}(y_0)\leqslant u^{-1}(y(t_1))\leqslant u^{-1}(V(t_1))$$
$$\leqslant k[u^{-1}(V(t_1))]$$

由(8.1)及本定理的事先假定$\Rightarrow$当$\sigma-r<s\leqslant t_1$时有

$|\dot{x}(s)|\leqslant k[u^{-1}(V(t_1))]$，再由(2)⇒

$$V(t_1)\leqslant g(t_1)G(V(t_1))<\bar{g}(t_1)G(V(t_1)).$$

这与(8.9)不合⇒(8.8)成立⇒当 $t\geqslant\sigma$ 时有

$$u(|x(t)|)\leqslant V(t)\leqslant y(t)<\varepsilon_1<u(\varepsilon).$$

故 $|x(t)|<\varepsilon, t\geqslant\sigma$ 因 $\delta<y_0$ 与 $\sigma$ 无关⇒方程(8.2)的零解为一致稳定. 证毕.

**定理** 8.2 设定理 8.1 的所有条件满足，$g(t)=0$，且

(3)∃ 常数 $h>0$，使

$$|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant h|N_1-N_2|, t\geqslant 0$$

$V\geqslant 0, N_1, N_2\geqslant 0$，则(8.2)的零解渐近稳定.

**证** 由定理 8.1⇒零解一致稳定，故只须证(8.2)的零解吸引. 设 $\delta_0>0$ 由一致稳定性所确定的，使当 $|\varphi(\theta)|<\delta_0$，$|\dot{\varphi}(\theta)|<\delta_0$ 时，$|x(t)|=|x(t,\sigma,\varphi)|<1, t\geqslant\sigma$. 记

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}V(t,x(t))=\bar{\Gamma}, \underline{\lim_{t\to\infty}}V(t,x(t))=\underline{\Gamma}, \overline{\lim_{t\to\infty}}|\dot{x}(t)|=\rho.$$

对∀ $\mu>0$，∃ $T>\sigma+r$，使当 $t\geqslant T-r$ 时

$$V(t,x(t))\leqslant\bar{\Gamma}+\mu, |\dot{x}(t)|\leqslant\rho+\mu.$$

又∃ $T'>T$，$T'$ 可任意大，使 $|\dot{x}(T')|\geqslant\rho-\mu$，因

$$|x_{T'}|\leqslant u^{-1}(\sup_{\theta\in[-r,0]}V(T'+\theta))\leqslant u^{-1}(\bar{\Gamma}+\mu)$$

从而有

$$\rho-\mu\leqslant|\dot{x}(T')|\leqslant L_1(u^{-1}(\bar{\Gamma}+\mu))+L_2(\rho+\mu)$$
$$+L_3[\int_{-r}^{-r}|A(T',\theta)|\alpha(\rho+\mu)d\theta].$$

即

$$-\mu\leqslant L_1(u^{-1}(\bar{\Gamma}))+L_2(\rho)+L_3[\int_{-r}^{-r}|A(T',\theta)|\alpha\rho d\theta]-\rho+\psi(u)$$

其中 $\psi(u)=L_1[u^{-1}(\bar{\Gamma}+\mu)]-L_1[u^{-1}(\bar{\Gamma})]+L_2(\rho+\mu)$

$$-L_2(\rho)+L_3[\int_{-r}^{-\tau}|A(T',\theta)|\alpha(\rho+\mu)d\theta]$$

$$-L_3[\int_{-r}^{-\tau}|A(T',\theta)|\alpha\rho d\theta]\to 0 \quad 当\ \mu\to 0.$$

故必有

$$0\leqslant L_1[u^{-1}(\bar{\Gamma})]+L_2(\rho)+L_3[\int_{-r}^{-\tau}|A(T',\theta)|\alpha\rho d\theta]-\rho$$

由所设有

$$\rho\leqslant k[u^{-1}(\bar{\Gamma})] \tag{8.10}$$

若 $\bar{\Gamma}>\underline{\Gamma}$，则 $V(t)$ 有无穷个不减区间，∃ $\gamma>0$ 及足够大的 $\hat{T}>T$ 使 $V(\hat{T}-\gamma)>\bar{\Gamma}-\mu$ 且在 $(\hat{T}-\gamma,\hat{T})$ 上 $V(t)$ 不减，因而 $\dot{V}(t)\geqslant 0$ 及 $V(t)\geqslant\bar{\Gamma}-\mu$，因 $\mu>0\Rightarrow$

$$\psi(\bar{\Gamma},\mu)\equiv k[u^{-1}(\bar{\Gamma}+\mu)]-k[u^{-1}(\bar{\Gamma})]>0$$

令 $\hat{a}=\min\{\mu,\psi(\bar{\Gamma},\mu)\}$，取 $\hat{T}$ 足够大使

$$|\dot{x}(s)|\leqslant\rho+\hat{a}\leqslant k[u^{-1}(\bar{\Gamma})]+\psi(\bar{\Gamma},\mu)=k(u^{-1}(\bar{\Gamma}+\mu)) \tag{8.11}$$

对 $s\geqslant\hat{T}-\gamma$ 成立．由条件(2)⇒当 $\hat{T}-\gamma\leqslant t\leqslant\hat{T}$ 时

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&\leqslant F(t,V(t),\bar{\Gamma}+\mu)\\&\leqslant F(t,V(t),V(t))+|F(t,V(t),\bar{\Gamma}+\mu)-F(t,V(t),V(t))|\\&\leqslant -W(\bar{\Gamma})+[W(\bar{\Gamma})-W(V(t))]+2h\mu.\end{aligned}$$

此因 $\bar{\Gamma}-\mu\leqslant V(t)\bar{\Gamma}+\mu$ 及 $|F(t,V(t),\bar{\Gamma}+\mu)-F(t,V(t),V(t))|\leqslant h|\bar{\Gamma}+\mu-V(t)|\leqslant 2h\mu$．再由 $W,V$ 均为连续．故当 $\mu\to 0$ 时有 $W(V(t))-W(\bar{\Gamma})\to 0\Rightarrow$∃ $\mu$ 充分小使

$$\dot{V}(t)\leqslant-\frac{1}{2}W(\bar{\Gamma})<0,\quad t\in(\hat{T}-\gamma,\hat{T}).$$

这与 $V(t)$ 不减矛盾⇒$\bar{\Gamma}=\underline{\Gamma}$，因此对 $\mu>0$，∃ $\tilde{T}>T$ 使得

$$\bar{\Gamma}-\mu\leqslant V(t)\leqslant\bar{\Gamma}+\mu,对\ t\geqslant\tilde{T}\ 成立.$$

仿上做法，若 $\bar{\Gamma}\neq 0$，则

$$V(t)\leqslant -\frac{1}{2}W(\Gamma)\text{对 } t\geqslant \tilde{T}\text{成立}.$$

$\Rightarrow V(t)\leqslant V\tilde{T}-\frac{1}{2}W(\bar{\Gamma})(t-\tilde{T})\to -\infty$. 当 $t\to\infty\Rightarrow$矛盾，故必须有 $\Gamma=0$. $\Rightarrow$(8.2)零解渐近稳定. 证毕.

**定理** 8.3 设定理 8.1 全部条件满足，且

(4)存在绝对可积函数 $h(t)$使

$$|F(t,V,N_1)-F(t,V,N_2)|\leqslant h(t)|N_1-N_2|,t\geqslant 0$$

其中 $V\geqslant 0,N_1,N_2\geqslant 0$. 则(8.2)的零解渐近稳定.

证明从略[11].

**例** 19 考虑线性方程且

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-r(t))+C(t)\dot{x}(t-r(t))\tag{8.12}$$

其中 $A(t),B(t),C(t)$是 $t\geqslant 0$ 时的 $n\times n$ 连续函数阵. $0<\tau\leqslant r(t)\leqslant r$. $\tau,r$ 为常数.

令 $M_A=\sup\limits_{t\geqslant 0}|A(t)|,M_B=\sup\limits_{t\geqslant 0}|B(t)|,M_C=\sup\limits_{t\geqslant 0}|C(t)|$，设 $0<M_C<1$. 又设 $K_1(s)=(M_A+M_B)s,K_2(s)=M_Cs,K(s)=\dfrac{M_A+M_B}{1-M_C}s=Ks$.

那末有

$$\begin{aligned}&|A(t)x(t)+B(t)x(t-r(t))+C(t)\dot{x}(t-r(t))|\\&\leqslant K_1(|x_t|)+K_2(|\dot{x}(t-r(t))|)\end{aligned}$$

且当 $z\leqslant K_1(\Gamma)+K_2(z)$时，$z\leqslant\dfrac{M_A+M_B}{1-M_C}\Gamma=K(\Gamma)$. 即满足定理 8.1 的前提. 今设 $V(x):R^n\to R_+$连续，且满足

$$a|x|^2\leqslant V(x)\leqslant b|x|^2\tag{8.13}$$

$a,b$ 为正常数. 又设$\dfrac{\partial V}{\partial x}$存在且

$$|(\frac{\partial V}{\partial x})'|\leqslant\lambda|x|\tag{8.14}$$

其中 $\lambda$ 为正常数. 则 $V(x)$沿(8. 12)的全导数为

$$\frac{dV(x(t))}{dt}\Big|_{(8.12)}=(\frac{\partial V}{\partial x})'[A(t)x(t)$$

$$+B(t)x(t-r(t))+C(t)\dot{x}(t-r(t))] \tag{8.15}$$

又设 $(\frac{\partial V}{\partial x})'A(t)x\leqslant -W(x) \quad l=\text{const.}>0$ (8.16)

设 $x(t)$为(8. 12)的解,对$\forall$ $N(t)>0$,当

$$V(x(s))\leqslant N(t),|\dot{x}(s)|\leqslant K(\frac{N(t)}{a})^{\frac{1}{2}},t-r\leqslant s\leqslant t$$

时成立

$$\frac{dV(x(t))}{dt}\Big|_{(8.12)}\leqslant -lV(x(t))+\lambda(\frac{N(t)}{a})^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot[M_B|x(t-r(t))|+M_C|\dot{x}(t-r(t))|]$$

$$\leqslant -lV(x(t))+\lambda\left(\frac{N(t)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}[M_B\left(\frac{N(t)}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+M_CK\left(\frac{N(t)}{a}\right)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\equiv F(V,N)$$

再设

$$-l+\frac{\lambda}{a}(M_B+M_C)<0 \tag{8.17}$$

则分别有

$$F(V,V)=[-l+\frac{\lambda}{a}(M_B+KM_C)]V<0,\text{当 } V>0 \text{ 时.}$$

$$|F(V,N_1)-F(V,N_2)|\leqslant\frac{\lambda}{a}(M_B+KM_C)|N_1-N_2|$$

$\Rightarrow$当条件(8. 13)(8. 14)(8. 16)(8. 17)满足时,定理 8. 2 的所有条件成立$\Rightarrow$(8. 12)零解是渐近稳定的.

## §9 NFDE$(D,f)$的稳定性

在本章结束之前要讨论算子型中立型方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{9.1}$$

的稳定性.设(9.1)满足第六章解的整体存在唯一性条件,并沿用相同的记号.

**定义** 9.1 给定$D(\varphi):C\to R^n$是线性连续算子,在0处是原子的,且记$C_D=\{\varphi\in C:D\varphi=0\}$.算子$D$叫做稳定的,如果齐次差分方程

$$Dy_t=0,t\geq 0,y_0\in\psi\in C_D \tag{9.2}$$

的零解是一致渐近稳定的.

同样地$T_D(t)$是(9.2)的解定义的线性变换半群.$T_D(t):C_D\to C_D,t\geq 0$.而$a_D$表示$T_D(t)$的阶.

**定理** 9.1 $D(\varphi)$线性连续,在0处原子,则下列诸命题是等价的.

(1)$D$是稳定的.

(2)$a_D<0$.

(3)存在常数$a>0,b>0$,使得对任意的$h\in C(R_+,R^n)$,非齐次方程

$$Dy_t=h(t)\quad t\geq 0 \tag{9.3}$$

的解$y(t)$满足

$$|y_t|\leq be^{-at}|y_0|+b\sup_{0\leq u\leq t}|h(u)|,t\geq 0 \tag{9.4}$$

(4)若$D\varphi=\varphi(0)-\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(\theta)]\varphi(\theta)$,$\operatorname*{Var}_{[-s,0]}\mu\to 0,s\to 0$.并且$\mu$无奇异部分,则存在一个$\delta>0$使得特征方程

$$h(\lambda)=\det|\lambda I-\int_{-r}^{0}e^{\lambda\theta}d\mu(\theta)|=0 \tag{9.5}$$

的所有根满足 $\mathrm{Re}\lambda\leqslant-\delta$.

**证** (1)⇒(2)

由方程(9.2)的零解渐近稳定⇒∃ $\delta_0>0$,使当 $\varphi\in C_D$, $|\varphi|<\delta_0$ 时,$y(t)=y(t,\varphi)$满足

$$|y_1(\varphi)|<1\Rightarrow|T_D(t)\varphi|<1$$

从而有

$$|T_D(t)|<1/\delta_0,t\geqslant0$$

再由(9.2)零解的渐近稳定性⇒对∀ $\eta>0$,∃ $\tau=\tau(\eta)>0$,使当 $t\geqslant\tau(\eta)$时,有

$$|T_D(t)\varphi|<\eta,\ |\varphi|<\delta_0$$

取 $\eta=\dfrac{\delta_0}{2}$,$\tau_0=\tau(\eta)$,则当 $t\geqslant\tau_0$ 时,有

$$|T_D(t)\varphi|<\frac{\delta_0}{2},\ |\varphi|<\delta_0\Rightarrow|T_D(\tau_0)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

对∀ $t\geqslant0$, 存在正整数 $n$ 及 $\tau^*\in[0,\tau_0]$, 使 $t=n\tau_0+\tau^*$, 由 $T_D(t)$全体为半群⇒

$$\begin{aligned}|T_D(t)|&=|T_D(n\tau_0+\tau^*)|\leqslant|T_D(\tau^*)|\,|T_D(T_0)|^n\\&\leqslant\frac{1}{\delta_0}2^{-\frac{t-\tau^*}{\tau_0}}\leqslant\frac{2}{\delta_0}e^{-\frac{t}{\tau_0}\ln2}\Rightarrow a_D\leqslant-\frac{1}{\tau_0}\ln2\leqslant0.\end{aligned}$$

(2)⇒(3)

由 $a_D<0$,取 $a>0$ 使 $a_D<-a<0$,由 $a_D$ 的定义⇒∃ $K_1=K_1(a)$使得

$$|T_D(t)|\leqslant K_1e^{-at},t\geqslant0$$

设 $y(\psi,h)(t)$为(9.3)过$(0,\psi)$的解,由第六章§6 引理 6.2⇒

$$\begin{aligned}y(\psi,h)(t)&=y(\Psi\psi,\theta)(t)+y(\Phi h(0),h)(t)\\&=|(T_D(t)\Psi\psi)(0)|+K_D(t)h\end{aligned}$$

再由第六章的定理 6.3⇒

$$\begin{aligned}|y(\psi,h)(t)|&\leqslant|(T_D(t)\Psi\psi)(0)|+|K_D(t)h|\\&\leqslant|T_D(t)|\,|\Psi\psi|+K\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|h(u)|\end{aligned}$$

$$\leqslant K_1 e^{-at}|\Psi||\varphi|+K\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|h(u)|.$$

令 $b=\max\{K_1,|\Psi|,K\}\Rightarrow(3)$. 而(3)⇒(1)是显然的.

(2)⇐⇒(4)作为练习,或者参看[4].

**定义** 9.2 设 $D(t,\varphi)\in C(R\times C,R^n)$,若∃ 常数 $a,b>0$,使得对∀ $h\in C(R_+,R^n)$,非齐次差分方程

$$D(t,y_t)=h(t),t\geqslant\sigma \tag{9.6}$$

的解 $y(t)$ 满足

$$|y_t|\leqslant be^{-a(t-\sigma)}|y_\sigma|+b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant t}|h(u)|,t\geqslant\sigma \tag{9.7}$$

则称 $D$ 算子是一致稳定的.

设 $D$ 是自治的,即(9.1)为

$$\frac{d}{dt}D(x_t)=f(x_t),t\geqslant 0. \tag{9.8}$$

对连续映射 $V(\varphi):C\to R^n$,定义 $V$ 关于(9.8)的导数为

$$V_{(9.8)}(\varphi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(x_h(\varphi))-V(\varphi)].$$

**定义** 9.3 对自治 NFDE$(D,f)$(9.8),称 $V\in C(c,R^n)$为在 $G\subseteq C$ 上的 Ляпунов 泛函,若 $V$ 在 $G$ 的闭包 $\overline{G}$ 上连续,且在 $G$ 上有 $V_{(9.8)}(\varphi)\leqslant 0$. 令

$$S=\{\varphi\in\overline{G},V_{(9.8)}(\varphi)=0\}$$

$M=S$ 中关于 NFDE$(D,f)$的最大不变集

作为稳定性相应定理的推广. 可设 $M=\{0\}$. 我们有

**定理** 9.2 设(9.8)中算子 $D$ 是一致稳定的,$V$ 是 $G$ 上(9.8)的 Ляпунов 泛函. $r^+(\varphi)\subseteq G$. 而且,或者 $x_t(\varphi)$有界,或者 $Dx_t(\varphi)$有界,$t\geqslant 0$. 则当 $t\to\infty$时,$x_t(\varphi)\to M$. 若

$$G=U_l=\{\varphi\in C:V(\varphi)<l\}$$

且∃ 常数 $K=K(l)$使 $\varphi\in U_l\Rightarrow|\varphi(0)|<K$ 或 $|D\varphi|<K$,则当 $\varphi\in U_l$ 时,$x_t(\varphi)\to M,t\to\infty$.

这说明(9.8)的稳定性性质很接近于 RFDE$(f)$,有关§3 的定理均可推广到(9.8)上来.

对(9.1). 设 $D, f\in C(R_+\times C, R^n)$. $D$ 在 0 处是原子的. $f(t,0)=D(t,0)=0$, 对 $V\in C([-r,\infty)\times C, R)$, 定义

$$V_{(9.1)}(t,\varphi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)\} \quad (9.9)$$

设不变集 $S$ 中最大者 $M=\{0\}$, 换言之, 我们讨论(9.1)零解的稳定性.

**引理** 9.1　设算子 $D$ 是一致稳定的, (9.1)过$(\sigma,\varphi)$的解记为 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$, 则对任意的连续函数 $\alpha: R_+\to R_+$, $\alpha(0)=0$, $\delta>0$ 时, $\alpha(\delta)>0$, $\exists$ 连续函数 $\beta: R_+\to R_+$, $\beta(0)=0$, $\beta(\delta)>0$. 当 $\delta>0$ 时, 成立

(1)当 $|\varphi|<\delta$ 时, 若 $|D(t,x_t)|\leqslant\alpha(\delta)$, $t\geqslant\sigma$, 则

$$|x_t|\leqslant\beta(\delta), t\geqslant\sigma$$

(2)对$\forall$ $M\geqslant\delta$ 和 $A>0$, $\exists$ $T=T(M,\delta,A)>0$, 使当 $|\varphi|\leqslant M$ 时, $|D(t,x_t)|\leqslant\alpha(\delta)$, $t\geqslant\sigma$ 时有

$$|x_t|\leqslant\beta(\delta)+A, t\geqslant\sigma+T$$

**证**　(1)由(9.7)取 $\beta(\delta)\geqslant b(\delta+\alpha(\delta))$即得. 对(2)取

$$T>\max\{0,\frac{1}{a}\ln\frac{bM}{\beta(\delta)+A-b\alpha(\delta)}\}$$

则当 $t\geqslant\sigma+T$ 时由(9.7)得

$$|x_t|\leqslant be^{-a(t-\sigma)}|\varphi|+b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant t}|D(u,x_u)|$$

$$\leqslant be^{-aT}M+b\alpha(\delta)\leqslant\beta(\delta)+A$$

证毕.

**定理** 9.3　设(9.1)中算子 $D$ 一致稳定. $f: R\times(C$ 中有界集$)\to R^n$ 中有界集. 若$\exists$ 连续函数 $V: R\times C\to R^n$, 满足

(1)$u(|D(t,\varphi)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$

(2)$V_{(9.1)}(t,\varphi)\leqslant-W(|D(t,\varphi)|)$.

其中 $u, v, w$ 为连续非减函数, $u(0)=v(0)=0$, 当 $s>0$ 时, $u(s)$, $v(s)$, $W(s)>0$ 且存在连续函数 $\alpha(s)$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(s)>0$, $s>0$ 时使 $v(s)\leqslant u(\alpha(s))$.

则(9.1)的零解为一致渐近稳定.

**证** 设 $\beta(\delta)$ 由引理 9.1 确定，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta$，$0<\delta<\varepsilon$，$\beta(\delta)<\varepsilon$，由(1)(2)得出，当 $|\varphi|\leqslant\delta$ 时，对 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$，有

$$u(|D(t,x_t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(\sigma,\varphi)$$

$$\leqslant v(|\varphi|)\leqslant v(\delta)\leqslant u(a(\delta)),t\geqslant\sigma.$$

从而有

$$|D(t,x_t)|\leqslant a(\delta),t\geqslant\sigma$$

由引理 9.1⇒

$$|x_t|\leqslant\beta(\delta)<\varepsilon,t\geqslant\sigma$$

即(9.1)的零解一致稳定.下面证其为一致渐近稳定：

设 $\delta_0=\delta(1)$. 对 $\forall\ \eta>0$，要证 $\tau=\tau(\eta)>0$，使当 $t\geqslant\sigma$，$|\varphi|\leqslant\delta_0$ 时，对(9.1)的解 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$ 有

$$|x_t|\leqslant\eta,\text{当 } t\geqslant\sigma+\tau(\eta) \tag{9.10}$$

若(9.10)不成立，则有 $|x_t|\geqslant\delta=\delta(\eta)$，$t\geqslant\sigma$，由(9.7)，对 $\forall\ \tau\geqslant\sigma$ 有

$$\delta\leqslant|x_t|\leqslant be^{-a(t-\tau)}|x_\tau|+b\sup_{\tau\leqslant u\leqslant t}|D(u,x_u)| \tag{9.11}$$

选取正数 $\hat{r}$，使 $\hat{r}>\max\{0,\frac{1}{a}\ln\frac{2b}{\delta}\}$，记 $\hat{\sigma}=\sigma+\hat{r}$，由(9.11)得到

$$\delta\leqslant|x_{\hat{\sigma}}|\leqslant be^{-a\hat{r}}|x_\sigma|+b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant\hat{\sigma}}|D(u,x_u)|$$

$$\leqslant\frac{\delta}{2}+b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant\hat{\sigma}}|D(u,x_u)|$$

从而有

$$b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant\hat{\sigma}}|D(u,x_u)|\geqslant\frac{\delta}{2}$$

⇒存在 $t_1'\in[\sigma,\hat{\sigma}]$使 $|D(t_1',x_{t_1'})|\geqslant\frac{\delta}{2b}$，同理有

$$|D(t_k',x_{t_k'})|\geqslant\frac{\delta}{2b},t_k'\in[\hat{t}_{k-1},\hat{t}_k]$$

其中 $\hat{\sigma}=\sigma$，$\hat{t}_k=\sigma+k\hat{r}(k=1,2\cdots\cdots)$，再由 $f$ 的有界性⇒存在常数 $L$ 使

$$|\frac{d}{dt}D(t,x_t)|<L,\text{当 } t\geqslant\sigma$$

故当$|x_t|\geqslant\delta$，对$t\geqslant\delta$成立时，$\exists\ t_i\in[\sigma+(2i-1)\hat{r},\sigma+2i\hat{r}]$，$i=1,2$……使$|D(t_i,x_{t_i})|\geqslant\frac{\delta}{4b}$，从而

$$|D(t,x_t)|\geqslant\sigma/4b，当\ t\in[t_i-\frac{\delta}{4Lb},t_i+\frac{\delta}{4Lb}]$$

不妨设$L$取适当大使$\frac{\delta}{4Lb}<\frac{\hat{r}}{2}$，因而各区间$[t_i-\frac{\delta}{4bL},t_i+\frac{\delta}{4bL}]$互不相交，此时有

$$\dot{V}_{(9.1)}(t,x_t)\leqslant-W(\frac{\delta}{4b})，当\ t\in[t_i-\frac{\delta}{4bL},t_i+\frac{\delta}{4bL}].$$

从而有

$$V(t_k,x_{t_k})\leqslant V(\sigma,\varphi)-W(\frac{\delta}{4b})\frac{\delta}{4Lb}(k-1)$$

选取正整数$k>1+V(\delta_0)/[\frac{\delta}{2Lb}W(\frac{\delta}{4b})]$，则有

$$V(t_k,x_{t_k})<V(\sigma,\varphi)-W(\frac{\delta}{4b})\frac{\delta}{2Lb}V(\delta_0)/[\frac{\delta}{2Lb}W(\frac{\delta}{4b})]\leqslant0$$

$\Rightarrow$矛盾. 这表明$\exists\ t^*\in[\sigma,\sigma+2k\hat{r}]$使$|x_{t^*}|\leqslant\delta\Rightarrow|x_t|<\eta$，当$t\geqslant\sigma+2k\hat{r}$. 即(9.1)零解一致渐近稳定. 证毕.

对(9.1)同样可以建立拉兹密辛型定理. 我们举一个定理而不加以证明.

**定理**9.4　设(9.1)中算子$D$是一致稳定的，且$|D(t,\varphi)|\leqslant k|\varphi|$，$k$为某一常数，$f:R\times C\to R^n$是连续的，并且$R\times$($C$中有界集)映入$R^n$中的有界集. 设存在连续函数$V:R_+\times R^n\to R$及满足定理9.3条件的$u,v,w,v(ks)\leqslant u(\alpha(s))$，$s\geqslant0$. 以及连续非减函数$F:R_+\to R_+$，$F(v(k\eta))>v(\beta(\eta))$，$\eta>0$，使得

(1)$u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)$.

(2)当$F(V(t,D(t,x_t)))\geqslant V(\xi,x(\xi))$对$t-r\leqslant\xi\leqslant t$成立时有

$$\dot{V}_{(9.1)}(t,D(t,x_t))\leqslant-W(|D(t,x_t)|)$$

则(9.1)的零解为一致渐近稳定.

**例 20** 考虑方程

$$\dot{x}(t)-q\dot{x}(t-r)=-g(x(t)) \tag{9.12}$$

其中 $|q|<1$，$g$ 连续，$g(0)=0$，写成算子形式 $D\varphi=\varphi(0)-q\varphi(-r)$，若 $|q|<\frac{1}{2}$，$xg(x)>0(x\neq 0)$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}|g(x)|=\infty$，则方程(9.12)的零解一致渐近稳定.

事实上，作 $V=x^2$，$u(s)=v(s)=s^2$，$F(s)=N^2s$，其中 $N>(1-|q|)^{-1}$，$\alpha(\eta)=(1+|q|)\eta$，$\beta(\eta)=\frac{1+|q|}{1-|q|}\eta$. 便可以逐一验证定理 9.4 的条件满足，因而一致渐近稳定成立.

总之，对中立型泛函微分方程的稳定性问题，研究较多的是 NFDE$(D,f)$，因为此时的稳定性准则比较明确地分为两个部分. 1)加在算子 $D$ 上的条件. 2)加在 $f$ 上的条件. 上述诸定理都体现出这一事实.

# 第八章

# FDE 的周期解

本章介绍 FDE 周期解存在性的判断准则. 内容充分顾及各种方法的多样性,而不大量引用有关的平行推广.

## §1 线性自治 DDE 的周期解

### 1. 周期方程与周期解的性质

设 $x\in R^n$. 考虑 DDE

$$\dot{x}(t)=F(t_1,x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau)) \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t)=G(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{1.2}$$

其中 $F$, $G\in R^n$. $\tau=\text{const.}\geqslant 0$. 设(1.1)存在周期为 $T$ 的周期解 $x_1(t)$,则由 $x_1(t)$代入(1.1)(或(1.2))得恒等式

$$\dot{x}_1(t)\equiv F(t,x_1(t),x_1(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau))$$

$$\dot{x}_1(t+T)\equiv F(t+T,x_1(t+T),x_1(t+T-\tau),\dot{x}_1(t+T-\tau))$$

由所设 $x_1(t+T)\equiv x_1(t)$, $\dot{x}_1(t+T)\equiv\dot{x}_1(t)$. 合并上两式得

$$F(t+T,x_1(t),x_1(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau))$$
$$\equiv F(t,x_1(t),x_1(t-\tau),\dot{x}_1(t-\tau))$$

这说明当(1.1)(或(1.2))存在周期为 $T$ 的周期解 $x_1(t)$时,函数 $F$ 沿着这个解是周期为 $T$ 的周期函数,反之不真. 或者说(1.1)(或

(1.2))存在周期解时，右端函数未必关于 $t$ 是周期的.例如

**例** 1　对方程

$$\dot{x}(t)=\cos t+[x^2(t)+y^2(t)-1]F_1(t,x(t),y(t),$$
$$x(t-\tau),y(t-\tau))$$
$$\dot{y}(t)=-\sin t+[x^2(t)+y^2(t)-1]F_2(t,x(t),y(t),$$
$$x(t-\tau),y(t-\tau))$$

不问 $F_1,F_2$ 如何，恒有周期解 $x=\sin t,y=\cos t$(如果 $F_1,F_2$ 关于 $t$ 不是周期函数也可能有周期解).

**引理** 1.1　对方程

$$\dot{x}(t)=\hat{F}(x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))+f(t) \tag{1.3}$$

仅当 $f(t)$是周期函数时才有可能存在周期解，而且解的周期只能等于 $f(t)$的周期或者是它的整数倍，换句话说，(1.3)存在周期解的必要条件是 $f(t)$为 $t$ 的周期函数.事实上，设 $x(t)$是(1.3)周期为 $T$ 的周期解.用 $x(t+T)=x(t),x(t+T-\tau)=x(t-\tau),\dot{x}(t+T)=\dot{x}(t),\dot{x}(t+T-\tau)=\dot{x}(t-\tau)$代入(1.3)立即推得引理结论成立.

**2. 齐次线性自治 DDE 的周期解**

考虑线性自治 RDDE

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau) \tag{1.4}$$

$x\in R^n$，$A,B$ 为 $n\times n$ 常数阵，$\tau=\mathrm{const.}\geq 0$. 其特征方程为

$$h(\lambda,\tau)=\det|\lambda I-A-Be^{-\lambda\tau}|=0 \tag{1.5}$$

我们有如下定理(说及周期解时都是指非常数的).

**定理** 1.1　方程(1.4)存在周期解的充要条件为(1.5)有纯虚根(非零根).

**证**　充分性是显然的.这里证必要性.

设 $x(t)\in R^n$ 是(1.4)的一个周期解，不妨记它的周期为 $2l$，因为 $\tau=\mathrm{const.}$ 故不妨取 $\sigma=0$. 由 $x(t)$周期性$\Rightarrow x(t)$在$[-\tau,\infty)$上连

续可微，于是在其上可展开为 Fourier 级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{i\frac{k\pi}{l}t} \tag{1.6}$$

其中 $C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x(t_1)e^{-i\frac{k\pi}{l}t_1}dt_1$，由 $x(t)$ 的可微性有

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}i\frac{k\pi}{l}C_k e^{i\frac{k\pi}{l}t} \tag{1.7}$$

把(1.6)和(1.7)代入方程(1.4)得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[i\frac{k\pi}{l}I-A-Be^{-i\frac{k\pi}{l}\tau}]C_k e^{i\frac{k\pi}{l}t}=0$$

故有

$$[i\frac{k\pi}{l}I-A-Be^{-i\frac{k\pi}{l}\tau}]C_k=0, k=0,\pm1,\cdots\cdots$$

若(1.5)无纯虚根，则对一切 $k$ 有 $C_k=0\Rightarrow$ 矛盾．证毕．

**注 1.1** 若(1.4)中 $\tau=0$，则(1.4)为常微分方程，结论显然成立．

对 $n$ 阶线性自治方程

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^{(k)}(t-\tau)=0 \tag{1.8}$$

其中 $a_k\in R$，$\tau\in R_+$．其特征方程为

$$\lambda^n+(a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\lambda+a_0)e^{-\lambda\tau}=0 \tag{1.9}$$

定理 1.1 的结论仍成立．

如第一章所述，(1.5)和(1.9)一般地说有无穷多个根，所以对(1.5)(1.9)的特征频率有如下分析：

设(1.9)有 $m$ 对纯虚根 $\lambda=\pm p_k i$，$k=1,2,\cdots\cdots m$，则(1.8)有形如 $e^{ip_kt}$ $k=1,2,\cdots\cdots m$ 的解(第二章)，取其实部与虚部得(1.8)的解为

$$\begin{pmatrix}\cos p_1t\\ \sin p_1t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos p_2t\\ \sin p_2t\end{pmatrix},\cdots\cdots\begin{pmatrix}\cos p_mt\\ \sin p_mt\end{pmatrix}$$

这些实周期解的线性组合得出(1.8)一切可能的周期解，并且(1.9)不同的特征频率不超过 $n$ 个. 事实上，把(1.9)改写为

$$p_n(\lambda)+e^{-\lambda\tau}Q_{n-1}(\lambda)=0 \tag{1.10}$$

其中 $p_n(\lambda)=\lambda^n$，而 $Q_{n-1}(\lambda)=a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$. 设(1.10)有纯虚根 $\lambda=iy$，代入之得到

$$p_n(iy)+e^{-iy\tau}Q_{n-1}(iy)=0$$

由此推出 $y$ 是 $2n$ 次代数方程

$$|p_n(iy)|^2=|Q_{n-1}(iy)|^2 \tag{1.11}$$

的根，由(1.10)的纯虚根只能成对地出现，即 $\lambda=\pm iy_k$($y=0$ 除外)⇒(1.11)有不多于 $n$ 对根 $\pm iy_k$⇒(1.10)的特征频率不多于 $n$ 个.

对 $n$ 阶线性自治 NDDE

$$\sum_{k=0}^{n}[a_kx^{(k)}(t)+b_kx^{(k)}(t-\tau)]=0 \tag{1.12}$$

其中 $x\in R$. 设 $a_n\neq0, b_n\neq0$((1.12)写成 NFDE$(D,f)$时 $D$ 在 0 及 $-\tau$ 处为原子). 一般地说它的特征方程

$$h(\lambda,\tau)=\sum_{k=0}^{n}[a_k\lambda^k+b_k\lambda^ke^{-\lambda\tau}]=0 \tag{1.13}$$

的特征频率也不超过 $n$ 个. 事实上，若(1.13)纯虚根 $\lambda=iy$. 代入(1.13)得 $\sum_{k=0}^{n}[a_k(iy)^k+b_k(iy)^ke^{-iy\tau}]=0$，类似地，可记为

$$p_n(iy)+e^{-iy\tau}Q_n(iy)=0 \tag{1.14}$$

其中 $p_n, Q_n$ 都是 $n$ 次多项式. 同理由于方程 $|p_n(iy)|^2=|Q_n(iy)|^2$ 的根不超过 $2n$ 个且纯虚根(除了 0 根外)，总是成对地出现⇒其特征频率不超过 $n$ 个.

**注 1.2** 中立型方程(1.12)与滞后型(1.8)有所不同，即特征如方程(1.14)可能变为恒等式，此时如第六章 § 2 指出的，有可列个纯虚根.

**例 2** 考虑方程

$$\ddot{x}(t)+\ddot{x}(t-\tau)+a^2(x(t)+x(t-\tau))=0$$

$$h(\lambda,\tau)=(\lambda^2+a^2)(1+e^{-\lambda\tau})=0$$

$\lambda=\pm ai$. 而 $1+e^{-\lambda\tau}=0$ 只有当 $\lambda$ 为纯虚根 $iy$ 时才有可能成立. 即

$$e^{i\tau y}+1=0 \text{ 或 } \cos\tau y-i\sin\tau y+1=0$$

由 $\cos\tau y+1=0,\sin\tau y=0\Rightarrow\tau y=(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots,\tau$ 是给定的$\Rightarrow1+e^{\lambda\tau}=0$ 有无穷多个 0 点为 $y_k=\frac{1}{\tau}(2k+1)\pi \quad k=0,1,\cdots\cdots\Rightarrow$当 $|a|\neq\frac{1}{\tau}(2k+1)\pi. k=1,2,\cdots\cdots$时(1.16)的根都是单重的.

现在把定理 1.1 推广到 NDDE 的情形,方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+C\dot{x}(t-\tau) \tag{1.15}$$

其中 $x\in R_n,A,B,C$ 皆为 $n\times n$ 阵,$\tau=\text{const.}\geqslant0$,特征方程写成

$$h(\lambda,\tau)=\det|\lambda I-A-Be^{-\lambda\tau}-C\lambda e^{-\lambda\tau}|=0 \tag{1.16}$$

我们有

**定理** 1.2 NDDE(1.15)有周期解的充要条件是(1.16)有非 0 纯虚根.

对线性自治 ADDE 与 CDDE 都有类似结论.

### 3. 非齐次线性自治 DDE

对方程

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}a_{jk}x^{(j)}(t-\tau_k)=f(t) \tag{1.17}$$

其中 $a_{jk}$是常数. $0=\tau_0<\tau_1<\cdots\cdots<\tau_m$ 都是常数,$a_{nm}\neq0$. 由引理 1. 1$\Rightarrow$仅当 $f(t)$为周期的情形才可能有周期解. 其周期等于 $f(t)$的周期或为它的整数倍. 设 $f$ 的周期为 $T$. 作变换 $t=\frac{T}{2\pi}t_1$,则周期换为 $2\pi$.

如上所述，可设 $f(t)$ 为 $t\geqslant\sigma$ 时以 $2\pi$ 为周期的连续函数而不失一般性. 把它展为 Fourier 级数

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\hat{a}_p e^{ipt} \tag{1.18}$$

适当做些限制，上式可以写成实的形式

$$f(t)=\sum_{p=0}^{\infty}(\alpha_p\cos pt+\beta_p\sin pt)$$

(1.17)的齐次方程的特征方程为

$$h(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\lambda^k e^{\tau_j\lambda}=0 \tag{1.19}$$

(1)若(1.19)没有整数纯虚根，亦即不出现共振的情形，则应用叠加原理有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}x^{(k)}(t-\tau_j)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\hat{a}_k e^{ipt}$$

对应于右边每一个被加项的诸方程为

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}x^{(k)}(t-\tau_j)=\hat{a}_p e^{ipt},p=\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

的解为 $A_p e^{ipt}$, $A_p=\hat{a}_p/h(ip)$，由这些解作和得

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\hat{a}_p}{h(ip)}e^{ipt} \tag{1.20}$$

(1.20)收敛且 $n$ 次可微，因为它的系数是 $\hat{a}_p/h(ip)$ 与(1.18)的系数 $\hat{a}_p$ 比较，当 $p$ 充分大时有

$$h(ip)=O(p^n),\text{当 } p\to\infty\text{时}.$$

此时有 $|\hat{a}_p|/h(ip)<|\hat{a}_p|$，于是由(1.18)的一致收敛性⇒(1.20)的一致收敛性，而且是 $n$ 次可微的. ⇒(1.17)有唯一的周期解.

(2)若 $h(\lambda)$ 至少有一个零点接近于 $im$($m$ 为整数). 则当 $\hat{a}_m\neq0$ 或 $\hat{a}_{-m}\neq0$ 时，出现共振现象，系数的模 $|\hat{a}_m|/h(im)$ 比起在 $im$ 附近没有根的情形陡增，(1.20)的收敛性失去保证.

(3)若 $h(\lambda)$ 的根之一等于 $im$，且 $\hat{a}\neq0$, $\hat{a}_{-m}\neq0$，则周期解不存

在.

(4)若 $h(\lambda)$ 的根有一个等于 $im$,且 $\hat{a}_m=0,\hat{a}_{-m}=0$ 且没有其他的整数纯虚根,则存在形如(1.20)的双参数周期解族.

**例** 3　考虑方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t) \tag{1.21}$$

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt)$$

如上所述,将(1.21)对应的齐次方程的特征方程

$$h(\lambda)=\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0 \tag{1.22}$$

的根分为以下几种情形:

(1)若(1.22)无整数纯虚根,即 $\lambda=im(m=1,2,\cdots\cdots)$,$h(im)\neq0$,此时不出现共振⇒(1.21)只有一个周期解.

事实上根据叠加原理,由

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=\alpha_0/2$$

得出常数解为

$$x(t)=\frac{\alpha_0}{2(a+b)}$$

则非共振情形只有一个周期解

$$x(t)=\frac{\alpha_0}{2(a+b)}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[\alpha_n(a+b\cos n\tau)+\beta_n(b\sin n\tau-n)]\cos nt}{(a+b\cos n\tau)^2+(b\sin n\tau-n)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{[\beta_n(a+b\cos n\tau)-\alpha_n(b\sin n\tau-n)]\sin nt}{(a+b\cos n\tau)^2+(b\sin n\tau-n)^2}\right\}$$

(2)若特征方程(1.22)有整数纯虚根 $\pm im$,则出现共振,方程(1.21)的周期解仅当

$$\alpha_m=\int_0^{\pi}f(t)\cos mt\,dt=0,\beta_m=\int_0^{\pi}f(t)\sin mt\,dt=0$$

时才可能存在,而且方程(1.21)的解具有与(1)相同的形式,但 $\cos mt$ 与 $\sin mt$ 的系数是任意常数.

**例** 4　对一阶 RDDE 及其特征方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{1.23}$$

$$\lambda-a-be^{-\lambda\tau}=0 \tag{1.24}$$

其中 $x\in R, a, b, \tau>0\in R$. 第七章 §3 中艾利斯哥尔茨的 $D$ 划分图 7.1，直线 $a+b=0$ 与 $\Gamma$ 合起来便是(1.24)有纯虚根的$(a,b)$全体，换句话说，(1.23)存在周期解的$(a,b)$全体已经求出.

## §2　Massera 定理的推广

J. L. Massera 对常微分方程给出如下的结论：设周期系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x), f(t+\omega,x)=f(t,x) \tag{2.1}$$

中 $\omega>0$. $f: R\times R^n\to R^n$ 连续，则 $n=1$，即(2.1)为一个纯量方程. 解将来存在，有界解存在$\Rightarrow\omega$ 周期解存在. 这里所谓"将来存在"(exists in the future )指的是 $t\geqslant\sigma$ 以后解存在$\Longleftrightarrow$解整体存在.

当 $n\geqslant2$ 时，Massera 给出一个反例，说明有界解的存在性并不能保证 $\omega$ 周期解的存在性. 即

**例** 5　对系统

$$\dot{x}(t)=f(u,v)\cos^2\pi t-g(u,v)\sin\pi t\cos\pi t-\pi y$$

$$\dot{y}(t)=g(u,v)\cos^2\pi t+f(u,v)\sin\pi t\cos\pi t+\pi x$$

其中 $x\in R, y\in R$. $u=x\cos\pi t+y\sin\pi t, v=y\cos\pi t-x\sin\pi t$. 并且设

(1) $f$ 和 $g$ 具有连续一阶偏导数.

(2) $f(-u,-v)=f(u,v)$ 且 $g(-u,-v)=g(u,v)$.

(3) $f(1,0)=g(1,0)=0, f(0,v)=0$. 对所有的 $v, g(0,v)>0$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{g(0,v)}dv<\frac{2}{\pi}$.

例如 $f=uv, g=(1-u^2)(1+v^2)c, c>\dfrac{\pi^2}{2}$便满足上述条件. 可以分析得它$\exists$ 有界解，但无 $\omega$ 周期解[4].

现在考虑 RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{2.2}$$

其中 $f:R\times C\to R^n$ 连续，$f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$，$\omega=\text{const.}>0$. 且(2.1)过$(\sigma,\varphi)\in R\times C$ 有唯一解. 要推广 J. Massera 的结果，对有界性要明确一些加强了的概念，并需要两个引理，列出而略去证明.

**引理** 2.1　设 $f$ 为 Banach 空间 $X$ 到自身的全连续映射. 若存在有界集 $E$ 使得对$\forall\ x\in X$，$\exists\ m=m(x)$使得 $f^m(x)\in E$，则 $f$ 在 $E$ 中有一不动点.

**引理** 2.2　设 $s_0\subset s_1\subset s_2$ 是 Banach 空间 $X$ 的凸子集，$s_0$ 与 $s_2$ 是紧的，$s_1$ 相对于 $s_2$ 为开的，$f:s_2\to X$ 是连续映射，对某一个整数 $m>0$，使得 $f(s_1)\subset s_2$，$1\leqslant j\leqslant m-1$. 且 $f^j(s_1)\subset s_0$. $m\leqslant j\leqslant 2m-1$，则 $f$ 在 $s_0$ 中有一不动点.

Massera 定理的推广写成：

**定理** 2.1　设 $\omega\geqslant r$，且对$\forall\ M>0$，$\exists\ L(M)>0$，使得当$|\varphi|\leqslant M$ 时$|f(t,\varphi)|\leqslant L(M)$，$t\in[-\omega,0]$，方程(2.2)的解是等度有界的，关于某一 $B_0$ 是最终有界的，则(2.2)存在 $\omega$—周期解，且此解以 $B_0$ 为界.

**证**　设 $\sigma$ 为任一固定的初始时刻，由解的有界性⇒每个解整体存在.

定义映射 $f:C\to C$ 为 $f(\varphi)=x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi)$. 由解对初始函数的连续依赖性⇒$f$ 是连续的. 由解的唯一性及方程(2.2)的周期性⇒对 $k=1,2\cdots\cdots$，$f^k(\varphi)=x_{\sigma+k\omega}(\sigma,\varphi)$. 再由解的等度有界性⇒对$\forall\ B>0$，$\exists\ H(B)>0$，使得$|\varphi|<B$，$t\geqslant\sigma$ 时，

$$|x(t,\sigma,\varphi)|\leqslant H(B)$$

设$s\subset C$是任一有界集，$\exists\ H>0$使$\varphi\in s$，$t\geqslant\sigma-h$时$|x(t,\sigma,\varphi)|<H\Rightarrow f(s)$含于半径为 $H$ 的球中.

对 $H$，$\exists\ L>0$，使当$|\varphi|\leqslant H$ 时，$|f(t,\varphi)|\leqslant L$，$t\in[-\omega,0]$

由$f(t,\varphi)$关于$t$的周期性，对$\forall\ t\in R$，$|f(t,\varphi)|\leqslant L$，由于

$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant H$ 对 $\varphi\in s, t\geqslant\sigma$ 成立$\Rightarrow|\dot{x}(t,\sigma,\varphi)|=|f(t,x_t(\sigma,\varphi))|\leqslant L$，于是由 $\omega\geqslant r$ 有

$$\left|\frac{d}{ds}f(\varphi)(s)\right|=\left|\frac{d}{ds}x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi)(s)\right|=|\dot{x}(\sigma+\omega+s,\sigma,\varphi)|\leqslant L$$

对 $\varphi\in s, s\in[-r,0]$成立. 因此 $f(s)$是由等度连续函数构成的集合$\Rightarrow f$ 全连续.

设 $E=\{\varphi\in C; |\varphi|\leqslant B_0\}$，则 $E$ 为 $C$ 的有界子集，由于(2.2)的解关于$B_0$最终有界$\Rightarrow$对$\varphi\in C$，$\exists$ $T(\varphi)>0$，使得$t\geqslant\sigma+T(\varphi)$时 $|x(t,\sigma,\varphi)|\leqslant B_0$，取正整数 $k=k(\varphi)$使 $k\omega\geqslant T(\varphi)+r$，则对 $\varphi\in C$ 有

$$|f^k(\varphi)|=|x_{\sigma+k\omega}(\sigma,\varphi)|\leqslant B_0$$

即 $f^k(\varphi)\in E$. 由引理 2.1$\Rightarrow f$ 有一个不动点 $\varphi_0\in E$，则 $x(t,\sigma,\varphi_0)$即为(2.2)的 $\omega$—周期解，它以 $B_0$ 为界.

**注** 2.1 “以 $\omega$ 为周期的周期解”这里简称之为“$\omega$—周期解”(或“$\omega$ 周期解”)，下同.

**定理** 2.2 设对任意的 $M>0$，$\exists$ $L(M)>0$，使当$|\varphi|\leqslant M$ 时，$|f(t,\varphi)|\leqslant L(M)$，$t\in[-\omega,0]$，且(2.2)的解等度有界，关于 $B_0$ 等度最终有界，则(2.2)存在 $\omega$—周期解，且此解以 $B_0$ 为界.

证明可类似于定理 2.1 进行，亦可用引理 2.2.

## §3 小参数法的 Красовский 定理

推广常微分方程中寻求周期解的 Крылов—Боголюбов 方法与其他方法的推广结果一样. 由于 FDE 复杂性都表现出很大的局限. 这里介绍 H. H. Красовский 关于拟线性系统的一个有趣的结果：

考虑方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t)+\mu g(t,x(t),x(t-\tau),\mu) \tag{3.1}$$

假定

(1)连续函数 $f$ 和 $g$ 是 $t$ 的周期为 $2\pi$ 的周期函数.

(2)(3.1)的线性部分的特征方程 $\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0$ 的一切根皆具负实部

(3)$g(t,\cdot,\cdot,\cdot)$对充分小的$|\mu|$,在导出方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t)$$

的周期解 $x^*(t)$的近旁是第二、三、四个变元的解析函数.

(4)$a,b,\tau>0$ 皆常数.

则对每一个充分小的$|\mu|$,∃ 方程(3.1)的周期解 $x(t,\mu)$使得

$$\lim_{\mu\to 0}x(t,\mu)=x^*(t) \tag{3.2}$$

而且这个周期解可表示成形式

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\cdots\cdots+\mu^n x_n(t)+R(t,\mu) \tag{3.3}$$

其中 $R(t,\mu)=O(\mu^n)$. (3.3)中 $\mu^k$ 的系数 $x_k(t)$是把(3.3)代入(3.1),比较 $\mu$ 的同次项系数,得到的一列常微分方程

$$\dot{x}_0(t)+ax_0(t)+bx_0(t-\tau)=f(t)$$

$$\dot{x}_1(t)+ax_1(t)+bx_1(t-\tau)=F(t,x_0(t),x_0(t-\tau),0)$$

$$\dot{x}_2(t)+ax_2(t)+bx_2(t-\tau)$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)_0+x_1(t)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t)}\right)_0+x_1(t-\tau)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t-\tau)}\right)_0$$

$$\cdots\cdots$$

它们的周期解便取为 $x_k(t)$. $k=0,1,2\cdots\cdots$其中记号$(\quad)_0$ 表示括号中变元 $x(t),x(t-\tau),\mu$ 应当代之以相应的 $x_0(t),x_0(t-\tau),0$.

对模充分小的 $\mu$,可用 Schauder 不动点定理,或者用逐次逼近法证明(3.1)$\omega$—周期解的存在性(用逐次逼近法估计余项 $R(t,\mu)$较为简单),证明从略.

**例 6** 应用小参数展开法于方程

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+bx(t)+c\dot{x}(t-\tau)+dx(t-\tau)$$

$$=f(t)+\mu g(t,x(t),x(t-\tau),\mu) \tag{3.4}$$

其中 $a,b,c,d,\tau>0$ 皆为常数，$x\in R$.

设(3.4)周期解的形式为

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\cdots\cdots+\mu^n x_n(t)+R_n(t,\mu) \tag{3.5}$$

诸函数 $x_0(t),x_1(t),x_2(t),\cdots\cdots$由下列方程确定

$$\ddot{x}_0(t)+a\dot{x}_0(t)+bx_0(t)+c\dot{x}_0(t-\tau)+dx_0(t-\tau)=f(t)$$

$$\ddot{x}_1(t)+a\dot{x}_1(t)+bx_1(t)+c\dot{x}_1(t-\tau)+dx_1(t-\tau)$$

$$=g(t,x_0(t)\dot{x}_0(t),x_0(t-\tau)\dot{x}_0(t-\tau),0)$$

$$\ddot{x}_2(t)+a\dot{x}_2(t)+bx_2(t)+c\dot{x}_2(t-\tau)+dx_2(t-\tau)$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)_0+x_1(t)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t)}\right)_0+\dot{x}_1(t)\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(t-\tau)}\right)_0$$

$$+x_1(t-\tau)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t-\tau)}\right)_0+\dot{x}_1(t-\tau)\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}(t-\tau)}\right)_0$$

$\cdots\cdots$

亦即由这些方程的周期解确定式(3.5).

**例** 7　具体地求出方程

$$\dot{x}(t)-x(t-\frac{\pi}{2})=\sin t+\mu x^2(t) \tag{3.6}$$

的近似解——$\omega$ 周期解. 仍设解写成(3.5)的形式，但只取两项，故

$$\dot{x}_0(t)-x_0(t-\frac{\pi}{2})=\sin t$$

不共振的情形，可求得解为形式

$$x_0(t)=A\cos t+B\sin t.$$

由此得 $x_0(t)=-\frac{1}{2}\cos t$. 进而对

$$\dot{x}_1(t)-x_1(t-\frac{\pi}{2})=x_0^2(t)=\frac{1}{8}(1+\cos 2t)$$

于是有

$$x_1(t)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cos 2t$$

$$x(t,\mu)\approx-\frac{1}{2}\cos t+\frac{\mu}{16}(\cos 2t-2)$$

## §4 Kaplan—Yorke 法

1974 年 J. Kaplan 与 J. Yorke 对一些具体类型的 RDDE，确立了与它相应的某种常微分方程，用以判断这个 RDDE 周期解的存在性[580]，以后也出现用这一思路解决周期解存在性的工作，这种办法暂且称之为 Kaplan-Yorke 法.

此法能解决的方程类并不广泛，但相当细致、而又便于工程技术人员应用.

对 RDDE，$x\in R$，

$$\dot{x}(t)=-f(x(t-1)) \tag{4.1}$$

其中 $f(x)$是连续的且当 $x\neq 0$，$xf(x)>0$，此外考虑与(4.1)对应的常微分方程，令 $y(t)=x(t-1)$，

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-f(y(t))\\ \dot{y}(t)=f(x(t))\end{cases} \tag{4.2}$$

**定理** 4.1　设(4.1)中 $f$ 为连续奇函数，且满足 $xf(x)>0$，当 $x\neq 0$ 时，设

$$\alpha=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\beta=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

存在，$\alpha,\beta$ 可以是$\pm\infty$，再设

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds\to\infty,\text{当 } x\to\infty \tag{4.3}$$

当 $\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta$，或 $\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha$ 时，(4.1)存在振动的周期解 $x$，而且 $x$ 具有周期 4，$x$ 还满足(4.2).

**证**　先证(4.2)有周期为 4 的周期解，再证它满足(4.1)．令 $V(x,y)=F(x)+F(y)$，其中 $F(v)=\int_0^v f(s)ds$，$v\in R$. 由(4.3)及 $v$

$\neq 0$ 时 $vf(v)>0 \Rightarrow V(x,y) \geqslant 0$,当且仅当 $x=y=0$ 时 $V=0$. 当 $x^2+y^2 \to \infty$ 时,$V(x,y) \to \infty$. 对(4.2)的任何解,对$\forall\ t \in R$,我们有

$$\frac{dV(x(t),y(t))}{dt}=f(x(t))\dot{x}(t)+f(y(t))\dot{y}(t)=0$$

亦即 $V$ 沿解的值为常数.

由于 $f$ 为奇函数且 $xf(x)>0$. 故令 $s=-t$ 时有

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(s)ds=-\int_0^x f(-t)dt=\int_0^x f(t)dt-F(x).$$

从而有

$$V(-x,y)=V(x,y)=V(x,-y)=V(-x,-y)$$

即 $V(x,y)$关于 $x$ 轴、$y$ 轴及原点都是对称的. 此外由 $F$ 的定义及 $xf(x)>0 \Rightarrow F(x),F(y)(x\in R_+,y\in R_+)$分别关于 $x$ 和 $y$ 是严格单增的$\Rightarrow$对$\forall\ c>0$,$\exists\ x_0>0,y_0>0$,使得

$$F(x_0)=c,F(y_0)=c$$

不难判断 $V(x,y)=c$ 在第一象限唯一地确定了一个连续函数 $y=\varphi(x)$满足:$x\in[0,x_0] \Rightarrow y\in[0,y_0]$. $y_0=\varphi(0)$,$0=\varphi(x_0)$,$\Rightarrow$由 $V$ 的对称性,$V(x,y)=c$ 在$(x,y)$平面上确定了一条简单闭曲线,原点在其内部.

$(a)$(4.2)有非常数周期解.

若$(x(t),y(t))$是(4.2)过$(x_0,y_0)$的解,其最大存在区间为$(\alpha,\beta)$. 可证 $\alpha=-\infty,\beta=\infty$. 若不然,设 $\beta<\infty$. 由 $V$ 沿(4.2)的解为常数$\Rightarrow V(x(t),y(t))=V(x_0,y_0)$,$t\in(\alpha,\beta)$,从而$(x(t),y(t))$在$(\alpha,\beta)$上有界,由解的延拓定理可得解$(x(t),y(t))$在$[\beta,\beta+\delta]$,$\delta>0$ 上存在. 这与 $\beta$ 是解的最大存在区间的右端点的假定不合$\Rightarrow \beta=\infty$. 同理 $\alpha=-\infty$. 又因 $V(x,y)=V(x_0,y_0)$是平面上的简单闭曲线$\Rightarrow \Gamma(t) \triangleq (x(t),y(t))$是(4.2)的非常数周期解,且相轨在$(x,y)$平面上是绕原点的简单闭曲线.

$(b)$证 $\Gamma(t)$的周期为 4.

令 $V(x_0,y_0)=c$,$\Gamma(t)=(x_c(t),y_c(t))$　$\Gamma(t)$的周期为 $\omega_c$. $c\in$

$(0,\infty)$, $\varphi(t)=\tan^{-1}y(t)/x(t)$, $t\in[0,\omega_c]$. 则有

$$2\pi=\int_0^{2\pi}d\varphi=\int_0^{\omega_c}\dot{\varphi}(t)dt=\int_0^{\omega_c}\frac{\dot{y}(t)x(t)-\dot{x}(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}dt$$

$$=\int_0^{\omega_c}R(x(t),y(t))dt$$

其中 $R(x,y)\triangleq(xf(x)+yf(y))/(x^2+y^2)$. 由 $\alpha,\beta$ 的定义和上述结果得到

若 $\alpha\neq0$, 则当 $c\to0$ 时 $\omega_c\to\dfrac{2\pi}{\alpha}$

若 $\alpha=0$, 则当 $c\to0$ 时 $\omega_c\to\infty$

若 $\beta\neq0$, 则当 $c\to\infty$ 时 $\omega_c\to\dfrac{2\pi}{\beta}$

若 $\beta=0$, 则当 $c\to0$ 时 $\omega_c\to\infty$

由于 $\omega_c$ 是 $c$ 连续函数, $c\in(0,\infty)\Rightarrow$ 由条件 $\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta$ 或 $\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha$ 可推知 $\exists$ $c$ 使 $\omega_c=4$.

(c) 最后证明, 若 $(x^*(t),y^*(t))$ 是 (4.2) 具有周期为 4 的非常数周期解, 满足

$$V(x^*(t),y^*(t))=c^*,\omega_{c^*}=4,c^*\in(0,\infty)$$

则 $x^*(t)$ 是 (4.1) 的解. 事实上, 由直接计算可知 $(-x^*(t),-y^*(t))$ 也满足 (4.2) 且 $V(-x^*(t),-y^*(t))=V(x^*(t),y^*(t))=c^*$, 因为满足 $V=c^*$ 的轨线最多相差 $t$ 的某个平移 $\tau$, 故有

$$(x^*(t),y^*(t))\equiv(-x^*(t+\tau),-y^*(t+\tau)),\tau\in(0,4)$$

从而有

$$x^*(t)=-x^*(t+\tau)=x^*(t+2\tau),y^*(t)=y^*(t+2\tau)$$

所以 $2\tau=4n$, $n$ 为某正整数, 即 $\tau=2n$, 又 $\tau\in(0,4)\Rightarrow\tau=2$.

于是有

$$x^*(t)=-x^*(t+2)=-x^*(t-2)$$

$$y^*(t)=-y^*(t+2)=-y^*(t-2) \tag{4.4}$$

另一方面 $(y^*(t),-x^*(t))$ 也满足 (4.2) 且 $V(y^*(t),-x^*(t))=$

$c^*$，显然 $x^*(t)\neq y^*(t)$. 同理可得，$\exists\ \tau\in(0,4)$使得

$$(y^*(t+\tau),-x^*(t+\tau))\equiv(x^*(t),y^*(t))$$

$$x^*(t)\equiv y^*(t+\tau),y^*(t)\equiv -x^*(t+\tau) \tag{4.5}$$

故有

$$x^*(t)=-x^*(t+2\tau)\text{及 } y^*(t)=-y^*(t+2\tau).$$

由(4.4)、(4.5)$\Rightarrow x^*(t-2)=x^*(t+2\tau)$，$y^*(t-2)=y^*(t-2\tau)$，从而 $2\tau+2=4n$，$n$ 为整数$\Rightarrow\tau=1$ 或 $\tau=3$. 现在说明 $\tau\neq3$. 若不然，则由(4.5)$\Rightarrow x^*(t+3)=x^*(t)$，$x^*(t+3)=-y^*(t)$，$t\in[0,4]$. 利用$(x^*(t),y^*(t))$的相图分析，设$(x^*(t_0),y^*(t_0))$在第一象限. 由(4.4)$\Rightarrow(x^*(t_0+2),y^*(t_0+2))=(-x^*(t_0),-y^*(t_0))$应属第三象限，显然$(x^*(t_0+3),y^*(t_0+3))$只可能属于第三、四或第一象限，然而$(x^*(t_0+3),y^*(t_0+3))=(-y^*(t_0),x^*(t_0))$应属于第二象限$\rightarrow$矛盾. 即 $\tau\neq3$，必为 $\tau=1\Rightarrow x^*(t)=y^*(t+1)$，即 $y^*(t)=x^*(t-1)$. 由(4.2)的第一个方程得

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=-f(y^*(t))=-f(x^*(t-1)).$$

故 $x^*(t)$是满足方程(4.1)周期为 4 的振动周期解. 证毕.

下面对两个滞量的方程给出一个结论

$$\dot{x}(t)=[f(x(t-1))+f(x(t-2))] \tag{4.6}$$

**定理** 4.2　设 $f$ 是连续奇函数且满足，当 $x\neq0$ 时，$xf(x)>0$. 设 $\alpha,\beta$ 如定理 4.1 所定义，若

$$\alpha<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\beta\text{ 或 }\beta<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\alpha \tag{4.7}$$

则方程 (4.6)存在振动的周期解 $x$，且 $x$ 具有周期 6.

**证**　分三步证之.

(1)要证常微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-f(x_2(t))-f(x_3(t))\\ \dot{x}_2(t)=f(x_1(t))-f(x_3(t))\\ \dot{x}_3(t)=f(x_1(t))+f(x_2(t))\end{cases} \tag{4.8}$$

有周期解. 定义 $\Psi: R^3 \to R^3$ 如下

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$$

记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = (x_1, x_2, x_3)$$

于是(4.8)可以写成

$$\dot{Z}(t) = A\Psi(Z) \tag{4.9}$$

并取初始条件为

$$Z(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, -r, -r), r > 0 \tag{4.10}$$

设(4.9)满足初始条件(4.10)的解为 $Z(t,r)$. 由(4.8)推得 $\frac{d}{dt}(x_1 - x_2 + x_3) = 0$. 故对 $\forall\ r > 0$, $Z(t,r)$ 对 $\forall\ t \in R$ 均落在平面 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 上, 设

$$F(v) = \int_0^v f(s)ds, V(Z) = F(x_1) + F(x_2) + F(x_3)$$

$\Rightarrow V$ 正定且当 $|Z| \to \infty$ 时 $V(Z) \to \infty$, $\frac{d}{dt}V(Z, t) = 0$, 故对 $\forall\ \alpha > 0$, $V(Z) = \alpha$ 是一个固定的曲面, 它被平面 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 截得一条简单闭曲线. 对 $\forall\ r$, $Z(t,r)$ 便是方程(4.9)的周期解.

(2) 确定周期为 6 的周期解.

设 $\omega_r$ 表示 $Z(t,r)$ 的周期, 与定理 4.1 的证明类似, 我们由(4.9)的线性化来考察 $r \to 0$, $r \to \infty$ 时 $\omega_r$ 的状态, 得到

若 $\alpha \neq 0$, 则当 $r \to 0$ 时 $\omega_r \to \frac{2\pi}{\sqrt{3}\alpha}$.

若 $\alpha = 0$, 则当 $r \to 0$ 时 $\omega_r \to \infty$.

若 $\beta \neq 0$, 则当 $r \to \infty$ 时 $\omega_r \to \frac{2\pi}{\sqrt{3}\beta}$.

若 $\beta = 0$, 则当 $r \to 0$ 时 $\omega_r \to \infty$.

由条件(4.7)⇒∃ $r$,使 $w_r=6$. 以 $\hat{Z}(t)=(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t),\hat{x}_3(t))$ 表示(4.9)的 6—周期解.

(3)证 $\hat{x}_1(t)$是(4.6)的 6—周期解,定义 $T:R^3\to R^3$ 为

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad 记 Z=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

若 $Z(t)$是(4.9)的解,则 $TZ(t)$也是(4.9)的解(代入即可推出). 平面 $x_1-x_2+x_3=0$ 在映射 $T$ 之下是不变的. 事实上,记 $A=(1,-1,1)$,则 $ATZ=(1,-1,1)Z=-AZ$, 由于 $f$ 是奇的,故可得 $V(Z)=V(TZ)$. $Z\in R^3$. 特别有 $T\hat{Z}(t)$是(4.9)的 6—周期解,且 $V(T\hat{Z}(t))=V(\hat{Z}(t))$,故有

$$\{\hat{Z}(t);t\in R\}=\{T\hat{Z}(t);t\in R\}$$

从而存在 $p>0$ 使 $T\hat{Z}(t)=\hat{Z}(t+p)$. 又因为 $T^6=I$(单位阵)⇒ $\hat{Z}(t)=I\hat{Z}(t)=T^6\hat{Z}(t)=\hat{Z}(t+6p)$. 可设 $p$ 是 1,2,3,4,5 中的一个. 考虑集 $S=\{T^m\hat{Z}(0);m=0,1,2,3,4,5\}$ 直接计算得 $mp\neq 0\pmod 6$. $m=1,2,3,4,5\Rightarrow p\neq 2,p\neq 3$ 及 $p\neq 4$,只可能 $p=1$ 或 $p=5$. 这表示 $T\hat{Z}(t)=\hat{Z}(t+1)$或者 $T\hat{Z}(t)=\hat{Z}(t-1)$. 对某一 $r>0$, $\hat{Z}(0)=(0,-r,-r)'$ 有

$$(\hat{Z}(0)-T\hat{Z}(0))\cdot\Psi(\hat{Z}(0))=-rf(r)<0.$$

⇒$T\hat{Z}(t)=\hat{Z}(t-1)$. 由此得

$$\begin{aligned}T(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t),\hat{x}_3(t))&=(\hat{x}_1(t-1),\hat{x}_2(t-1),\hat{x}_3(t-1))\\&=(\hat{x}_2(t),\hat{x}_3(t),-\hat{x}_1(t))\end{aligned}$$

⇒$\hat{x}_2(t)=x_1(t-1)$. 同理 $\hat{x}_3(t)=\hat{x}_1(t-2)$代入(4.8)第一个方程得到

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_1(t)=-f(\hat{x}_1(t-1))-f(\hat{x}_1(t-2))$$

⇒$x_1(t)$是(4.6)的 6—周期解. 证毕.

**例** 8 考虑方程

$$\dot{x}(t)=-\eta[1-x^2(t)][x(t-1)+x(t-2)] \tag{4.11}$$

作代换

$$\dot{y}(t)=\dot{x}(t)/[1-x^2(t)] \tag{4.12}$$

则由(4.12)积分得

$$x(t)=[e^{2y(t)}-1]/[e^{2y(t)}+1]$$

若令 $f(v)=(e^{2v}-1)/(e^{2v}+1)$，则 $f(0)=0$，$f$ 为奇函数，且 $vf(v)>0$. 故(4.11)可改写为

$$y'(t)=-\eta[f(y(t-1))+f(y(t-2))]$$

此时 $\alpha=\eta,\beta=0$. 由定理 4.2. 若 $\eta>\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\Rightarrow$(4.11)有 6—周期解.

可用此法讨论方程

$$\dot{x}(t)=-\eta x^{\theta}(t-1)[\alpha^2-x^2(t)] \tag{4.13}$$

其中 $\alpha\geqslant0,\eta>0,0<\theta\leqslant1$，且 $\theta$ 为奇数之比，得出：

"当 $\theta=1,\eta>\frac{\pi}{2\alpha^2}$ 且 $0<\theta<1$ 时，(4.13)有 4—周期解". 证明从略.

## §5 V 函数法

Ляпунов 第二方法不仅用于稳定性与有界性的研究，还可用于周期解存在性问题.

对 RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{5.1}$$

设 $f\in C(\Omega,R^n)$. $\Omega\subseteq R\times C$ 是开的且(5.1)的解唯一，泛函 $V(t,\varphi)$ 及 $V_{(5.1)}(t,\varphi)$ 均沿用第七章的定义.

设 $\Omega=I\times C,I\subseteq R$，$f(t,\varphi)$ 在 $\Omega$ 上连续，对 $\forall\ \alpha>0$，$\exists\ L(t,\alpha)$

$>0$ 使得若 $\varphi \in C_a = \{\varphi: \varphi \in C, |\varphi| < a\}$，则

$$|f(t,\varphi)| < L(t,a) \tag{5.2}$$

其中 $L(t,a)$ 关于 $t$ 连续.

**定义 5.1** 设 $\hat{C}$ 为 $C$ 中紧集，若当 $\varphi \in \hat{C}, \psi \in \hat{C}$ 时，存在常数 $L(\hat{C})$，使成立

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant L(\hat{C}) |\varphi - \psi| \tag{5.3}$$

所有具备这一性质的 $f$ 全体记为 $f(t,\varphi) \in \hat{C}_0(\varphi)$.

**定理 5.1** $f(t,\varphi) \in \hat{C}_0(\varphi)$，且 $f(t+\omega,\varphi) = f(t,\varphi)$，$\omega = \text{const.} \geqslant r > 0$（$r$ 是(5.1)的时滞界限）. 若对(5.1)存在泛函 $V(t,\varphi)$ 满足第七章定理 7.4 的条件，则(5.1)至少存在一个周期为 $\omega$ 的周期解.

事实上，由第七章定理 2.1、定理 7.4 立即得出本定理结论.

**引理 5.1** （Browder 不动点定理）设 $S, S_1$ 均为 Banach 空间 $Z$ 的开凸子集，$S_0$ 是 $Z$ 的闭凸子集，$S_0 \subset S_1 \subset S$，$F: S \to Z$ 是紧的. 若对正整数 $m$，$f^m$ 在 $S_1$ 上有定义. $\bigcup_{0 \leqslant j \leqslant m} f^j(S_0) \subset S_1$ 而 $f^m(S_1) \subset S_0$，则 $f$ 在 $S_0$ 内有不动点.

**定理 5.2** 设 $f(t,\varphi)$ 关于 $t$ 是周期的. 周期 $\omega > r$，对$\forall\ a > 0$，$\exists\ L(a) > 0$，使当 $\varphi \in C_a$ 时 $|f(t,\varphi)| \leqslant L(a)$（即(5.2)中 $L$ 不依赖于 $t$）. 再设 $V$ 泛函 $V(t,\varphi)$ 定义在 $R \times C_H$ 上满足

(1) 存在连续单增函数 $a(s), b(s)$，当 $s \geqslant H$ 时 $a(s) > 0, b(s) > 0$. 且 $s \to \infty$ 时 $a(s) \to \infty$. 使得

$$a(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant b(|\varphi|)$$

(2) 存在连续函数 $\omega(s)$，当 $s \geqslant H$ 时 $\omega(s) > 0$，使得

$$\dot{V}_{(5.1)}(t,\varphi) \leqslant -\omega(|\varphi(0)|).$$

(3) 设正数 $H_1, \alpha, \beta, r, r^*$ 满足下列不等式

$$b(H_1) \leqslant a(\alpha), b(\alpha) \leqslant a(\beta), b(\beta) \leqslant a(r), b(r) \leqslant a(r^*)$$

其中 $H_1 > H$ 使得

$$rL(r^*) < H_1 - H \tag{5.4}$$

则方程(5.1)存在周期为 $\omega$ 的周期解.

**证** 设 $S=\{\varphi\in C, |\varphi|<r\}$,若 $\varphi\in C_r$,则对$\forall\ t\geqslant\sigma$, $|x_t(\sigma,\varphi)|<r^*$.若不然,则存在 $t_1$ 使得 $|x_{t_1}(\sigma,\varphi)|=r^*$,于是存在 $t_2,t_3,\sigma\leqslant t_2<t_3\leqslant t_1$ 使 $|x_{t_2}(\sigma,\varphi)|=r$, $|x(t_3,\sigma,\varphi)|=r^*$,且对 $t\in(t_2,t_3)$成立 $r<|x_t(\sigma,\varphi)|<r*$.设在某一个 $t\in[t_2,t_3]$有 $|x(t,\sigma,\varphi)|<H$.则存在 $t_4,t_5,t_2\leqslant t_4<t_5<t_3$ 使 $|x(t_4,\sigma,\varphi)|=H$, $|x(t_5,\sigma,\varphi)|=H_1$,而且对 $t\in(t_4,t_5)$有 $H<|x(t,\sigma,\varphi)|<H_1$,在区间$[t_4,t_5]$上有 $|x_t(\sigma,\varphi)|<r^*$.由此,从定理条件$\Rightarrow$

$$|f(t,x_t(\sigma,\varphi))|\leqslant L(r^*)$$

即 $|\dot{x}(t,\sigma,\varphi)|\leqslant L(r^*)$,故

$$|x(t_5,\sigma,\varphi)|\leqslant H+L(r^*)(t_5-t_4)$$

若 $t_5-t_4\leqslant r$,则 $|x(t_5,\sigma,\varphi)|\leqslant H+rL(r^*)<H_1\Rightarrow t_5-t_4$ 必大于 $r$,故 $|x_{t_5}(\sigma,\varphi)|=H_1$,但因 $t_2<t_5<t_3$.故 $|x_t(\sigma,\varphi)|>r$.而 $r\geqslant H_1\Rightarrow$矛盾.故对所有 $t\in[t_2,t_3]$有 $|x(t,\sigma,\varphi)|\geqslant H$.由(1)(2)可得

$$a(r^*)=a(|x(t_3,\sigma,\varphi)|)\leqslant V(t_3,x_{t_3}(\sigma,\varphi))$$
$$<V(t_2,x_{t_2}(\sigma,\varphi))\leqslant b(|x_{t_2}(\sigma,\varphi)|)=b(r)$$

这与 $b(r)\leqslant a(r^*)$不合.故 $\varphi\in C_r$,对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 有 $|x_t(\sigma,\varphi)|<r^*$.

类似地可以证明 $\varphi\in C_{H_1}$时,对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 有 $|x_t(\sigma,\varphi)|<\alpha$,当 $\varphi\in C_\alpha$时,对$\forall\ t\geqslant\sigma$有 $|x_t(\sigma,\varphi)|<\beta$.当$\varphi\in C_\beta$时对$\forall\ t\geqslant\sigma$有 $|x_t(\sigma,\varphi)|<r$.

考虑 $\varphi\in C_\beta$ 时的解 $x(t,0,\varphi)$,则当 $t\geqslant0$ 时有 $|x_t(0,\varphi)|<r$.设对$\forall\ t\geqslant r$ 成立 $|x(t,0,\varphi)|>H$,则必存在常数 $k>0$,使得

$$\dot{V}_{(5.1)}(t,x_t(0,\varphi))\leqslant-k, t\geqslant r \tag{5.5}$$

这是因为 $H<|x(t,0,\varphi)|<r$,对$\forall\ t\geqslant r$ 成立.由(5.5)有

$$V(t,x_t(0,\varphi))\leqslant V(r,x_r(0,\varphi))-k(t-r)\leqslant b(r)-k(t-r)$$

因此若 $t>\frac{1}{k}[b(r)+kr]$,我们有 $V(t,x_t(0,\varphi))<0$.这与 $V\geqslant0$ 矛盾.故必在某个 $t_1\in[r,\frac{1}{k}(b(r)+kr)]$使 $|x(0,\varphi)(t_1)|=H$ 由(5.

4)$\Rightarrow$对 $t\in[t_1-r,t_1]$有 $|x(t,0,\varphi)|\leqslant H+rL(r^*)<H_1$，故 $|x_{t_1}(0,\varphi)|<H_1\Rightarrow$对$\forall\ t\geqslant t_1$ 有 $|x_t(0,\varphi)|<\alpha$.

设 $f$ 满足 $f(\varphi)=x_\omega(0,\varphi)$. 集 $S$ 显然是 $C$ 中的开凸子集，因为 $r\leqslant\omega$且当$\varphi\in S$时有 $|x_\omega(0,\varphi)|<r^*$ 及对$t\in[0,\omega]$成立；$|\dot{x}(t,0,\varphi)|\leqslant L(r^*)$，故 $S$ 被映入 $C$ 的一个紧集$\Rightarrow f$ 是紧的. 令 $S_1=\{\varphi\in C;|\varphi|<\beta\}$. $S_0=\{\varphi\in C;|\varphi|\leqslant\alpha\}$. 则 $S_1$ 是开且凸的集合. 而 $S_0$ 是闭凸集. 如上所述，对 $\varphi\in S_1,t\geqslant t_1$ 时有 $|x_t(0,\varphi)|<\alpha$. 故存在一个整数 $m>0$ 使当 $\varphi\in S_1$ 时 $|x_{m\omega}(0,\varphi)|<\alpha$ 或 $x_{m\omega}(0,\varphi)\in S_0$.

最后由引理 5.1$\Rightarrow f$ 在 $S_0$ 上有一个不动点，即 $x_\omega(0,\varphi)=\varphi$，由于 $f(t,\varphi)$关于 $t$ 是 $\omega$ 周期的，即(5.1)有一个 $\omega$ 周期解.

**例** 9　考虑方程

$$\dot{x}(t)=y(t) \tag{5.6}$$

$$\dot{y}(t)=-\Phi(t,y(t))-f(x)+p(t)+\int_{-r}^{0}g(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta$$

(若 $g(x)=\dfrac{df}{dx}$，则(5.6)等价于一个二阶方程). 设(5.6)满足条件(注意定义 5.1)：

(1)$t\in R_+$，$|y|<\infty$时，$\Phi(t,y)$关于$t$，$y$连续，$\Phi(t,y)\in\hat{C}_0(y)$，$\Phi(t,y)$关于 $t$ 是周期的，周期为 $\omega$，而且对某两正数 $a$，$A$，使当$|y|\geqslant A$ 时有

$$\Phi(t,y)/y>a>0$$

(2)$f(x)$在$|x|<\infty$上连续，$f(x)$满足局部 Lipschitz 条件(下而简记为 $f\in C_0(x)$). $|g(x)|\leqslant L$，则存在一个 $r_0$ 使得对 $r\in[0,r_0]$，方程组(5.6) 存在 $\omega$—周期解.

事实上，当 $r=0$ 时(5.6)是二阶带有强迫项的非线性振荡常微分方程. 不再在此讨论，故设 $r>0$. 引入连续泛函 $W(\varphi,\psi)$：

$$W(\varphi,\psi)=2F(\varphi(0))+\psi^2(0)+\frac{a}{2r}\int_{-r}^{0}(\int_{s}^{0}\psi^2(\theta)d\theta)ds$$

$$+L\int_{-r}^{0}(\int_{s}^{0}|\psi(\theta)|d\theta)ds$$

$$F(x)=\int_{0}^{x}f(u)du,0<r\leqslant r_0<\frac{a}{2L}$$

因此我们有

$$\dot{W}_{(5.6)}(x_t,y_t)\leqslant -2y\Phi(t,y)+2K|y|+2\int_{-r}^{0}L|y(t)y(t+\theta)|$$

$$+\frac{a}{2r}\int_{-r}^{0}[y^2(t)-y^2(t+\theta)]d\theta+Lr|y|-L\int_{-r}^{0}|y(t+\theta)|d\theta$$

若

$$|y|\geqslant C_* \triangleq \max(A,\frac{4k}{a}+1).$$

则 $$\dot{W}_{(5.6)}(x_t,y_t)\leqslant -\frac{1}{2}ay^2-\int_{-r}^{0}[\frac{a}{2r}y^2(t)-2L|y(t)y(t+\theta)|$$

$$+\frac{a}{2r}y^2(t+\theta)]d\theta-L\int_{-r}^{0}|y(t+\theta)|d\theta$$

因为 $r<a/2L$,故由上式得

$$\dot{W}_{(5.6)}(x_t,y_t)\leqslant\frac{1}{2}ay^2(t)$$

因此,若 $|\psi(0)|\geqslant C_*$,则

$$\dot{W}_{(5.6)}(\varphi,\psi)\leqslant -\frac{1}{2}a\psi^2(0) \tag{5.7}$$

其次我们考虑 $|\psi(0)|\leqslant C_*$ 的情形,设 $B$ 是这样的常数,使得当 $|y|\leqslant C_*$ 时,有

$$2|y||\Phi(t,y)|+|\Phi(t,y)|\leqslant B$$

由(2)可知,存在常数 $d>0$,使得 $\frac{4}{a}\leqslant d$ 且

$$B+2C_*k+\frac{1}{2}aC_*+aC_*^2+k-f(x)\leqslant -1,x\geqslant d$$

$$B+2C_*k+\frac{1}{2}aC_*+aC_*^2+k+f(x)\leqslant -1,x\leqslant -d$$

当 $\varphi(0)\geqslant d$ 时，若我们考虑

$$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)+\psi(0)$$

$$\dot{V}_{(5.6)}(x_t,y_t)=\dot{W}_{(5.6)}(x_t,y_t)-\Phi(t,x)-f(x)+p(t)$$

$$+\int_{-r}^{0}g(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta$$

$$\leqslant-2y\Phi(t,y)+2C_*k+LrC_*-\Phi(t,y)+k-f(x)$$

$$+ay-\int_{-r}^{0}\{\frac{a}{2r}y^2(t)-2L|y(t)y(t+\theta)|$$

$$+\frac{a}{2r}y^2(t+\theta)\}d\theta\leqslant-1.$$

若对 $\varphi(0)\leqslant-d$，我们令

$$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)-\psi(0)$$

类似论证$\Rightarrow\dot{V}_{(5.6)}\leqslant-1$. 在 $|\varphi(0)|\leqslant d,\psi(0)\geqslant C_*$ 的情形，若我们令

$$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)+\frac{C_*}{d}\varphi(0)$$

那末有

$$\dot{V}_{(5.6)}(x_t,y_t)\leqslant-\frac{1}{2}a^2y^2+\frac{C_*}{d}y\leqslant-\frac{1}{4}ay^2$$

在 $|\varphi(0)|\leqslant d,\psi(0)\leqslant-C_*$ 的情形有

$$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)-\frac{C_*}{d}\varphi(0)$$

$$\dot{V}_{(5.6)}(x_t,y_t)\leqslant-\frac{1}{4}ay^2$$

若 $\varphi(0)\geqslant d,\psi(0)\geqslant C_*$ 或 $\varphi(0)\leqslant-d,\psi(0)\leqslant-C_*$，则我们可取 $V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)+C_*$. 又若 $\varphi(0)\geqslant d,\psi(0)\leqslant-C_*$ 或 $\varphi(0)\leqslant-d,\psi(0)\geqslant C_*$，我们取

$$V(\varphi,\psi)=W(\varphi,\psi)-C_*$$

因此我们得一 $V$ 泛函 $V(\varphi,\psi)$，它满足定理 5.2 的条件(2)，因为我们有

$$2F(\varphi(0))+\psi^2(0)+C_*\leqslant V(\varphi,\psi)\leqslant 2F(\varphi(0))$$

$$+\psi^2(0)+C.+\frac{a^2}{8L}(n^2+n).$$

其中 $F$ 由(5.6)右边确定,$n$ 为$(\varphi,\psi)$的范数,$V(\varphi,\psi)$满足定理 5.2 的条件(1). 若必要用加一个正数的办法使 $V>0$. 容易看出,若 $r_0$ 充分小,则满足条件 $rL(r^*)<H_1-H$,故由定理 5.2,(5.6)对充分小的 $r$,存在 $\omega$ 周期解.

## §6 若干注释

关于周期解的存在性研究有以下几个问题:问题提法、对象与方法.

1. 第一种问题提法可以简单地问:对指定的 FDE 是否存在周期为 $\omega$ 的周期解? 或者反过来,要寻求系统无周期解的条件.

第二种提法:进一步要求给出周期解的近似表示,精确的周期解表示式,同时要求计算周期 $\omega$ 的值,要求确定是定号周期还是振动周期解等等.

第三种提法:若时滞系统中有 1 个(或多个)参数,要研究周期解的存在性关于参数的分岐(Hopf 分岐). 一种特有的情形是:参数即滞量.

2. 讨论对象分析

(1)FDE 周期解的存在性问题与零解稳定性问题迥然不同. 后者仅限于 RFDE 和 NFDE. 对 AFDE 和 CFDE 如第一章所说是不稳定型方程,研究稳定性是没有意义的. 但 FDE 周期解的存在性问题原则上对所有类型的 FDE 都是可能的,对 AFDE 和 CFDE 有如下的简单例子.

**例** 10　考虑 ADDE

$$\dot{x}(t)=x(t+\frac{\pi}{2}) \tag{6.1}$$

有周期解 $x(t)=\sin t$. 而 CDDE

$$\dot{x}(t)=x(t-\frac{\pi}{2})+2x(t+\frac{\pi}{2}) \tag{6.2}$$

也有周期解 $x(t)=\sin t$. 但这两个方程无稳定性可言.

(2)如例 1 所表明的那样，非周期 FDE 也可能有周期解. 因之研究对象又可划分为两类：周期 FDE 与非周期 FDE. 现有的研究工作主要是研究周期方程的周期解.

3. 方法

研究 FDE 周期解的存在性的方法，基本上都是沿用常微分方程的已知方法. 当然，为了适应更为复杂的 FDE，各种方法的推广并不容易，必定要做各式各样的补充、修改甚至需要许多具实质性的分析技巧方面的发展.

除了本章介绍的各种研究方法以外还可参考[4][11]等等，总地说，多数方法都是针对某些具体方程类的，完整而普遍适用的方法不多，稍为广泛的方法是：不动点法，$V$ 函数法与逐次逼近法——这是指 FDE 而言的.

# 第九章

# 振动性与渐近性

本章要详尽描述 FDE 解的振动性、渐近性的有关概念，并给出一系列例子表达振动性和渐近性的典型结果.

## §1 问题的提法

作为例子，考虑一个常微分方程

$$\ddot{x}(t)+p(t)\dot{x}(t)+q(t)x(t)=f(t) \tag{1.1}$$

称(1.1)的解是振动的，如果对(1.1)的非零解 $x(t)$，存在序列 $\{t_k\}$，$t_k\to\infty$，$k\to\infty$ 使得 $x(t_k)=0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，则称 $x$ 是振动的，反之叫做非振动的. 常微分方程解的振动理论的应用背景极其广泛，这是十分明显的，有一系列相当完整的专著，参看[18]等等.

上述定义对任何常微分方程都适用. 当常微分方程中引入时滞，甚至对更普遍的 FDE，同样存在振动性问题，但很多研究工作是简单地沿用上述常微分方程的定义，这是有缺陷的. 我们观察如下例子.

**例** 1(第五章例 18)　方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x\left(t-\frac{3\pi}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$h(t)=\begin{cases} g(t), t\leqslant 0, g\in C((-\infty,0],R^n)\text{是任意给定的} \\ 0 \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{3\pi}{2} \\ -\cos t \quad \frac{3\pi}{2}\leqslant t\leqslant 3\pi \\ 1 \quad t\geqslant 3\pi \end{cases}$$

(1.2)的解，当 $\sigma=0$ 时写成

$$x(t,0,\varphi)=\begin{cases} \varphi(t) & t\in[-\frac{3\pi}{2},0) \\ \varphi(0) & t\in[0,\frac{3\pi}{2}) \\ -\sin t\varphi(0) & t\geqslant\frac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{1.3}$$

按常微分方程的上述解的振动性定义，它的一切解都是振动的.

**例** 2 （第五章例 19） 方程

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t-1) \tag{1.4}$$

$$a(t)=\begin{cases} 2\sin^2\pi\tau & t\in[2n,2n+1] \\ 0 & t\in[2n-1,2n] \quad n=0,\pm 1,\cdots\cdots \end{cases}$$

设 $\sigma\in(-1,1)$，则当 $t\geqslant 3$ 以后，$x(t)\equiv 0$.

**例** 3（第四章例 6） 方程

$$\dot{x}(t)=b(t)x(t-1) \quad t\geqslant 0 \tag{1.5}$$

$$b(t)=\begin{cases} 0 & t\leqslant 0 \\ \cos 2\pi t-1 & 0<t\leqslant 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

取 $\sigma\leqslant 0$. 则当 $t\geqslant 1$ 时 $x(t)\equiv 0$.

我们看到，例 2、例 3 的一切解也都符合常微分方程振动性的定义，事实上，对例 2，当 $t\geqslant 3$ 以后可以任意取序列 $\{t_k\}$（对例 3，当 $t\geqslant 1$ 以后 $\{t_n\}$ 可任意取）. 但此时解 $x(t)\equiv 0$ 已失去原先“振动”的物理意义．为了排除这种情况，我们把 FDE 的振动性定义加强，考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{1.7}$$

对算子 $D,f$ 的各项假定沿用第四、六章的假定，并且设(1.6)(1.7)的解整体存在且唯一.

**定义 1.1** 设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是(1.6)(或(1.7))过 $(\sigma,\varphi)$ 的一个解. 若∃ $T(\sigma,\varphi)\geqslant\sigma$，使当 $t\geqslant T(\sigma,\varphi)$ 时 $x(t,\sigma,\varphi)=0$，则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是一个最终零解.

如例 2、例 3 所表明的那样，最终零解可以是非零解，这与常微分方程有本质区别. 倘若简单地沿用常微的振动性定义，则一切最终零解都是振动的，这是不合理的提法.

**定义 1.2** 设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是(1.6)(或(1.7))过 $(\sigma,\varphi)$ 的一个非最终零解，且存在序列 $\{t_k\}$，$t_k\to\infty$，$k\to\infty$ 使得 $x(t_k,\sigma,\varphi)=0$，则称 $x$ 是(1.6)或(1.7)的一个振动解. 否则称 $x$ 非振动解. 若一个泛函微分方程的所有非最终零解都是振动的，则称此"方程为振动"的.

按照这一定义，例 2、例 3 的一切解都是非振动的.

这样定义"方程为振动"是有缺点的，因为一个 FDE 可以满足解整体存在且唯一，但不存在任何非最终零解，事实上这个方程不是振动的. 但是，依这个定义从逻辑上可以这样理解："只要所有非最终零解都振动……"而所有非最终零解全体 $C_N$ 为空集. 因此还可改为

**定义 1.3** 设(1.6)(或(1.7))没有不是零解的最终零解(以下简称"非零的最终零解")，并且它的一切解都是振动的，则方程称为是振动的.

**定义 1.4** 设(1.6)(或(1.7))的所有非最终零解都是振动的，且 $C_N\neq\varnothing$(空集)，则称此方程是振动的.

这两种定义供不同的应用背景选择.

如上所述，对各类 FDE 原则上均可研究解的振动性问题而不

局限于(1.6)(1.7).问题的提法大致上有以下几种：

(1)判断方程至少有一个振动解.

(2)判断方程的所有非最终零解振动.按定义 1.3 或 1.4 判断方程的振动与否.

(3)判断方程的一切解非振动.

(4)判断方程是否存在最终零解.

这些问题中,(4)是十分困难的,注意到例 1～3 都是点态退化的,那末是否把点态退化的 FDE 排除出去便可以断言方程必无最终零解？这是一个尚待研究的问题.无论如何,这种说法是不全面的.因为例 1 和例 2、例 3 不同,虽然它是点态退化的,但它并没有最终零解,而且一切解都是振动的.

我们注意到已知的大量关于振动性的研究工作都是简单地引用常微分方程原先的振动性定义,没有排除存在最终零解的可能性.对这种状况有两种建议：

(1)把常微分方程解的振动性定义作为 FDE 解的振动性定义,而把定义 1.2 或定义 1.4 意义下的振动性称为“严格振动的”.

(2)把常微分方程振动性的定义用于 FDE 时称为“广义振动”以区别于定义 1.2 给出的振动性.

我们倾向于用(1)的提法.

**定义 1.5**　设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 为 FDE(1.6)(或(1.7))过 $(\sigma,\varphi)$ 的解,若∃ $\tau(\sigma,\varphi)\geqslant\sigma$,使得当 $t\geqslant\tau(\sigma,\varphi)$ 时有 $|x(t,\sigma,\varphi)|>0$(或 $|x(t,\sigma,\varphi)|<0$),则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 为一最终正解(或最终负解).

从这个定义出发,我们所谓的振动解是：既不是最终正解也不是最终负解的情形.严格振动还要求不是最终零解的情形.

在严格振动的定义 1.2 中提出了“非最终零解”这一限制如何反映在方程的构造中？这是一个相当困难的问题.换言之,如何给出无最终零解的条件?这个公开问题是很值得探讨的,希望至少能得出一些充分性条件.

## §2 两种基本类型 FDE 的振动性

本节介绍线性自治系统与一阶系统的振动性.

### 1. 线性自治 DDE 的振动性

设 $x \in R$. 考虑诸方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}(x(t) + Cx(t-\tau)) = Ax(t) + Bx(t-\tau) \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Dx(t+\tau) \tag{2.3}$$

其中 $A,B,C,D$ 为 $n \times n$ 常数阵. $\tau = \text{const.} > 0$ 它们相应的特征方程为

$$h(\lambda) = |\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0 \tag{2.4}$$

$$h(\lambda) = |\lambda I + C\lambda e^{-\lambda\tau} - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0 \tag{2.5}$$

$$h(\lambda) = |\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau} - De^{\lambda\tau}| = 0 \tag{2.6}$$

由第二章的结论即推得

**引理** 2.1 (2.1)的特征根和振动性之间有如下关系(不妨设(2.4)无重根).

(1)(2.4)的一个非实根 $\lambda$,对应(2.1)的一族振动解 $Ce^{\lambda t}, C \in R$.

(2)(2.4)的一个实根 $\dot{\lambda}$ 对应(2.1)的一族非振动解 $C_1e^{\dot{\lambda}t}, C_1 \in R$.

(3)当且仅当(2.4)没有实根时,方程(2.1)的一切解振动,或者说方程是振动的.

事实上,对有重根的情形引理结论也成立.

引理的结论对(2.2)(2.3)及其相应的特征方程(2.5)(2.6)也成立. 证明从略.

对这些方程的各式振动性问题提法有大量的研究工作如[18]等等. 这里只作举例性介绍. 让读者了解一下处理问题的方式.

考虑一阶 NDDE

$$\frac{d}{dt}[x(t)+px(t-r)]+qx(t-s)=0 \quad t\geqslant\sigma \tag{2.7}$$

其中 $p,q,r>0,s>0$ 皆常数, $\sigma$ 为初始时刻, 对应的特征方程为

$$h(\lambda)=\lambda+p\lambda e^{-\lambda r}+qe^{-\lambda s}=0 \tag{2.8}$$

**引理 2.2** (2.8)无实根的必要条件是: $p>0,s>r$. 这也是(2.7)一切解振动的必要条件.

现在给出(2.7)一切解都振动的判断准则.

(1)设 $p>0,s>r$, 引入参数 $k>0,B>0,H(B+H>0)$ 及待定常数 $a>0,b>0(a+b=1)$. 把 $h(\lambda)$ 改写成

$$\begin{aligned} h(\lambda)&=\lambda+p\lambda e^{-\lambda r}+qe^{-\lambda s} \\ &=[\lambda+(B+H)e^{-\lambda s}-k]+[k-Be^{-\lambda r}+aqe^{-\lambda s}] \\ &\quad+[p\lambda-H+bqe^{-\lambda(s-r)}]e^{-\lambda r} \\ &\triangleq f_1(\lambda)+f_2(\lambda)+f_3(\lambda)e^{-\lambda r} \end{aligned}$$

$$f_1(\lambda)=\lambda+(B+H)e^{-\lambda s}-k \tag{2.9}$$

$$f_2(\lambda)=k-Be^{-\lambda r}+aqe^{-\lambda s} \tag{2.10}$$

$$f_3(\lambda)=p\lambda-H+bqe^{-\lambda(s-r)} \tag{2.11}$$

由(2.9)(2.10)(2.11)得出估式

$$f_1(\lambda)\geqslant f_1\left(\frac{1}{r}\ln(r(B+H))\right)-\frac{1}{r}[\ln(r(B+H))+1]-k \tag{2.12}$$

$$f_2(\lambda)\geqslant f_2\left(\frac{1}{s-r}\ln\frac{asq}{Br}\right)=k-\frac{B(s-r)}{s}\left(\frac{Br}{asq}\right)^{r/(s-r)} \tag{2.13}$$

$$f_3(\lambda)\geqslant f_3\left(\frac{1}{s-r}\ln\frac{bq(s-r)}{p}\right)=\frac{p}{s-r}\left[\ln\frac{bq(s-r)}{b}+1\right]-H \tag{2.14}$$

若要使得

$$f(\lambda)>0, \lambda \in R$$

只要成立

$$(B+H)re^{-1+kr} \tag{2.15}$$

$$aq>\frac{kr}{s-r}\left(\frac{B(s-r)}{ks}\right)^{s/r} \triangleq A_1>0 \tag{2.16}$$

$$bq>\frac{p}{s-r}\exp[-1+H(s-r)/p] \triangleq A_2>0 \tag{2.17}$$

我们取

$$a=\frac{A_1}{A_1+A_2}>0, b=\frac{A_2}{A_1+A_2}>0 \quad (a+b=1)$$

(2.16)(2.17)等价于

$$q>\frac{kr}{s-r}\left(\frac{B(s-r)}{ks}\right)^{s/r}+\frac{p}{s-r}\exp[-1+H(s-r)/p] \tag{2.18}$$

于是有

**定理** 2.1 当 $p>0, s>r$ 时对满足(2.15)的常数 $k>0, B>0, B+H>0$，方程(2.7)的一切解振动的充分条件是成立(2.18).

注意到不等式(2.18)中取(2.15)中各种不同的 $K, B, H$ 的组合，可得到许多不同的充分条件. 特别地，取

$$H=0, K=\frac{1}{r}-\frac{1}{s}, B=\frac{1}{r}e^{-r/s}$$

它们满足(2.15). 此时(2.18)化为

$$qe>\frac{p}{s-r}+\frac{1}{s}$$

(2)类似地，对 $p<0, r>s$; $p<0, s>r$，以及 $p<0, s=r$ 三种情形可以得出充分条件.

综合必要条件和各种情形下的充分条件，得出两种情形下的充要条件(对 $q$ 而言).

**定理** 2.2 限定 $p, s, r$，我们得振动性关于 $q$ 的条件.

(1)当 $p>0, s\geqslant 2r$ 或 $r<s<2r, 0<p<\frac{s-r}{(2r-s)e}$ 时，(2.7)的

一切解为振动的充要条件是

$$q>\frac{p}{s-r}e^{k(s-r)-s/(r+1)}+\frac{kr}{s-r}e^{ks-s/r} \tag{2.19}$$

其中 $k>0$ 满足关系式

$$\left(\frac{ks}{s-r}-\frac{1}{r}\right)e^{kr-1}=-kp+\frac{p}{r}-\frac{p}{s-r} \tag{2.20}$$

(2)当 $p<0, r>s$ 时方程(1)的一切解振动的充要条件是

$$q>\left[\frac{1}{s}-\frac{kr}{r-s}-\frac{p}{r-s}e^{r/s-kr}\right]e^{1+ks} \tag{2.21}$$

其中 $k>0$ 满足关系式

$$p(r-s)\left(k-\frac{1}{s}-\frac{1}{r-s}\right)=kse^{kr-r/s} \tag{2.22}$$

证明参看[18].

### 2. 一阶非定常系统的振动性

考虑一阶微分不等式及方程

$$\dot{y}(t)+p(t)y(t-\tau(t))\leqslant 0 \tag{2.23}$$

$$\dot{y}(t)+p(t)y(t-\tau(t))\geqslant 0 \tag{2.24}$$

$$\dot{y}(t)+p(t)y(t-\tau(t))=0 \tag{2.25}$$

记 $g(t)=t-\tau(t)$，要求 $0<g(t)<t$ 连续，$p$ 连续，且 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=+\infty$，则有

**定理 2.3** 若成立

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds>\frac{1}{e} \tag{2.26}$$

则有

(1)(2.23)无最终正解.

(2)(2.24)无最终负解.

(3)(2.25)的一切解都是振动的.

**证** 不失一般性，设 $g(t)$ 非减，且记 $\delta(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}g(s)$，不难推

出(2.26)等价于$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$.

证(1) 设 $y(t)$是(2.23)的一个最终正解,对 $t\geq t_1$, $y(g(t)) > 0$. 由(2.26)∃ $t_2 > t_1$,使得

$$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds \geq c > e^{-1}, t\geq t_2 \qquad (2.27)$$

由于$\dot{y}(t) < 0$, $t\geq t_1$,由(2.23)分离变量,从$g(t)$到$t$积分得 $\ln(y(t)/y(g(t)) + \int_{g(t)}^{t} p(s)ds \leqslant 0$, $t\geqslant t_2$. 亦即$t\geqslant t_2$时, $\ln(y(g(t)/y(t)) \geqslant \int_{g(t)}^{t} p(s)ds \geqslant c$. 因为$e^x \geqslant ex$对∀ $x\geqslant 0$成立 ⇒$y(g(t))/y(t)) \geqslant ec$, $t\geqslant t_2$. 重复上述做法⇒存在序列$\{t_k\}$,使得

$$y(g(t))/y(t) \geqslant (ec)^k, t\geqslant t_k \qquad (2.28)$$

由(2.27),∃ $t^*$使得

$$\int_{g(t)}^{t^*} p(s)ds \geqslant \frac{c}{2}, \int_{t^*}^{t} p(s)ds \geqslant \frac{c}{2}, t\geqslant t_k$$

再由(2,23)从 $g(t)$到 $t^*$ 积分得

$$y(t^*) - y(g(t)) + \int_{g(t)}^{t^*} p(s)y(g(s))ds \leqslant 0$$

这意味着

$$y(g(t)) \geqslant y(g(t^*))\frac{c}{2} \qquad (2.29)$$

类似地,我们有

$$y(t) - y(t^*) + \int_{t^*}^{t} p(s)y(g(s))ds \leqslant 0$$

故有

$$y(t^*) \geqslant y(g(t))\frac{c}{2} \qquad (2.30)$$

合并(2.29)(2.30)得

$$y(t^*) \geqslant y(g(t^*))(\frac{c}{2})^2 \qquad (2.31)$$

由(2.28)(2.31)得

$$(\frac{2}{c})^2 \geqslant \frac{y(g(t^*))}{y(t^*)} \geqslant (ec)^k, \forall\ t \geqslant t_k \tag{2.32}$$

选择 $k$ 充分大,使 $(ec)^k > (\frac{2}{c})^2$,由于 $ec>1$,这是可能的.这与(2.32)不合.

完全类似地证明(2),而由(1)(2)⇒(3).证毕.

**定理** 2.4　设(2.25)中 $p,\tau$ 皆正数,且 $p\tau e \leqslant 1$,则(2.25)有一个非振动解.

**证**　此时(2.25)是自治线性的,特征方程为 $h(\lambda)=\lambda+p\exp(-\lambda\tau)=0$,立即可看出 $h(0)=p>0$ 且

$$h(-\frac{1}{\tau}) = \frac{-1}{\tau} + pe = \frac{p\tau e-1}{\tau} \leqslant 0$$

⇒∃ 非负实数 $\lambda \in [-\frac{1}{\tau}, 0]$ 使 $\exp\lambda t$ 是(2.25)的一个非振动解.

**推论**　若 $p,\tau$ 皆正数,则(2.25)一切解都是振动的充要条件是 $p\tau e>1$.

**例** 4　考虑方程

$$\dot{y}(t) + e^{-1}y(t-1) = 0 \tag{2.33}$$

有一个非振动解 $y(t)=\exp(-t)$.事实上,因为 $p\tau e=1$,由定理 2.4 即得.

**例** 5　对方程

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{(e\ln 2)t} y(\frac{t}{2}) = 0 \tag{2.34}$$

其中 $p(t)=1/(e\ln 2)t$, $\tau(t)=\frac{t}{2}$.显然有

$$\int_{t/2}^{t} p(s)ds = e^{-1}$$

所以方程(2.34)不满足条件(2.26).事实上,方程(2.34)有非振动解 $y(t)=t^a$, $a=-1/\ln 2$.

**定理** 2.5　若 $p,g \in C(R_+, R_+)$, $g(t)<t$ 是非减的且

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=+\infty,\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds>1 \tag{2.35}$$

则(2.25)的所有解都是振动的.

**证** 不失一般性,设 $y(t)>0$ 是一个非振动解,使得 $y(g(t))>0, t\geqslant t_1$. 由(2.25)自 $g(t)$到 $t$ 积分,我们有

$$y(t)-y(g(t))+\int_{g(t)}^{t} p(s)y(g(s))ds=0$$

由(2.35),上式可改写为

$$y(t)+y(g(t))\left[\int_{g(t)}^{t} p(s)ds-1\right]\leqslant 0 \tag{2.36}$$

由(2.36)及$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds\geqslant 1$,当 $t$ 充分大时成立⇒矛盾. 定理证毕.

**例** 6 考虑方程

$$\dot{y}(t)+\left[\left(\sqrt{2}+\frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)+\cos t\right]y\left(t-\frac{2}{\pi}\right)=0 \tag{2.37}$$

其中 $p(t)=(\sqrt{2}+e^{-1})(2/\pi)+\cos t>0, t\in R_+$. 且

$$\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t}\left((\sqrt{2}+e^{-1})\left(\frac{2}{\pi}\right)+\cos s\right)ds$$

$$=\sqrt{2}+e^{-1}+\sin t+\cos t.$$

故

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=e^{-1}$$

所以不满足条件(2.26). 然而有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=2\sqrt{2}+e^{-1}>1$$

故方程(2.37)满足定理 2.5 的条件(2.35)⇒它的一切解都是振动的.

**定理** 2.6 若 $p,g\in C(R_+,R_+)$, $g(t)<t$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=+\infty$, 且

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds<e^{-1} \tag{2.38}$$

则方程(2.25)有非振动解.

**证** 我们要求一个(2.25)形如

$$y(t)=\exp\int_{\sigma}^{t}\lambda(s)ds \tag{2.39}$$

的解,其中 $\lambda(t)$ 为

$$\lambda(t)=-p(t)\exp\left[-\int_{\sigma}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{2.40}$$

$\sigma$ 是初始时刻,若找到实值函数 $\lambda(t)$ 满足(2.40),则认为定理已得证. 定义算子

$$T\lambda(t)=\begin{cases}-p(t)\exp\left[-\int_{g(t)}^{t}\lambda(s)ds\right] & t\geqslant\sigma\\ \varphi(\tau) & t\in[\sigma-r,\sigma],\inf\limits_{t\geqslant\sigma}g(t)=\sigma-r,r>0\end{cases} \tag{2.41}$$

$T$ 是 $C([\sigma-r,+\infty),R)$ 到自身的非减连续算子. 由(2.38)可选取 $\sigma\in R_{+}$,使得

$$e\int_{g(t)}^{t}p(s)ds<1,t\geqslant\sigma \tag{2.42}$$

记 $y_0(t)=-ep(t)\leqslant 0$. 在(2.41)中的 $\varphi$ 成立.

$$y_0(t)\leqslant\varphi(t)\leqslant 0 \qquad t\in[\sigma-r,\sigma] \tag{2.43}$$

显然 $y_0\in C([\sigma-r,+\infty),R)$,由(2.41)(2.43)有

$$(Ty_0)(t)=-p(t)\exp\left[-\int_{g(t)}^{t}y_0(s)ds\right]\geqslant-ep(t)=y_0(t),t\geqslant$$

令 $x_0(t)=0,t\in[\sigma-r,+\infty)$. 则有

$$(Tx_0)\leqslant x_0(t)$$

由 $y_0\leqslant x_0\Rightarrow Ty_0\leqslant Tx_0$ 且 $y_0\leqslant Ty_0\leqslant Tx_0\leqslant x_0$.

令 $y_{n+1}=Ty_n$ 满足 $y_0\leqslant y_n\leqslant y_{n+1}\leqslant x_0$,递增的,故序列 $\{y_n\}$ 趋于极限 $\lambda$,由 Lebesque 收敛定理 $Ty_n$ 收敛于 $T\lambda$,故 $T\lambda=\lambda$,即 $\lambda$ 是 $[\sigma-r,+\infty)$ 上的一个连续函数. 进而

$$y_0(t)\leqslant\lambda(t)\leqslant x_0(t),t\geqslant\sigma-r \tag{2.44}$$

这就证明(2.40)有一个在 $[\sigma-r,+\infty)$ 上连续的解 $\lambda(t)$,使得

$$y(t)=\exp\left[\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{2.45}$$

是(2.25)的一个非振动解.

现在考虑比(2.23)(2.24)(2.25)稍为一般的方程

$$\dot{y}(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)\leqslant 0 \tag{2.46}$$

$$\dot{y}(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)\geqslant 0 \tag{2.47}$$

$$\dot{y}(t)+a(t)y(t)+p(t)y(t-\tau)=0 \tag{2.48}$$

这里 $\tau=\text{const.}>0$. 当 $t\geqslant 0$ 时 $a(t)\geqslant 0, p(t)>0$,是连续的. 我们有

**引理 2.3** 若成立

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds>\frac{1}{e}\exp\left(-\varlimsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds\right) \tag{2.49}$$

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau/2}^{t}p(s)ds>0 \tag{2.50}$$

则(2.46)没有最终正解.

**证** 若(2.46) 存在最终正解 $y(t)$,设当 $t>\sigma$ 时 $y(t)>0$. $\sigma$ 为充分大的数. 于是当 $t\geqslant\sigma+\tau$ 时 $y(t-\tau)>0$,由(2.46)$\Rightarrow$当 $t>\sigma+\tau$ 时 $\dot{y}(t)<0$. 因此当 $t>\sigma+2\tau$ 时 $y(t)<y(t-\tau)$,令

$$W(t)=\frac{y(t-\tau)}{y(t)}, t>\sigma+2\tau \qquad W(t)>1. \tag{2.51}$$

用 $y(t)$除(2.46)两边得

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}+a(t)+p(t)W(t)\leqslant 0, t\geqslant\sigma+2\tau$$

从 $t-\tau$ 到 $t$ 积分上式得

$$\ln y(t)-\ln y(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds+\int_{t-\tau}^{t}p(s)W(s)ds\leqslant 0, t\geqslant\sigma+3\tau.$$

由(2.51)有

$$\ln W(t)\geqslant\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds+\int_{t-\tau}^{t}p(s)W(s)ds, t>\sigma+3\tau \tag{2.52}$$

再由 $t-\tau/2$ 到 $t$ 积分(2.46). 注意 $y(t)$是递减的,有

$$1-\frac{y(t-\frac{\tau}{2})}{y(t)}+\int_{t-\tau/2}^{t}a(s)ds + \frac{y(t-\tau)}{y(t)}\int_{t-\tau/2}^{t}p(s)ds\leqslant 0 \tag{2.53}$$

以及

$$\frac{y(t)}{y(t-\frac{\tau}{2})}-1+\frac{y(t)}{y(t-\frac{\tau}{2})}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}a(s)ds + \frac{y(t-\tau)}{y(t-\tau/2)}\int_{t-\tau/2}^{t}p(s)ds\leqslant 0 \tag{2.54}$$

令 $\lim\limits_{t\to\infty}W(t)=\lambda$，则 $\lambda\geqslant 1$. 它可能是有限的，也可能是 $+\infty$. 分两种情况分析如下：

(1)$\lambda$ 为有限的情形. 对(2.52)两边取极限得

$$\ln\lambda\geqslant\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds+(\lambda-\varepsilon)\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds$$

其中 $\varepsilon$ 充分地小. 因此

$$\ln\lambda-\lambda\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\geqslant\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds$$

由于$\max\limits_{\lambda\geqslant 1}\{\ln\lambda-\lambda\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\}=-\ln(\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds)-1$.
所以有

$$\ln(\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds)\leqslant -1-\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds$$

或者

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)ds\leqslant\frac{1}{e}\exp(-\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}a(s)ds)$$

这与条件(2.49)不合.

(2)$\lambda$ 为无限的情形，即$\lim\limits_{t\to\infty}y(t-\tau)/y(t)=\infty$. 由条件(2.50)及 $a(t)\geqslant 0$. 由(2.53)$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}y(t-\frac{\tau}{2})/y(t)=\infty$. 故$\lim\limits_{t\to\infty}y(t-\tau)/y(t-\tau/2)=\infty$. 这与(2.54)矛盾. 由此得出引理结论成立.

类似证明可得

**引理 2.4** 若引理 2.3 条件满足，则(2.47)没有最终负解.

由引理 2.3、2.4，若方程(2.48)没有最终正解和最终负解，则它的一切解振动. 即

**定理 2.7** 若引理 2.3 的条件满足，则方程(2.48)的一切解是振动的.

考虑(2.46)(2.47)(2.48)的特殊情形，即 $a(t)$和 $p(t)$分别等于常数 $a$ 和 $p$，$a\geqslant 0$，$p\geqslant 0$. 即

$$\dot{y}(t)+ay(t)+py(t-\tau)\leqslant 0 \qquad (2.46)_0$$

$$\dot{y}(t)+ay(t)+py(t-\tau)\geqslant 0 \qquad (2.47)_0$$

$$\dot{y}(t)+ay(t)+py(t-\tau)=0 \qquad (2.48)_0$$

此时条件(2.49)(2.50)退化为

$$p\tau>\frac{1}{e}e^{-a\tau},a\geqslant 0 \qquad (2.55)$$

**定理 2.8** 设

$$p\tau\leqslant\frac{1}{e}e^{-a\tau},a\geqslant 0 \qquad (2.56)$$

则$(2.46)_0$有最终正解. $(2.47)_0$有最终负解，$(2.48)_0$有非振动解.

**证** 先证$(2.46)_0$有最终正解，考察$(2.46)_0$具有形式 $y(t)=e^{\lambda t}$的解. 它满足特征方程

$$h(\lambda)=\lambda+a+pe^{-\lambda\tau}\leqslant 0$$

由(2.56)有

$$h(-\frac{1}{\pi}-a)=-\frac{1}{\tau}-a+a+pe^{(1/\tau+a)\tau}\leqslant-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}=0$$

故$(2.46)_0$存在正解 $e^{-(1/\tau+a)t}$. 同理$(2.47)_0$存在负解$-e^{-(1/\tau+a)t}$.

最后，由于 $h(0)>0$，$h(-\frac{1}{\tau}-a)\leqslant 0\Rightarrow\exists$ 一个 $\lambda$ 的区间$[-\frac{1}{\tau}-a,0]$上使得 $e^{\lambda t}$是$(2.48)_0$的一个非振动解.

由上述结果得

**定理** 2.9 对$(2.46)_0(2.47)_0(2.48)_0$成立：

$(2.46)_0$没有最终正解.

$(2.47)_0$没有最终负解.

$(2.48)_0$的一切解振动.

的充分必要条件为 $p\tau>\frac{1}{e}e^{-a\tau},a\geqslant0$.

**例** 7 方程

$$\dot{y}(t)+y(t-\frac{\pi}{2})=0 \tag{2.57}$$

$p=1,\tau=\frac{\pi}{2}$. 立即可以验证(2.57)满足条件(2.55)⇒(2.57)的所有解振动(事实上第二章中已指出存在周期解 $y_1(t)=\sin t,y_2(t)=\cos t$).

## §3 二阶FDE解的振动性

由于二阶系统的力学意义极其普遍,这类方程在振动性的研究中占有很大的比例,限于篇幅,我们仍坚持着力于基本概念的阐述,并以最简单的方程类为例介绍解决问题的方法方式.考虑二阶方程

$$\ddot{y}(t)-a(t)y(t)-[p^2+q(t)]y(t-2\tau)=0 \tag{3.1}$$

**定理** 3.1 设 $a(t)\geqslant0,q(t)\geqslant0$ 连续,$t\in R_+,p,\tau$ 是正常数且

$$p\tau e>1 \tag{3.2}$$

则方程(3.1)的一切有界解都是振动的.

**证** 若结论不真,则(3.1)存在有界解 $y(t)$使得当 $\sigma$ 充分大时有 $y(t)>0,t>\sigma\Rightarrow$当 $t>\sigma+2\tau$ 时,成立 $y(t-2\tau)>0$. 由(3.1),当 $t>\sigma+2\tau$ 时,$\ddot{y}(t)>0$. 故 $\dot{y}(t)$递增,由 $y(t)$有界,(3.1)⇒$\dot{y}(t)>0$.令

$$x(t)=\dot{y}(t)-py(t-\tau) \tag{3.3}$$

则 $x(t)$ 当 $t$ 充分大时为负. 对(3.3)两边求导得

$$\dot{x}(t)=\ddot{y}(t)-p\dot{y}(t-\tau)$$

于是有

$$\dot{x}(t)+px(t-\tau)=\ddot{y}(t)-p\dot{y}(t-\tau)+p\dot{y}(t-\tau)$$
$$-p^2y(t-2\tau)=a(t)y(t)+q(t)y(t-2\tau)\geqslant 0$$

即

$$\dot{x}(t)+px(t-\tau)\geqslant 0 \tag{3.4}$$

由条件 $p\tau e>1$ 及定理 2.9 的结果⇒(3.4)没有最终负解. 与(3.3)矛盾⇒定理结论成立.

对方程

$$\ddot{y}(t)-a(t)y(t)-p^2(t)y(t-2\tau)=0 \tag{3.5}$$

我们有

**定理** 3.2 设(3.5)中 $a(t)\geqslant 0$, $p(t)>0$ 连续, $t\in R_+$, $\tau=$const. $>0$, 若引理 2.3 的条件(2.49)(2.50)成立, 且

$$p(t)[p(t)-p(t-\tau)]\geqslant\dot{p}(t)\geqslant 0 \tag{3.6}$$

则方程(3.5)的一切有界解都是振动的.

**证** 若结论不真, 则存在(3.5)的一个有界解 $y(t)$, 使得对足够大的 $\sigma\in R$, 有 $y(t)>0$, $t>\sigma$⇒当 $t$ 足够大时 $\dot{y}(t)<0$. 令

$$x(t)=\dot{y}(t)-p(t)y(t-\tau) \tag{3.7}$$

则 $x(t)$ 当 $t$ 充分大时为负. 对(3.7)求导数得

$$\dot{x}(t)=\ddot{y}(t)-\dot{p}(t)y(t-\tau)-p(t)\dot{y}(t-\tau)$$

我们有

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau)=\ddot{y}(t)-\dot{p}(t)y(t-\tau)-p(t)\dot{y}(t-\tau)$$
$$+p(t)\dot{y}(t-\tau)-p(t)p(t-\tau)y(t-2\tau)$$
$$=a(t)y(t)+p^2(t)y(t-2\tau)-p'(t)y(t-\tau)$$
$$-p(t)p(t-\tau)y(t-2\tau)$$
$$=a(t)y(t)+p(t)[p(t)-p(t-\tau)]y(t-2\tau)-\dot{p}(t)y(t-$$

$\tau)$

$$\geqslant p(t)[p(t)-p(t-\tau)]y(t-2\tau)-p'(t)y(t-\tau).$$

由于 $y(t)>0,\dot{y}(t)<0$,当 $t$ 充分大时,有

$$0<y(t-\tau)<y(t-2\tau)$$

又由(3.6)得

$$p(t)[p(t)-p(t-\tau)]y(t-2\tau)\geqslant\dot{p}(t)y(t-\tau).$$

故 $\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau)\geqslant 0$. 由引理 2.4 它没有最终负解,这与(3.7)矛盾. 定理得证.

对非线性二阶纯量 FDE 也给出一个例子.

$$\ddot{g}(t,y(t))+f(t,y(t),y(p(t)),\dot{y}(t),\dot{y}(q(t)))=0 \quad (3.8)$$

假定(3.8)的解整体存在且唯一.

**注** 3.1 (3.8)实际上是一类方程,在下面关于 $g,f,p,q$ 的假定并不能保证解的整体存在唯一性. 由于这个前提不是本章的讨论内容,所以只作上述的定性假定.

设(3.8)中 $p(t),g(t)$ 为连续函数,$t\to\infty,p(t)\to\infty,g(t,y)$具有连续一阶偏导数,$f(u,v,w,x)$关于诸变元连续. 则有

**定理** 3.3 若满足条件

(1)当 $u,v$ 同号时 $f(t,u,v,w,x)$与 $u,v$ 同号.

(2)$yg(t,y)>0$.

(3)当 $t$ 足够大时 $g'_y(t,y)>0$,又当 $y>0$ 时 $g'_t(t,y)\leqslant 0$,当 $y<0$ 时,$g'_t(t,y)\geqslant 0$.

(4)对正的单调 不减(或负的单调 不增)可微函数 $y(t)$,当 $t\to\infty$时

$$\frac{1}{\tau}\int_{\tau}^{t}\int_{T}^{\tau}F(\alpha)d\alpha d\tau\to\infty(\text{或}-\infty) \quad (3.9)$$

则(3.8)的一切解是振动的.

这里记号 $F$ 定义为

$$f(t,y(t),y(p(t)),y'(t),y(q(t)))\triangleq F(t) \quad (3.10)$$

**证** （用反证法） 设定理结论不成立，则存在非振动解 $y(t)$. 不妨设$\exists\ t_1>0$，使当 $t\geqslant t_1$ 时，$y(t)>0$，由于 $t\to\infty$时 $p(t)\to\infty\Rightarrow\exists\ T>t_1$，使得当 $t\geqslant T$ 时 $y(p(t))>0$，且条件(3)成立.

由条件(1)$\Rightarrow t>T$ 时 $F(t)>0$，从而 $\ddot{g}(t,y(t))<0$

此时 $\dot{g}(t,y(t))$单减，可分为两种情形考虑之.

(1)若 $t\geqslant T$ 时，$\dot{g}(t,y(t))\geqslant 0$，则 $g'_t(t,y(t)+g'_y(t,y(t))y'(t)\geqslant 0$，由条件(3)得

$$y'(t)\geqslant-\frac{g'_t(t,y(t))}{g'_y(t,y(t))}\geqslant 0$$

可见 $y(t)$当 $t\geqslant T$ 时为正的非减单调函数.

现在对(3.8)从 $T$ 到 $t(t>T)$积分两次得

$$g(t,y(t))=g(T,y(\tau))+\dot{g}(T,y(T))(t-T)-\int_T^t\int_T^\tau F(a)dad\tau$$

由条件(4)$\Rightarrow$当 $t\to\infty$时上式右边第三项是比第二项高阶的无穷大量，故 $t$ 充分大时 $g(t,y(t))<0$. 由条件(2)$\Rightarrow y(t)<0$. 这与假设 $y(t)\geqslant 0$ 矛盾.

(2)若$t\geqslant T_1\geqslant T$时，$\dot{g}(t,y(t))<0$，则由于当$t\geqslant T$时$\dot{g}(t,y(t))$单调减少$\Rightarrow$当 $t\geqslant T_1$ 时有

$$\dot{g}(t,y(t))\leqslant\dot{g}(T_1,y(T_1))<0.$$

从 $T_1$ 到 $t(t>T_1)$积分之，得

$$g(t,y(t))<g(T_1,y(T_1))+g'(T_1,y(T_1))(t-T_1).$$

当 $t\to\infty$时，上式右边第二项趋于$-\infty$，故 $t$ 充分大时 $g(t,y(t))<0$，由条件(2)$\Rightarrow y(t)<0$，这与 $y(t)>0$ 矛盾.

对于 $t\geqslant T$ 时 $y(t)<0$ 的情形有类似结论. 证毕.

关于二阶系统的广泛研究还可参考[18]. 这里不再罗列这些工作的具体内容.

## §4 高阶系统的振动性

自70年代初期首次出现研究$n$阶FDE振动性的研究工作以来，至少有一百多篇专论这一课题的工作．然而由于问题的复杂性，无论从方法上，还是从最终结果来看都仅仅是开始，还谈不上有普遍适用的方法与系统的判断准则．由于一阶、二阶是本节的特殊情况，所以有几点综述性的观点留在本节给出．

**1. 解整体存在性的保证条件**

在振动性论文中，有一类是十分模糊的形式推广．作者甚至不知道自己给出的准则有没有方程类适用．换句话说，满足所有指出的条件的方程甚至不存在连续解，因而准则也就失去意义．例如考虑方程

$$\dot{y}(t)+p(t)y(t-\tau(t,y(t)))=0 \tag{4.1}$$

其中$\tau(t,y(t))=\hat{g}(t)+s(y(t)),g(t)=t-\hat{g}(t)$，于是上式可改写为

$$\dot{y}(t)+p(t)y(g(t)-s(y(t)))=0 \tag{4.2}$$

设$p(t),g(t)$满足定理2.3的条件，若$s(y)$是一个有界非负连续函数，则(4.2)的每一个解在条件(2.26)之下都是振动的．

事实上，不失一般性可设(4.2)的一个最终正解为$y(t)>0,t\geqslant t_1\Rightarrow t_1$充分大时成立

$$y(g(t)-s(y(t)))>0,t\geqslant t_1$$

由此得出$\dot{y}(t)\leqslant 0$且$y(g(t))\leqslant y(g(t)-s(y(t)))$，故

$$\dot{y}(t)+p(t)y(g(t))\leqslant 0$$

这与定理2.3矛盾．证毕．

上述推导在逻辑上完全正确，但方程(4.1)的解是否存在？迄今只是一个谜而已．若$s(y(t))$相当复杂，是否存在连续解完全无

法预料(参看本书最后一章).

又例如§3中方程(3.8).$q(t)$只假定是一个连续函数,$p(t)$连续且$p(t)\to\infty$.若取$p(t)=\frac{t}{2},q(t)=\frac{3t}{2}$,则(3.8)是一偏差无界的混合型DDE.它的Cauchy问题提法还只在探索之中,解的整体存在性更不知道.我们不能排除这样的可能性:对符合定理假定的$g,f,p,q$诸函数,方程(3.8)不存在连续解,或者不存在区间$[a,+\infty)$上的整体解.

所有这类型的研究工作,实际上都沿用了一个直观概念"强解"——代入后能满足方程的函数$x(t)$($x(t)$定义在$[a,+\infty)$上,或$R$上),而不管它的Cauchy问题如何提法,也不管这种解是否存在,或者确切地,整体解存在与否.

我们在这里提出问题是想表达两层意思:

(1)至少在这类振动性研究中要指出:"假如整体解存在,且满足……则解是振动的"(不振动的,或者所有解振动).

(2)敦促对这类方程尽快建立基本理论,而绝无全盘否定形式逻辑推广工作价值的意思.

### 2. 方程解的振动性依赖于时滞

由于常微分方程对应于$r=0$,所以它不会出现振动性依赖于时滞的情形,FDE则不同,考虑一个最简单的例子.

**例8** 设$p,\tau\geqslant 0$都是常数.方程

$$\dot{y}(t)+py(t-\tau)=0 \tag{4.3}$$

若$p>0$给定,$\tau\in R_+$作为参数变化,由定理2.4⇒当$p\tau e\leqslant 1$时(4.3)有非振动解.由这个定理的推论又有:当$p\tau e>1$时(4.3)的一切解都是振动的——方程(4.3)是振动的,当$p$固定,(4.3)振动与否完全由$\tau$确定,并且$\tau=pe^{-1}$是一个分岐点.

这种情形通常叫做:由滞量本身产生的振动.这是一个新的研

究方向，特别对非线性系统，研究工作刚刚开始[41].

3. **高阶系统的振动性**

对 $n$ 阶 FDE 振动性有综述性文章和专著[18]. 这里先考虑方程

$$x^{(n)}(t)+p(t)f(x(g(t)))=q(t) \tag{4.4}$$

其中 $x\in R$. 基本假定为

(1) $p\in C(R_+,R)$, $q\in C(R_+,R)$.

(2) $g\in C(R_+,R)$, $g(t)\to\infty$, 当 $t\to\infty$.

(3) $f\in C(R,R)$ 单增，且当 $u\neq 0$ 时，$uf(u)>0$.

我们有

**定理** 4.1 设(4.4)满足上述条件(1)(2)(3)，且当 $t\geqslant 0$ 时，$p(t)\geqslant 0$，$\exists$ 一个 $R_+$ 上 $n$ 阶连续可微的振动函数 $R(t)$ 使得 $R^{(n)}(t)=q(t)$. 再设对 $\forall\ \lambda\geqslant 0$，有

(4) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\int_0^t p(s)f(\lambda+R(g(s)))ds=\infty$.

(5) $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\int_0^t p(s)f(-\lambda+R(g(s)))ds=-\infty$.

则当 $n$ 为偶数时，(4.4)振动. 当 $n$ 为奇数时(4.4)的解或者是振动的，或者当 $t\to\infty$ 时 $[x(t)-R(t)]$ 单调趋于零. 若上述积分条件当 $\lambda=0$ 时也成立，则当 $n$ 为奇数时(4.4)是振动的.

**证** 设 $n$ 为偶数，且上述条件(4)(5)对 $\forall\ \lambda>0$ 成立. 若方程(4.4)非振动，则必存在(4.4)的解 $x(t)>0$, $t\geqslant\sigma$. 设 $u(t)=x(t)-R(t)$, $t\in[\sigma,\infty)$，则 $u(t)$ 满足方程

$$u^{(n)}(t)+p(t)f(u(g(t)))+R(g(t)))=0 \tag{4.5}$$

由于 $u(t)+R(t)>0$, $t\in[\sigma,\infty)\Rightarrow\exists\ t_1\geqslant\sigma$ 使得

$$u(g(t))+R(g(t))>0 \quad t\geqslant\sigma$$

因此有

$$u^{(n)}(t)=-p(t)f(u(g(t)))+R(g(t))\leqslant 0, t\geqslant t_1 \quad (4.6)$$

$\Rightarrow u(t)$的各阶导数 $u^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots\cdots,n)$最终不变号，且在$[\sigma,\infty)$上会恒等于 0(若有某个 $k$ 使 $u^{(k)}(t)\equiv 0$，则 $u^{(n)}(t)\equiv 0$. 与条件(4)不合). 显然，当 $t$ 充分大时 $u(t)$严格单增或严格单减. 设 $t$ 充分大时 $u(t)<0$，则必∃ $t_2>t_1$ 使得当 $t\geqslant t_2$ 时 $u(g(t))<0\Rightarrow$

$$-R(g(t))<u(g(t))<0$$

这与 $R(t)$为振动的假定不合$\Rightarrow t$ 充分大时 $u(t)>0$，且 $\dot{u}(t)>0$，$\cdots\cdots, u^{(n)}(t)>0$. 故∃ $t_2\geqslant t_1$ 使

$$u^{n-1}(t)>0, u(g(t))\geqslant\lambda>0, t\geqslant t_2 \quad (4.7)$$

其中 $\lambda$ 是常数. 对(4.5)从 $t_2$ 到 $t(t\geqslant t_2)$积分得

$$u^{(n-1)}(t)=u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}[p(s)f(u(g(s)))+R(g(s))]ds$$

$$\leqslant u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}p(s)f(\lambda+R(g(s)))ds$$

$$(4.8)$$

由此推出$\lim\limits_{t\to\infty}u^{(n-1)}(t)=-\infty$. 这与(4.7)矛盾.

所以当 $t$ 充分大时 $u(t)$既非最终正解又非最终负解，又非振动$\Rightarrow u$ 不存在(非 0 的 $u(t)$). 当 $t\geqslant\sigma$ 时 $x(t)<0$ 的情形可类似研究，得出相同结论. ⇒方程(4.4)的一切解振动.

对 $n$ 为奇数的情形. 若 $t$ 充分大时 $u(t)>0$，则 $\dot{u}(t)$最终为负. 若 $t$ 充分大时 $u(t)<0$，则 $\dot{u}(t)$最终为正. 这两种情形均可推出 $t\to\infty$时 $u(t)=x(t)-R(t)$单调趋于 0. 若非这两种情况，则采用 $n$ 为偶数时的论证方法可证得(4.4)的一切解都是振动的.

现在讨论 $n$ 为奇数且 $\lambda=0$ 时条件(4)(5)成立的情形：当 $\lambda=0$ (4)(5)成立$\Rightarrow\lambda>0$ 时(4)(5)当然成立. 从而对 $n$ 为偶数情形的定理结论成立. 当 $n$ 为奇数时，由(4.8)可得

$$u^{(n-1)}(t)\leqslant u^{(n-1)}(t_2)-\int_{t_2}^{t}p(s)f(R(g(s)))ds, t\geqslant t_2$$

由此得$\lim\limits_{t\to\infty}u^{(n-1)}(t)=-\infty$，或$\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=-\infty$. 这与 $u(t)>0$ 矛盾.

$u(t)$最终为负的情形可得类似结论，即 $x(t)$是振动的. 证毕.

**推论 4.1** 设 $f(u)=u^{2j+1}$，$j$ 为负整数且满足条件(1)(2)(3). 当 $t\geqslant 0$ 时 $p(t)\geqslant 0$. $q,R$ 如定理 4.1 所设. 又设当 $m=1,2,\cdots\cdots 2j+1$ 时有

$$\int_0^\infty p(t)dt=\infty,\int_0^\infty p(t)|R(g(t))|^m dt<\infty \tag{4.9}$$

则定理 4.1 的结论当 $\lambda\neq 0$ 时成立.

事实上，当 $\lambda\neq 0$ 时有

$$(\lambda+R(g(t)))^{2j+1}=\sum_{k=0}^{2j+1}\binom{2j+1}{k}\lambda^{2j+1-k}[R(g(t))]^k \tag{4.10}$$

立即得出. 同理有

**推论 4.2** 设推论 4.1 中的条件(4.9)换为

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t p(t)[R(g(t))]^m dt=\infty$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t p(t)[R(g(t))]^m dt=-\infty$$

对某一个偶整数 $m(2\leqslant m\leqslant 2j)$成立，且对每一个 $i=0,1,2.\cdots\cdots,m-1,m+1,\cdots\cdots,2j+1$ 有

$$\int_0^\infty p(t)|R(g(t))|^i dt<\infty$$

则定理 4.1 的结论当 $\lambda\neq 0$ 时成立.

对有界解的振动性有如下结果.

**定理 4.2** 设定理 4.1 的条件成立且 $R$ 是有界的. 条件(4)(5)替换为

$$(4)^* \overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t s^{m_1}p(s)f(\lambda+R(g(s)))ds=\infty \tag{4.11}$$

$$(5)^* \underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t s^{m_2}p(s)f(-\lambda+R(g(s)))ds=-\infty \tag{4.12}$$

其中 $m_1, m_2$ 为整数，$m_1 \geqslant 1, m_2 \leqslant n-1$. 则有

$(a)$当 $n$ 为偶数且 $\lambda > 0$ 及(4)*(5)*成立时，则方程(4.4)的一切有界解是振动的.

$(b)$当 $n$ 为奇数时，(4.4)的一切有界解 $x(t)$，或者是振动的，或者当 $t \to \infty$ 时 $x(t) - R(t)$ 单调趋于 0.

$(c)$若(4)*(5)*对 $\lambda = 0$ 成立，则(4.4)的每一个有界解是振动的.

**证** 对$(a)$，当 $n$ 为偶数时，设 $x(t), u(t)$ 如定理 4.1 的证明中的推导，直到式(4.7). 再考虑 $t^{m_1} u^{(n-1)}(t)$，微分之得

$$[t^{m_1} u^{(n-1)}(t)]' = -t^{m_1} p(t) f(u(g(t))) + R(g(t)) + m_1 t^{m_1 - 1} u^{(n-1)}(t)$$

再从 $t_2$ 到 $t$ 积分($t \geqslant t_2$)得

$$t^{m_1} u^{(n-1)}(t) = t_2^{m_1} u^{(n-1)}(t_2) - \int_{t_2}^{t} [s^{m_1} p(s) f(u(g(s))) + R(g(s))] ds + m_1 \int_{t_2}^{t} s^{m_1 - 1} u^{(n-1)}(s) ds \tag{4.13}$$

利用条件(4)*可得

$$\lim_{t \to \infty} [t^{m_1} u^{(n-1)}(t) - m_1 \int_{t_2}^{t} s^{m_1 - 1} u^{(n-1)}(s) ds] = -\infty \tag{4.14}$$

由于当 $t \geqslant t_2$ 时 $u^{(n-1)}(t) > 0$，及$\int_{t_2}^{t} s^{m_1 - 1} u^{(n-1)}(s) ds$是 $t$ 的增函数，所以有

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_2}^{t} s^{m-1} u^{n-1}(s) ds = \infty \tag{4.15}$$

若 $x(t)$ 有界，则 $u(t)$ 也有界，且$(-1)^k u^{(k)}(t) < 0$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, $t \geqslant t_2$，对(4.15)用分部积分法反复积分之，得

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_2}^{t} u^{(n-m)}(s) ds = \infty \quad m \text{ 为奇数}.$$

$$= -\infty \quad m \text{ 为偶数}.$$

这与 $u(t)$ 的有界性不合. 从而(a)得证.

对(b)(c)可类似推导.

下面讨论稍为推广的方程类:(其中"′"也表示求导数)

$$[r(t)x^{(n-1)}(t)]' + a(t)f(x(g(t))) = b(t) \tag{4.16}$$

$$[r(t)\dot{x}(t)]^{(n-1)} + a(t)f(x(g(t))) = b(t) \tag{4.17}$$

的有界解的振动性和渐近性,基本假定为

(1) $a, b \in C(R_+, R)$.

(2) $r \in C(R_+, R)$ 且 $\int^{\infty} r^{-1}(t)dt = \infty$.

(3) $f \in C(R_+, R)$, $yf(y) > 0$, 当 $y \neq 0$, $f(y)$ 非减.

(4) $g \in C(R_+, R_+)$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$.

**定理** 4.3　设(4.6)和(4.7)满足(1)~(4)以及

$$\int^{\infty} a_+(t)dt = \infty, \int^{\infty} a_-(t)dt > -\infty \tag{4.18}$$

其中 $a_+(t) = \max\{a(t), 0\}$, $a_-(t) = \min\{a(t), 0\}$, 又

$$\int^{\infty} |b(t)|dt < \infty \tag{4.19}$$

则(4.16),(4.17)的有界解 $x(t)$ 或者是振动的,或者有

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0 \tag{4.20}$$

**证**　设 $x(t)$ 是方程(4.16)的有界非振动解. 不妨设 $x(t)$ 为最终为正, 若(4.20)不成立, 则存在正数 $m, M$ 和 $T$, 使得

$$m \leqslant x(g(t)) \leqslant M, t \geqslant T \tag{4.21}$$

由(4.16)从 $T$ 到 $t(t \geqslant T)$ 积分, 并顾及(3)得

$$\begin{aligned} & r(t)x^{(n-1)}(t) - r(T)x^{(n-1)}(T) \\ & = -\int_T^t a_+(s)f(x(g(s)))ds - \int_T^t a_-(s)f(x(g(s)))ds + \int_T^t b( \\ & \leqslant -f(m)\int_T^t a_+(s)ds - f(M)\int_T^t a_-(s)ds + \int_T^t b(s)ds \end{aligned} \tag{4.22}$$

在(4.22)中令 $t\to\infty$ 并用(4.18)(4.19)得

$$\lim_{t\to\infty} r(t)x^{(n-1)}(t)=-\infty$$

由(2)$\Rightarrow r(t)\geqslant 0$，故 $\lim\limits_{t\to\infty} x^{(n-1)}(t)=-\infty$，因而 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=-\infty$，这与 $x(t)$ 最终为正不合. 故对(4.16)结论成立.

现证对(4.17)成立. 设 $x(t)$ 是(4.17)的有界解，使得 $\varliminf\limits_{t\to\infty} x(t)>0$，则$\exists$ 某正数 $m,M,T$ 使(4.21)成立. 类似上述推导可得

$$\lim_{t\to\infty}[r(t)\dot{x}(t)]^{(n-2)}=-\infty$$

于是有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=-\infty\Rightarrow$ 矛盾. 即对(4.17)定理结论成立.

我们给出例子说明条件(4.18)不能减弱为

$$\int^{\infty} a(t)dt=\infty \tag{4.23}$$

**例** 9　考虑方程

$$\ddot{x}(t)-\frac{\sin t}{2+\sin t}x(t-\pi)=0$$

它有解 $x(t)=2-\sin t$，它既不振动也不满足 $\varliminf\limits_{t\to\infty}|x(t)|=0$. 系数 $a(t)=\sin t/(2+\sin t)$ 满足(4.23)，但不满足(4.18).

## §5　FDE 解的渐近性

FDE 解的渐近性质虽然没有确切的定义，但都沿用常微分方程长期形成的概念和术语. 顾名思义是考虑 $t\to\infty$ 时解的性态. 因此，各种渐近性态的研究工作都有一个前提：系统的解是整体存在的.

渐近性态包括：吸引，渐近稳定性，振动性，振动趋于 0 或振动而振幅无限增大，或振幅有界，比稳定性更为一般的 LaSalle 不变性原理，以及渐近等价性等等. 有关内容已分别在各章中逐一述及，这里再举一些实例——结果与方法.

先看 Ladas 等人关于一阶 RDDE 的若干结果：

考虑纯量方程

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau)=0 \quad t\geqslant\sigma \tag{5.1}$$

其中 $\tau\geqslant 0$ 是常数，$p(t)$是连续函数，且 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=0$，如所周知，方程

$$\dot{y}(t)+py(t-\tau)=0 \tag{5.2}$$

这里 $p=\text{const}$. 当

$$p>0, 0\leqslant p\tau\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{5.3}$$

时它的每一个解当 $t\to\infty$时趋于 0. 这是因为(5.3)使得(5.2)的特征方程的每一个根具有负实部. 若设 $y(\sigma,\varphi)(t)$为(5.2)过$(\sigma,\varphi)$的解，$\varphi\in C([-\tau,0],R)$，则由线性系统解的指数估计式有

$$|y(t,\sigma,\varphi)|\leqslant M|\varphi|e^{-r(t-\sigma)}, t\geqslant\sigma \tag{5.4}$$

其中 $M$ 和 $r$ 为正常数.

若 $Z(t,\sigma,\varphi)$表示方程

$$\dot{Z}(t)+pZ(t-\tau)=h(t) \qquad t\geqslant\sigma \tag{5.5}$$

过$(\sigma,0)$的解，则有如下的指数估计式

$$|Z(t,\sigma,0)|\leqslant\frac{M}{r}e^{(p+r)\tau}\max_{\sigma\leqslant s\leqslant\tau}|h(s)| \tag{5.6}$$

**引理** 5.1　对方程

$$\dot{x}(t)+x(t-\Delta(t))=0 \quad t\geqslant\sigma \tag{5.7}$$

其中 $0\leqslant\Delta(t)\leqslant t$ 为连续，且$\lim\limits_{t\to\infty}\Delta(t)=\tau<\infty$，若 $\tau<\dfrac{\pi}{2}$，则方程(5.7)的每一个解当 $t\to\infty$时趋于 0.

**证**　设 $x(t)$是(5.7)的任意解，取 $t_1\geqslant\sigma+2\tau+2$，使得

$$\Delta(t)\leqslant\tau+1, t\geqslant t_1 \tag{5.8}$$

$$\frac{M}{r}\cdot e^{(1+r)\tau}|\tau-\Delta(t)|\leqslant\frac{1}{2}, t\geqslant t_1 \tag{5.9}$$

其中 $M$ 和 $r$ 是满足(5.4)的两个常数，$p=1$. 设 $y(t)$是方程

$$\dot{y}(t)+y(t-\tau)=0 \quad t\geqslant t_1$$

过$(t_1,x_{t_1})$的解. 由 $\tau<\frac{\pi}{2}$, $y(t)$于 $t\to\infty$时趋于 0. 设 $Z(t)=x(t)-y(t)$, 则 $Z(t)$满足方程

$$\dot{Z}(t)+Z(t-\tau)=x(t-\tau)-x(t-\Delta(t)), t\geqslant t_1 \tag{5.10}$$

并且过$(t_1,0)$的解, 应用(5.6), 其中 $p=1$, 以及

$$f(s)=x(s-\tau)-x(s-\Delta(s))$$

则有

$$|Z(t)|\leqslant\frac{M}{r}e^{(1+r)\tau}\max_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s-\tau)-x(s-\Delta(s))| \tag{5.11}$$

由中值定理和方程(5.7)得

$$|x(s-\tau)-x(s-\Delta(s))|=|\Delta(s)-\tau||\dot{x}(\xi)|$$
$$=|\Delta(s)-\tau||x(\xi)-\Delta(\xi))|$$

$\xi$在 $s-\tau$ 和 $s-\Delta(s)$之间, 则令 $B_1=\max\limits_{\sigma\leqslant s\leqslant t_1}|x(s)|$便有

$$\max_{\sigma\leqslant s\leqslant t_1}|x(s-\tau)-x(s-\Delta(s))|\leqslant\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|\Delta(s)-t|\cdot\max_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s)|$$
$$\leqslant\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|\Delta(s)-\tau|[B_1+\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|x(s)|]$$

于是由(5.11)得到

$$|x(t)|-|y(t)|\leqslant\frac{M}{r}e^{(1+r)\tau}\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|\Delta(s)-\tau|$$
$$\cdot[B_1+\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|x(s)|] \tag{5.12}$$

再由(5.9)$\Rightarrow|x(t)|\leqslant|y(t)|+\frac{1}{2}[B_1+\max\limits_{t_1\leqslant s\leqslant t}|x(s)|]$. 故对$\forall\, T\geqslant t_1$ 及 $t\in[t_1,T]$有

$$|x(t)|\leqslant|y(t)|+\frac{1}{2}[B_1+\max_{t_1\leqslant s\leqslant T}|x(s)|]$$

上式两边取最大值并整理得

$$\max_{t_1\leqslant s\leqslant T}|x(t)|\leqslant 2\max_{t_1\leqslant s\leqslant T}|y(t)|+B_1$$

可见 $x(t)$ 是有界函数 $\Rightarrow \exists\ B\geqslant B_1$ 使 $|x(t)|\leqslant B, t\geqslant\sigma$.
于是由(5.12)得

$$|x(t)|\leqslant|y(t)|+2B\frac{M}{r}e^{(1+r)\tau}\max_{t_1\leqslant s\leqslant t}|\Delta(s)-\tau|.$$

$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. 证毕.

**定理** 5.1　对方程(5.1). 设 $\tau\geqslant 0, p(t)>0$ 是连续的，再设

$$\int_\sigma^\infty p(t)dt=\infty \qquad \lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^t p(s)ds \text{ 存在} \tag{5.13}$$

以及

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^t p(s)ds<\frac{\pi}{2} \tag{5.14}$$

则(5.1)的一切解当 $t\to\infty$ 时趋于 0.

**证**　令 $u=\Delta(t)=\int_\sigma^t p(s)ds, t\geqslant\sigma$. 则反函数 $\Delta^{-1}$ 存在且 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=\infty$. 又由

$$\Delta(t-\tau)=\int_\sigma^{t-\tau}p(s)ds=\int_\sigma^t p(s)ds-\int_{t-\tau}^t p(s)ds$$

$$=u-\int_{\Delta^{-1}(u)-\tau}^{\Delta^{-1}(u)}p(s)ds$$

于是有

$$t-\tau=\Delta^{-1}\left(u-\int_{\Delta^{-1}(u)-\tau}^{\Delta^{-1}(u)}p(s)ds\right)$$

取变换 $Z(u)=x(\Delta^{-1}(u))$，则(5.1)化为

$$\dot Z(u)+Z\left(u-\int_{\Delta^{-1}(u)-\tau}^{\Delta^{-1}(u)}p(s)ds\right)=0 \tag{5.15}$$

由条件(5.14)$\Rightarrow$方程(5.15)满足引理 5.1 的假定，因此 $\lim\limits_{u\to\infty}Z(u)=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. 证毕.

**定理** 5.2　对(5.1)，设 $\tau>0, p(t)>0$ 连续，又设

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds<1 \tag{5.16}$$

则(5.1)的振动解当 $t\to\infty$ 时趋于 0.

**证** 设 $x(t)$ 是(5.1)的振动解，当 $t\to\infty$ 时不趋于 0. 则∃序列 $t_n, n=1,2,\cdots\cdots, t_{n+1}-t_n\geqslant\tau$ 使得 $x(t_n)=0$. 但在 $(t_n,t_{n+1})$ 上 $x(t)\neq0$（由解的唯一性亦明显保证这一点）. 令

$$S_n=\max_{t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}}|x(t)|, n=1,2,\cdots\cdots$$

现在只要证 $t\to\infty$ 时 $S_n$ 趋于 0 即可. 设 $\xi_n\in(t_n,t_{n+1})$ 使 $S_n=|x(\xi_n)|$ 及 $\dot{x}(\xi_n)=0, n=1,2,\cdots\cdots$，则由(5.1)有 $x(\xi_n-\tau)=0$，令 $\eta_n=\max\{t_n,\xi_n-\tau\}, n=1,2,\cdots\cdots$. 从 $\eta_n$ 到 $\xi_n$ 积分(5.1)式，即得

$$x(\xi_n)=-\int_{\eta_n}^{\xi_n} p(s)x(s-\tau)ds \tag{5.17}$$

由于 $\eta_n\leqslant s\leqslant\xi_n\Rightarrow t_{n-1}\leqslant s-\tau\leqslant t_{n+1}$. 由(5.17)有

$$|x(\xi_n)|\leqslant\int_{\eta_n}^{\xi_n} p(s)|x(s-\tau)|ds$$

$$\leqslant(\max_{t_{n-1}\leqslant t\leqslant t_{n+1}}|x(t)|)\int_{\eta_n}^{\eta_n+\tau} p(s)ds$$

或者

$$S_n\leqslant(\max\{s_n,s_{n-1}\})\int_{\eta_n}^{\eta_n+\tau} p(s)ds$$

由(5.16)，当 $n$ 充分大（设 $n\geqslant N_0$）时有

$$S_n\leqslant S_{n-1}\int_{\eta_n}^{\eta_n+\tau} p(s)ds \quad n\geqslant N_0 \tag{5.18}$$

现在取一个数 $\mu$，使得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds<\mu<1$$

则当 $N\geqslant N_0$ 充分大时，我们有

$$\int_{\eta_n}^{\eta_n+\tau} p(s)ds\leqslant\mu<1, n\geqslant N$$

再由(5.18)得 $S_n \leqslant \mu S_{n-1}, n \geqslant N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. 证毕.

**推论 5.1** 设定理 5.2 的条件满足,且 $\int_\sigma^\infty p(s)ds = \infty$,则方程(5.1)的一切解当 $t\to\infty$ 时都趋于 0.

**证** 若 $x(t)$ 是(5.1)的非振动解,但 $t\to\infty$ 时不趋于 0,不妨设 $t \geqslant t_1 \geqslant \sigma$ 时 $x(t) > 0$. 于是当 $t \geqslant t_2 \geqslant t_1 + \tau$ 时,$\dot{x}(t) = -p(t)x(t-\tau) \leqslant 0 \Rightarrow x(t)$ 当 $t \geqslant t_2$ 时为非增函数$\Rightarrow$

$$x(t) - x(t_2) + x(t-\tau)\int_{t_2}^t p(s)ds \leqslant x(t) - x(t_2)$$

$$+\int_{t_2}^t p(s)x(s-\tau)ds = 0$$

从而令 $t\to\infty$ 时导出矛盾. 综合上面分析得

**定理 5.3** 对方程(5.1),若 $\tau \geqslant 0$, $p(t) > 0$ 是连续的,并且 $\int_\sigma^\infty p(t)dt = \infty$, $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\int_{t-\tau}^t p(s)ds < 1$,则(5.1)的一切解当 $t\to\infty$ 时趋于 0.

**例 10** 考虑方程

$$\dot{x}(t) + a(2+\cos t)x(t-2\pi) = 0$$

$$t \geqslant 0 \qquad 0 < a < \frac{1}{8} \tag{5.19}$$

令 $p(t)a = (2+\cos t)$,则

$$\int_0^\infty p(t)dt = \infty, \quad \int_{t-2\pi}^t ap(s)ds = 4\pi a < \frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow$满足定理 5.1 条件$\Rightarrow$(5.9)一切解当 $t\to\infty$ 时,趋于 0.

**例 11** 对方程

$$\dot{x}(t) + a(2+\cos t)x(t-\pi) = 0$$

$$t \geqslant 0 \qquad 0 < a < \frac{1}{2(\pi+1)} \tag{5.20}$$

令 $p(t) = a(2+\cos t)$,则有

$$\int_0^{\infty} p(t)dt=\infty,\int_{t-\pi}^{t} p(s)ds=2a(\pi+\sin t)$$

而

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-\pi}^{t} p(s)ds=2a(\pi+1)<1.$$

⇒满足定理 5.3 的条件⇒方程(5.20)的一切解，当 $t\to\infty$时趋于 0.

现在考察线性 FDE 非齐次的情形.

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t) \tag{5.21}$$

滞量 $r(t)$满足 $0\leqslant r(t)\leqslant r=\text{const}$. 由 Riese 定理有 $n\times n$ 有界变差阵 $\eta(t,\theta)$使(5.21)改写为

$$\dot{x}(t)=\int_{-r(t)}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta)+f(t) \tag{5.22}$$

其中 $x\in R^n,f\in R^n$. 假定它满足第一章§4 的基本假定. 当初始时刻为 $\sigma$ 时，记初始函数为 $\varphi(t),t\in[-r,0]$. 变差函数 $v(t)$定义为

$$v(t)=\mathop{\mathrm{V}}_{\theta=-r(t)}^{0}\eta(t,\theta) \tag{5.23}$$

**定理** 5.4　若方程(5.22)满足条件

$$\int_\sigma^{\infty} v(t)dt<\infty,\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\infty}\left|\int_\sigma^t f(s)ds\right|<\infty$$

则下式存在有限的极限

$$\lim_{t\to\infty}[x(t)-\int_\sigma^{t} f(s)ds] \tag{5.24}$$

**证**　由第三章的估计得

$$|x(t)|\leqslant[|\varphi|+\max_{\sigma\leqslant\tau\leqslant t}\left|\int_\sigma^\tau f(s)ds\right|]\exp\int_\sigma^t v(s)ds\leqslant C.$$

其中 $C=\text{const.}$ ，再把(5. 22)写成积分方程形式，用上式的估计 $|x(t)|\leqslant C$ 代入得

$$|(x(t_2)-\int_\sigma^{t_2} f(s)ds)-(x(t_1)-\int_\sigma^{t_1} f(s)ds)|$$

$$\leqslant C\left|\int_{t_1}^{t_2} v(s)ds\right| \to 0, \text{当 } t_1, t_2 \to \infty.$$

最后由 Cauchy 准则⇒(5.24)极限存在．证毕．

**定理** 5.5　对方程(5.22)，设 $v(t)\not\equiv 0$，$|\varphi|\leqslant M=\text{const}$. 并且满足

$$\int_\sigma^t f(s)ds \neq O\left(\int_\sigma^t v(s)ds\right) \quad t\to\infty$$

则 $|x(t)|\neq O(1)$.

**证**　若不然，则有

$$\sup_{t\in R}|x(t)|=c<\infty \tag{5.25}$$

由(5.22)的等价积分方程出发，可得

$$\left|\int_\sigma^t f(s)ds\right|\leqslant 2c+c\int_\sigma^t v(s)ds.$$

⇒与(5.25)不合.

Onose 等研究如下的非线性方程

$$[r(t)\dot{x}(t)]'+\sum_{i=1}^m f_i(t,x(g_{i1}(t)),\cdots\cdots,x(g_{in}(t)))=0 \tag{5.26}$$

我们假定：

(1)$r(t)$对 $t\geqslant\alpha$ 连续正值.

(2)$g_{ij}(t)$，$i=1,2\cdots\cdots,m$，$j=1,2\cdots\cdots,n$ 对 $t\geqslant\alpha$ 连续，且当 $t\to\infty$时趋于$\infty$.

(3)$f_i(t,x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)$连续，且当 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 同号时 $f_i$ 与它们同号，$i=1,2,\cdots\cdots m$.

**定义** 5.1　若∃ $P_i(t)\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots\cdots n$，$\sum_{i=1}^m p_i(t)>0$. 使得当 $x_i\geqslant y_i>0$ 或 $x_i\leqslant y_i<0(i=1,2,\cdots\cdots n)$时有

$$\frac{f(t,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)}{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)x_i} \geqslant \frac{f(t,y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n)}{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)y_i} \qquad (5.27)$$

则称 $f$ 是超线性的. 如果不等式(5.27)反号,称 $f$ 为次线性的. 记

$$R(t)=\int_a^t \frac{ds}{r(s)},R(t,t_1)=\int_{t_1}^t \frac{ds}{r(s)}.$$

$$P(t)=\int_t^{\infty} \frac{ds}{r(s)},\sum_{i=1}^{m} f_i(t,x(g_{i1}(t))\cdots\cdots x(q_{in}(t)))\triangleq f(t,x(g(t)))$$

则有

**引理** 5.2 若 $x(t)$是(5.26)的一个最终正解,设成立$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$,则∃ 正数$T,C_1,C_2$,使$\dot{x}(t)>0$,$t\geqslant T$以及$C_1\leqslant x(t)\leqslant C_2R(t)$,$t\geqslant T$.

**证** 设$t\geqslant\sigma,x(g_{ij}(t))>0(i=1,2,\cdots\cdots,m,j=1,2,\cdots\cdots n)$,若不然,∃ $t_1>\sigma$ 使 $\dot{x}(t_1)\leqslant 0$,由(5.26)从 $t_1$ 到 $t(t\geqslant t_1)$积分得

$$r(t)\dot{x}(t)-r(t_1)\dot{x}(t_1)+\int_{t_1}^t f(s,x(g(s)))ds=0$$

两边同除以 $r(t)$,再从 $t_2$ 到 $t$ 积分$(t_2>t_1,t>t_2)$得

$$x(t)-x(t_2)-r(t_1)\dot{x}(t_1)\int_{t_2}^t \frac{ds}{r(s)}+\int_{t_2}^t \left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^s f(\theta,x(g(\theta))d\theta\right]ds=0$$

令 $t\to+\infty$得 $x(t)\to-\infty$. 与假设矛盾. 故 $\dot{x}(t)>0$. ⇒∃ $C_1>0$,使 $x(t)\geqslant C_1$,再由上式⇒∃ $C_2>0$,使 $x(t)\leqslant C_2R(t)$. 证毕.

**引理** 5.3 若 $x(t)$是(5.26)的最终正解,设$\int^{\infty}\frac{dt}{r(t)}<+\infty$,则存在正数 $T,C_1,C_2$,使当 $t\geqslant T$ 时 $x(t)\geqslant -r(t)\dot{x}(t)p(t)$,$C_1p(t)\leqslant x(t)\leqslant C_2$.

**证** 设 $t\geqslant\sigma,x(g_{ij}(t))>0.(i=1,2\cdots\cdots,m,j=1,2\cdots\cdots,n)$

$(a)$证$\int_\sigma^{\infty} p(s)f(s,x(g(s)))ds<+\infty$,若不然,设

$$\int_\sigma^{\infty} p(x)f(s,x(g(s)))ds=+\infty$$

把(5.26)两边同乘 $p(t)$，从 $\sigma$ 到 $t$ 积分得

$$p(t)r(t)\dot{x}(t)-p(\sigma)r(\sigma)\dot{x}(\sigma)+x(t)-x(\sigma)$$
$$+\int_{\sigma}^{t}p(s)f(s,x(g(s)))ds=0 \tag{5.28}$$

即得 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)r(t)\dot{x}(t)=-\infty$. $\Rightarrow\exists\ t_1\geqslant\sigma,M>0$，使当 $t\geqslant t_1$ 时，$p(t)r(t)\dot{x}(t)\leqslant-M$. 由(5.28)两边除以 $p(t)r(t)$，再由 $t_1$ 到 $t$ 积分之，得

$$x(t)-x(t_1)\leqslant M\ln\left[\frac{p(t)}{p(t_1)}\right]$$

因为 $p(t)\to 0$，故 $x(t)\to-\infty$ 与所设不合. 即($a$)成立.

($b$)证 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$ 是不可能的，若不然，设 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$. 把(5.26)从 $t_0$ 到 $t$ 积分得

$$r(t)\dot{x}(t)-r(\sigma)\dot{x}(\sigma)+\int_{\sigma}^{t}f(s,x(g(s)))ds=0$$

两边同除 $r(t)$，再从 $\sigma$ 到 $t$ 积分得

$$x(t)=x(\sigma)+p(\sigma)r(\sigma)\dot{x}(\sigma)-p(t)r(\sigma)\dot{x}(\sigma)$$
$$+\int_{\sigma}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{\sigma}^{s}f(\theta,x(g(\theta)))\right]ds \tag{5.29}$$

由此推出，$p(t)\to\infty,t\to\infty$. 与 $p(t)\to 0$ 矛盾.

($c$)证引理 5.3 的第一部分.

先证 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在，若不然，$\exists\ \xi,\eta$ 使

$$\varliminf_{t\to\infty}x(t)<\xi<\eta<\varlimsup_{t\to\infty}x(t)$$

那么$\exists$ 序列$\{t_n\}$，$t_n\to\infty$ 满足

$$\dot{x}(t_n)=0,x(t_{2n-1})<\xi<\eta<x(t_{2n})$$

于是 $p(t_n)r(t_n)\dot{x}(t_n)+x(t_n)=x(t_n)$. 由(5.28)及($a$)$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}[p(t)\cdot r(t)\dot{x}(t)+x(t)]$存在且有限$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}[p(t_n)r(t_n)\dot{x}(t_n)+x(t_n)]$ 存在$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}x(t_n)$存在，与 $x(t_n)$ 的取法矛盾，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$存在. 由($b$)

极限是有限的.

其次，由(5.29)得

$$x(\sigma)+p(\sigma)r(\sigma)\dot{x}(\sigma)-\int_{\sigma}^{t}[\frac{1}{r(s)}\int_{\sigma}^{s}f(\theta,x(g(\theta)))]ds$$
$$=x(t)+p(t)r(\sigma)\dot{x}(\sigma)$$

令 $\sigma\to t,t\to T,T\to+\infty$. 则上式改变记号为

$$x(t)+p(t)r(t)\dot{x}(t)-\int_{t}^{\infty}p(s)f(s,x(g(s)))ds=\lim_{t\to\infty}x(t).$$

所以有

$$x(t)+p(t)r(t)\dot{x}(t)-\int_{t}^{\infty}p(s)f(s,x(g(s)))ds\geqslant 0,t\geqslant\sigma \tag{5.30}$$

即 $x(t)+p(t)r(t)\dot{x}(t)\geqslant 0,t\geqslant\sigma$.

($d$)现在证引理的第二部分.

取 $t_1$ 充分大，于是当 $t\geqslant t_1$ 时，与(5.29)类似，有

$$x(t)=x(t_1)+p(t_1)r(t_1)\dot{x}(t_1)-p(t)r(t_1)\dot{x}(t_1)$$
$$-\int_{t_1}^{t}[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{t}f(\theta,x(g(\theta)))d\theta]ds$$
$$\leqslant x(t_1)+2p(t_1)r(t_1)|\dot{x}_1(t_1)|\triangleq a_2$$

又由(5.30)有

$$x(t_1)+p(t_1)r(t_1)\dot{x}(t_1)-\int_{t_1}^{t}[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{t}f(\theta,x(g(\theta)))d\theta]ds\geqslant 0$$

所以若 $\dot{x}(t_1)<0$,则 $x(t)\geqslant p(t)|r(t_1)\dot{x}(t_1)|\triangleq a_1p(t)$,若 $\dot{x}(t_1)\geqslant 0$,不妨设 $t\geqslant t_1$ 时恒有 $\dot{x}(t)\geqslant 0$(否则并入前一种情形),即 $x(t)$非减对 $t\geqslant t_1$ 成立.故

$$x(t)\geqslant x(t_1)\frac{x(t_1)}{p(t_1)}p(t_1)\geqslant\frac{x(t_1)}{p(t_1)}p(t)\triangleq a_1p(t).\text{ 证毕.}$$

若 $x(t)$是(5.26)的最终负解.我们有类似于引理 5.2 和引理 5.3 的结果，只要把 $C_1,C_2$ 改为负数，不等式取反号即可.

**定理** 5.6　设$\int^{\infty}\frac{1}{r(t)}dt=\infty$，方程(5.26)的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型.

$A_c^0$ 型：$x(t)\to c\neq 0, r(t)\dot{x}(t)\to 0, t\to\infty$.

$A_{\infty}^c$ 型：$x(t)\to\infty, r(t)\dot{x}(t)\to c\neq 0, t\to\infty$.

$A_{\infty}^0$ 型：$x(t)\to\infty, r(t)\dot{x}(t)\to 0, t\to\infty$.

**证**　由引理 5.2，$x(t)$与$\dot{x}(t)$同号，所以$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$存在且不为0，故只有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=c\neq 0 \text{ 或} \lim_{t\to\infty}x(t)=\infty$$

(1)若$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=c$. 不妨设$c>0$，则最终有$x(t)>0, r(t)\dot{x}(t)>0$. 由方程(5.26)，$[r(t)\dot{x}(t)]'\leqslant 0$，即$r(t)\dot{x}(t)$非增，所以$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)\exists$，可以证明必有$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=0$，若不然，设$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=\hat{c}>0$，则$r(t)\dot{x}(t)\geqslant\hat{c}_0$，由$\dot{x}(t)\geqslant\frac{\hat{c}}{r(t)}$积分得$x(t)\to\infty, t\to\infty$矛盾.

(2)若$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\infty$. 不妨设$x(t)\to+\infty$，因$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)$存在，用洛必达法则$\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\frac{r(t)}{R(t)}=\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)$，由引理 5.2 有$0\leqslant\frac{x(t)}{R(t)}\leqslant c_2\Rightarrow$仅当$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=c\neq 0$或$\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=0$才可能，定理得证.

**定理** 5.7　设$\int^{\infty}\frac{ds}{r(s)}<\infty$. 方程(5.26)的非振动解的渐近性质有且仅有以下三种类型.

$A_c$ 型. $x(t)\to c\neq 0, t\to\infty$.

$A_0^c$ 型. $x(t)\to 0, r(t)\dot{x}(t)\to c\neq 0, t\to\infty$.

$A_0^{\infty}$ 型. $x(t)\to 0, r(t)\dot{x}(t)\to\infty, t\to\infty$.

**证** 由引理 5.3 的证明中得出 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$存在且只有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，或 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=c\neq 0$. 又根据(5.26)的性质有 $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)$存在或为无穷大. 当 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)$存在时，用洛必达法则得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{p(t)}=-\lim_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)$$

由引理 5.3⇒只有 $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=c\neq 0$，或 $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)\dot{x}(t)=\infty$. 证毕.

**定理** 5.8 设$\int^{\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$，$f_i(i=1,2,\cdots\cdots n)$均为超线性或次线性的，则(5.26)有 $A_\theta^0$ 型非振动解的充要条件是

$$\int^{\infty}R(t)\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(t,c,c\cdots\cdots c)\right|dt<\infty \quad 对某一\ c\neq 0 \tag{5.31}$$

# 第十章

# 概周期 FDE

不论是常微分方程还是泛函微分方程，概周期系统都是介乎周期系统和一般的非自治系统之间的极其重要的一类，它有着广泛的应用背景. 本章要系统阐述有关的基本概念和一些典型的基本结果.

## §1 概周期和渐近概周期函数

概周期函数的普遍理论有系统的专著，对于我们的目的而言，只限于一些最基本的概念和性质，作为预备知识叙述于下：

**定义 1.1** 设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$，$\Omega\subseteq R^n$ 是开集，若对 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 $\Omega$ 中的任意紧集 $S$，$\exists\ l(\varepsilon,S)>0$，使得任一长度为 $l(\varepsilon,S)$ 的区间中至少有一个 $\tau$

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leqslant\varepsilon \tag{1.1}$$

对 $\forall\ t\in R$ 和 $\forall\ x\in S$ 成立，则称 $f(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的.

若 $f(t,x)$ 换为算子 $f(t,\varphi)$，$\varphi\in\Omega\subseteq C$ 是开集，则上述定义的叙述不变（下同）.

(1.1) 中的数 $\tau$ 叫做 $f(t,x)$ 的 $\varepsilon$—平移数，我们用 $E=E(\varepsilon,f,S)$ 表示 $f$ 关于 $x\in S$ 的一切 $\varepsilon$—平移数全体构成的集合.

对确定的紧集 $S$，有如下性质

(i)若 $\varepsilon' > \varepsilon$，则 $\varepsilon$—平移数也是 $\varepsilon'$—平移数⇒

$E(\varepsilon,f,S) \subset E(\varepsilon',f,S)$

(ii)若 $\tau$ 是 $\varepsilon$—平移数，则 $-\tau$ 也是 $\varepsilon$—平移数.

(iii)若 $\tau_1,\tau_2$ 为 $\varepsilon_1$—平移数和 $\varepsilon_2$—平移数，则 $\tau_1 \pm \tau_2$ 是 $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$—平移数.

**定义** 1.2　设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$ 是关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 一致概周期的，设 $\Lambda$ 是实数 $\lambda$ 的集合，使得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)e^{-i\lambda t}dt \tag{1.2}$$

对于 $x\in\Omega$ 不恒等于 0. 其中 $i=\sqrt{-1}$. 由于 $\Omega$ 是可分的⇒ $\Lambda$ 是可列集，例如记为 $\{\lambda_j\}$. 由集 $\Lambda$ 的元素的整系数线性组合得到的所有实数构成的集合，称为 $f(t,x)$ 的模，即 $f$ 的模 $=\{\sum_{j=1}^{N} n_j\lambda_j, n_j, N\geq 1$ 为整数$\}$. 若 $\{r_j\}$ 是任一实数序列，$\{\alpha_j\}$ 是线性无关的，且 $\{r_j\}$ 中的每一个 $r$ 是 $\{\alpha_j\}$ 的元具整系数的有限线性组合，则我们说 $\{\alpha_j\}$ 是 $\{r_j\}$ 的一个整数基. 关于概周期函数的性质，下面给出若干定理，并举例性地证明一个.

**定理** 1.1　设 $f\in C(R\times\Omega,R^n)$ 是关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 一致概周期的，则 $f(t,x)$（或 $(f(t,\varphi))$ 在 $R\times S$ 上是有界和一致连续的，$S\subseteq\Omega$ 是紧的.

**证**　对 $\varepsilon=1$，$\exists\ l(S)>0$，使得任一长度为 $l(S)$ 的区间含有 $\tau$，且

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leq 1, t\in R, x\in S$$

设 $M$ 是 $|f(t,x)|$ 在 $[0,l(S)]\times S$ 上的最大值，不难看出，对 $\forall\ t\in R$，$\exists\ \tau\in E(l,f,S)$，使 $t+\tau\in[0,l(S)]$，因此对 $x\in S$ 有 $|f(t+\tau,x)|\leq M$，然而 $|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leq 1, x\in S$，故对 $\forall\ t\in R, x\in S$ 有 $|f(t,x)|\leq M+1$.

其次证明一致连续性，对给定的 $\varepsilon>0$，定义 $l=l(\frac{\varepsilon}{3},S)$，$\delta\in$

$(0,1)$使得若$|t_1-t_2|<\delta$,则对$\forall\ t_1,t_2\in[0,l+1]$和$x\in S$成立

$$|f(t_1,x)-f(t_2,x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

这个$\delta$依赖于$\varepsilon$和$S$. 由于$f$在$[0,l+1]\times S$上一致连续$\Rightarrow$这样的$\delta$存在.

现在设$t,t'$是满足$|t-t'|<\delta$的任意两个数,此时$\exists\ \tau\in E(\frac{2}{3},f,S)$使得$t+\tau\in[0,l+1]$和$t'+\tau\in[0,l+1]$,因此对$\forall\ t\in R,x\in S$有

$$|f(t+\tau,x)-f(t'+\tau,x)|<\frac{\varepsilon}{3},x\in S$$

以及

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|<\frac{\varepsilon}{3},|f(t'+\tau,x)-f(t',x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是对所有满足$|t-t'|<\delta$的$t,t'$和对$\forall\ x\in S$,有$|f(t',x)-f(t,x)|<\varepsilon$. $\Rightarrow$定理结论成立.

**引理 1.1** $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$关于$t$对$x\in\Omega$是一致概周期的,$\Omega\subseteq R^n$(或$\Omega\subseteq C$)是开集,并设$\{h_k\}$是一个实数序列,则对$\forall\ \varepsilon>0$和$\Omega$中紧集$S$,有一对应的子序列$\{h_{k_j}\}$使得对任一对函数$f(t+h_{k_j},x)$满足

$$|f(t+h_{k_p},x)-f(t+h_{k_m},x)|<\varepsilon,t\in R,x\in S \tag{1.3}$$

**证** 对给定的$\varepsilon>0$,$\exists\ l=l(\frac{\varepsilon}{4},S)$,使得每一长度为$l$的区间含有一个$\frac{\varepsilon}{4}$—平移数,对于每个$h_k$存在$\tau_k,r_k$使得$h_k=\tau_k+r_k$,这里$\tau_k\in E(\frac{\varepsilon}{4},f,S)$,而$0\leqslant r_k\leqslant 1$. 由定理 1.1$\Rightarrow f(t,x)$在$R\times S$上是一致连续的$\Rightarrow\exists\ \delta(\varepsilon,S)>0$,使得若$|t'-t''|<2\delta$,$x\in S$时,有$|f(t',x)-f(t'',x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因$0\leqslant r_k\leqslant l\Rightarrow\exists\ \{r_k\}$的子序列$\{r_{k_j}\}$,使得当$j\to\infty$时$r_{k_j}\to r$,这里$r$是集$\{r_k\}$的一个极限点,且$0\leqslant r\leqslant l$. 考

虑使 $r-\delta<r_{k_j}<r+\delta$ 成立的那些 $h_{k_j}$，设 $h_{k_j}$ 和 $h_{k_m}$ 是这样的两值，则我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}|f(t+h_{k_p},x)-f(t+h_{k_m},x)| \\
&=\sup_{t\in R}|f(t+\tau_{k_p}-\tau_{k_m}+r_{k_p}-r_{k_m},x)-f(t,x)| \\
&\leqslant\sup_{t\in R}|f(t+\tau_{k_p}-\tau_{k_m}+r_{k_p}-r_{k_m},x)-f(t+r_{k_p}-r_{k_m},x) \\
&+\sup_{t\in R}|f(t+r_{k_p}-r_{k_m},x)-f(t,x)|
\end{aligned}$$

由于 $\tau_{k_p}-\tau_{k_m}\in E(\frac{\varepsilon}{2},f,S)$ 且 $|r_{k_p}-r_{k_m}|<2\delta$，故对 $\forall\ t\in R,x\in S$，我们有

$$|f(t+h_{k_p},x)-f(t+h_{k_m},x)|<\varepsilon$$ 证毕.

**引理** 1.2 设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$ 是关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 一致概周期的，$S\subset\Omega$ 是紧的，则对任一实数序列 $\{h_k\}$，存在子序列 $\{h_{k_j}\}$，使得函数序列 $\{f(t+h_{k_j},x)\}$ 在 $R\times S$ 上一致收敛.

**证** 由引理 1.1⇒可选取子序列 $\{h_{k_j}^{(1)}\}$，使得对任意两个正数 $p,m$ 对 $\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f(t+h_{k_p}^{(1)},x)-f(t+h_{k_m}^{(1)},x)|<1$$

类似地可以选取序列 $\{h_{k_j}^{(1)}\}$ 的子序列 $\{h_{k_j}^{(2)}\}$，使得对于任意两个正整数 $p,m$. 对 $\forall\ \in R,x\in S$ 有

$$|f(t+h_{k_p}^{(2)},x)-f(t+h_{k_m}^{(2)},x)|<\frac{1}{2}$$

然后我们再取 $\{h_{k_j}^{(2)}\}$ 的子序列 $\{h_{k_j}^{(3)}\}$，使得

$$f(t+h_{k_p}^{(3)},x)-f(t+h_{k_m}^{(3)},x)|<\frac{1}{3}$$

等等. 现在取函数序列

$$f(t+h_{k_1}^{(1)}.x),f(t+h_{k_2}^{(2)},x),f(t+h_{k_3}^{(3)},x)\cdots\cdots\cdots$$

此时对于 $p,m(p<m)$ 及 $\forall\ t\in R,x\in S$ 我们有

$$|f(t+k_{k_p}^{(p)},x)-f(t+h_{k_m}^{(m)},x)|<\frac{1}{p}$$

⇒序列 $\{f(t+h_{k_j}^{(j)},x)\}$ 在 $R\times S$ 上一致收敛.

**定理** 1.2　设$\Omega\subseteq R^n$是开集，$f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$是关于$t$对$x\in\Omega$一致概周期的，则对于任一实数序列$\{h'_k\}$，存在子序列$\{h_k\}$以及连续函数$g(t,x)$，使得当$k\to\infty$时$R\times S$上一致有

$$f(t+h_k,x)\to g(t,x) \tag{1.4}$$

其中$S\subset\Omega$是紧的，并且$g(t,x)$也是关于$t$对$x\in\Omega$一致概周期的.

由一致概周期定义不难得出(1.4)的收敛性.

**定理** 1.3　设$f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$，并设对任一实数序列$\{h_k\}$，存在$\{h_k\}$的子序列$\{h_{k_j}\}$，使得$\{f(t+h_{k_j},x)\}$在$R\times S$上一致收敛，$S\subset\Omega$是紧的，则$f(t,x)$是关于$t$对$t\in\Omega$一致概周期的.

**证**　设$f(t,x)$关于$t$对$x\in\Omega$不是一致概周期的，则存在$\varepsilon>0$和$\Omega$中的紧集$S$，使得对$\forall\ l>0$，我们可确定一个长度为$l$的区间，它不含有$f(t,x)$对于$x\in S$的$\varepsilon$—平移数. 取一个数$h_1$，设$(a_1,b_1)$是一个长度大于$2|h_1|$的区间，它不包含任何一个$\varepsilon$—平移数. 若我们令$h_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$，则$h_2-h_1\in(a_1,b_1)$，因而$h_2-h_1$不可能是$\varepsilon$—平移数. 现在定义一个长度大于$2(|h_1|+|h_2|)$的区间，它不含有任何$\varepsilon$—平移数，再令$h_3=\frac{1}{2}(a_2+b_2)$，我们有$h_3-h_2\in(a_2,b_2)$和$h_3-h_1\in(a_2,b_2)\Rightarrow h_3-h_1$和$h_3-h_2$都不是$\varepsilon$—平移数，类似地可以定义$h_4,h_5\cdots\cdots$使得任何差数$h_i-h_j$都不是$\varepsilon$—平移数$\Rightarrow$对$\forall\ i,j,i\neq j$有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in R,x\in S}|f(t+h_i,x)-f(t+h_j,x)|\\&=\sup_{t\in R,x\in S}\left|f(t+h_i-h_j,x)-f(t,x)\right|>\varepsilon\end{aligned}$$

这证明序列$\{f(t+h_k,x)\}$不可能包含任何一个一致收敛的子序列$\Rightarrow$与定理假定不合$\Rightarrow f(t,x)$是关于$t$对$x\in\Omega$一致概周期的.

**注** 1.1　从上面的论述得出：若$f\in C(R\times\Omega,R^n)$是关于$t$对$x\in\Omega$一致概周期的，则$f$的每一个分量也是一致概周期的，反之

亦然.

**定理** 1.4 设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R)$, $g(t,x)\in C(R\times\Omega,R)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的,则 $cf(t,x)$($c$ 是常数), $f^2(t,x)$, $f(t,x)+g(t,x)$ 以及 $f(t,x)g(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 都是一致概周期的,并且若

$$\inf_{t\in R,x\in S}|g(t,x)|=m(s)>0$$

其中 $S$ 是紧集,则 $f(t,x)/g(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的.

对纯量一致概周期函数的上述诸性质,下文中一直引用,证明留给读者.

**定理** 1.5 设 $f_k(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的,且序列 $\{f_k(t,x)\}$ 在 $R\times S$ 上一致收敛于函数 $f(t,x)$, $S\subset\Omega$ 是紧的,则 $f(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 也是一致概周期的.

**证** 对给定的 $\varepsilon>0$ 和紧集 $S$,存在函数 $f_k(t,x)$ 使得对 $\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f(t,x)-f_k(t,x)|\leqslant\varepsilon/3$$

设 $l(\frac{\varepsilon}{3},S)$ 是对于 $f_k(t,x)$ 的 $\frac{\varepsilon}{3}$—平移数,则每一长度为 $l(\frac{\varepsilon}{3},S)$ 的区间含有 $\tau$,且对 $\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f_k(t+\tau,x)-f_k(t,x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

因此我们有

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|\leqslant|f(t+\tau,x)-f_k(t+\tau,x)|$$
$$+|f_k(t+\tau,x)-f_k(t,x)|+|f_k(t,x)-f(t,x)|\leqslant\varepsilon$$

$\Rightarrow f(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的.

概周期函数的特征还可表示为

**定理** 1.6 设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期函数,则对任意的实数序列 $\{\alpha'_k\}$, $\{\beta'_k\}$ 存在子序列 $\{\alpha_k\}$,

$\{\beta_k\}$使得在 $R\times S$ 上一致成立

$$\lim_{m\to\infty}\{\lim_{l\to\infty}f(t+\alpha_l+\beta_m,x)\}=\lim_{k\to\infty}f(t+\alpha_k+\beta_k,x)$$

其中 $S\subset\Omega$是紧集,反之亦真.

**证** 若对所有 $k$ 令 $\beta_k=0$,则本定理之逆由定理 1.3 推出,现在证本定理的第一部分:由定理 1.2⇒∃ $\{\alpha'_k\}$的子序列$\{\alpha_k\}$,它在 $R\times S$ 上一致成立

$$f(t+\alpha_k,x)\to g(t,x)$$

其中 $S\subset\Omega$是紧集,也存在$\{\beta'_k\}$的子序列$\{\beta_k\}$,使得在 $R\times S$ 上一致成立 $g(t+\beta_k,x)\to h(t,x)$,因此对任一紧集 $S$,若 $k\geqslant k_1(\varepsilon,S)$,则对$\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f(t+\alpha_k,x)-g(t,x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而对$\forall\ t\in R,x\in S$ 和任意的 $\beta_k$ 有

$$|f(t+\alpha_k+\beta_k,x)-g(t+\beta_k,x)|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{1.5}$$

并且若 $k\geqslant k_2(\varepsilon,S)$,则对$\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|g(t+\beta_k,x)-h(t,x)|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{1.6}$$

⇒若 $k\geqslant\max\{k_1(\varepsilon,S),k_2(\varepsilon,S)\}$,则从(1.5)(1.6)⇒对$\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f(t+\alpha_k+\beta_k,x)-h(t,x)|<\varepsilon$$

这表明在 $R\times S$ 上一致地有 $f(t+\alpha_k+\beta_k,x)\to h(t,x)$.

**定理 1.7** 设 $f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$是关于 $t$ 对 $x\in\Omega$一致概周期的,$\xi(t)$是概周期函数,使得对$\forall\ t\in R$ 有 $\xi(t)\in S$,$S\subset\Omega$是紧的,则 $f(t,\xi(t))$关于 $t$ 是概周期的(复合函数的概周期性).

**证** 设$\{h'_k\}$是实数序列,则∃ $\{h'_k\}$的子序列$\{h_k\}$和概周期函数 $g(t,x)$,$\eta(t)$使得

$f(t+h_k,x)\to g(t,x)$在 $R\times S$ 上一致地成立.

$\xi(t+h_k)\to\eta(t)$在 $R$ 上一致地成立.

因为 $g(t,x)$ 关于 $t$，对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的 $\Rightarrow g(t,x)$ 在 $R\times S$ 上一致连续 $\Rightarrow\exists\ \delta(\frac{\varepsilon}{2})>0$，使得由 $|x-y|<\delta(\frac{\varepsilon}{2})$ 可得

$$|g(t,x)-g(t,y)|<\frac{\varepsilon}{2},x\in S,g\in S,t\in R$$

且 $\exists\ k_0(\varepsilon)>0$ 使当 $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ 时，对 $\forall\ t\in R,x\in S$ 有

$$|f(t+h_k,x)-g(t,x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

且

$$|\xi(t+h_k)-\eta(t)|<\delta(\frac{\varepsilon}{2})\quad t\in R$$

另一方面对 $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ 有

$$|f(t+h_k,\xi(t+h_k))-g(t,\eta(t))|$$
$$\leqslant|f(t+h_k,\xi(t+h_k))-g(t,\xi(t+h_k))|$$
$$+|g(t,\xi(t+h_k))-g(t,\eta(t))|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因为对 $\forall\ t\in R$，有 $\xi(t+h_k)\in S$，这表明 $f(t+h_k,\xi(t+h_k))$ 在 $R$ 上一致收敛于 $g(t,\eta(t))\Rightarrow f(t,\xi(t))$ 关于 $t$ 是概周期的.

现在给出渐近概周期函数的定义和性质.

设 $f:R_+\to R^n$ 是连续的. Fréchet 给出的渐近概周期函数定义为

**定义** 1.3　若 $f(t)$ 是由一个连续概周期函数 $p(t)$ 和一个定义在 $R_+$ 上，当 $t\to\infty$ 时趋于 0 的连续函数 $q(t)$ 之和，亦即

$$f(t)=p(t)+q(t)\tag{1.7}$$

则称 $f(t)$ 是一个渐近概周期函数.

**定理** 1.8　设 $f(t)$ 是渐近概周期函数，则它的分解式(1.7)是唯一的.

**证**　设 $f(t)$ 有另一分解式 $f(t)=r(t)+s(t)$，这里 $r(t)$ 是概周期函数，$t\to\infty$ 时 $s(t)\to 0$，此时我们有

$$p(t)-r(t)+q(t)-s(t)=0$$

由此推出，当 $t\to\infty$ 时 $p(t)-r(t)\to 0$，$p(t)$ 和 $r(t)$ 是两个概周期函数，因而 $p(t)-r(t)$ 也是概周期函数，因为当 $t\to\infty$ 时 $p(t)-r(t)\to 0$，故 $p(t)-r(t)\equiv 0\Rightarrow$ 分解式是唯一的.

**定理** 1.9　$f(t)$ 是渐近概周期的，则 $f$ 在 $R_+$ 上是有界且一致连续的.

**定理** 1.10　若 $f(t)$ 是概周期的，则它的不定积分有界时，它也是概周期的[15].

**定理** 1.11　若概周期函数 $f(t)$ 可微，且导数 $\dot f(t)$ 也是渐近概周期的，则 $\dot f(t)$ 的分解式恰好是

$$\dot f(t)=\dot p(t)+\dot q(t) \tag{1.8}$$

这里 $\dot p(t)$ 和 $\dot q(t)$ 分别是 $p(t)$ 和 $q(t)$ 的导数.

**证**　因为 $\dot f(t)$ 是渐近概周期的，故 $\dot f(t)$ 有它的分解式

$$\dot f(t)=\alpha(t)+\beta(t)$$

这里 $\alpha(t)$ 是概周期的，$t\to\infty$ 时 $\beta(t)\to 0$，对任意固定的 $h$，

$$f(t+h)-f(t)=\int_t^{t+h}\alpha(s)ds+\int_t^{t+h}\beta(s)ds$$

左端的第一项是概周期的，因为它是有界的且它的导数是概周期的，第二项是连续的且当 $t\to\infty$ 时趋于 0，因此由分解式的唯一性有

$$p(t+h)-p(t)=\int_t^{t+h}\alpha(s)ds.$$

$$q(t+h)-q(t)=\int_t^{t+h}\beta(s)ds.$$

由此得出 $p(t)$，$q(t)$ 是可微的，且

$$\dot p(t)=\alpha(t),\dot q=\beta(t)$$

若 $f(t):R_+\to R$ 连续，则

**定义** 1.4　若给定 $\varepsilon>0$，$\exists\ l(\varepsilon)>0$，$T(\varepsilon)\geqslant 0$，使得 $R$ 上每个长为 $l(\varepsilon)$ 的区间含有一个 $\tau$，且对于 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 有

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$$

则我们说 $f(t)$ 具有性质($P^*$).

**定义 1.5** 若给定 $\varepsilon>0$,∃ $l(\varepsilon)>0$,$T(\varepsilon)\geqslant 0$,使得 $R_-$ 上每一长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间含有一个 $\tau$,且对 $t\geqslant T(\varepsilon)$,有

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$$

则说 $f(t)$ 具有性质($P$).

**引理 1.3** 性质($P^*$)等价于性质($P$).

**证** 显然由性质($P^*$)可推出性质($P$),现在设 $f(t)$ 具有性质($P$),考虑一个长为 $l(\varepsilon)$ 的非正区间 $L$,在 $L$ 包含原点的情况下可取 $\tau=0$. 其他情况下取与 $L$ 关于原点为对称的 $L^*$,此时对于某个 $\tau^*\in L^*$ 和 $t\geqslant T(\varepsilon)$

$$|f(t+\tau^*)-f(t)|<\varepsilon$$

若我们置 $t=-\tau^*$,则 $\tau\in L$. 令 $\sigma=t+\tau$,则 $t=\sigma+\tau^*$,因为 $\tau^*\in L^*$ 且 $f(t)$ 具有性质($P$),故对于 $\sigma\geqslant T(\varepsilon)$ 时,有

$$|f(\sigma+\tau^*)-f(\sigma)|<\varepsilon$$

由此推出,对 $t+\tau\geqslant T(\varepsilon)$ 和 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 时,有

$$|f(t)-f(t+\tau)|<\varepsilon$$

此即性质($P$)⇒($P^*$).

**定义 1.6** 若对任一序列 $\{h_k\}$,$h_k>0$ 且当 $k\to\infty$ 时有 $h_k\to\infty$,我们可取子列 $\{h_{k_j}\}$,使得 $f(t+h_{k_j})$ 在 $R_+$ 上一致收敛,则我们说 $f(t)$ 具有性质($L$).

**定理 1.12** 若 $f(t)$ 是渐近概周期的,这里 $t\in R_+$,则 $f(t)$ 具有性质($P$).

**证** 由于 $f(t)$ 是渐近概周期的,它具有分解式 $f(t)=p(t)+q(t)$,这里 $p(t)$ 是概周期的,当 $t\to\infty$ 时 $q(t)\to 0$. 因 $p(t)$ 是概周期的,故对给定的 $\varepsilon>0$,∃ $l(\varepsilon)>0$,使得 $R_+$ 上每个长为 $l(\varepsilon)$ 的区间包含 $\tau$,且有 $|p(t+\tau)-p(t)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,此外,存在 $T(\varepsilon)\geqslant 0$,使得对于 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 有 $|g(t)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是我们有

$$|f(t+\tau)-f(t)|\leqslant|p(t+\tau)-p(t)|+|q(t+\tau)|+|q(t)|$$

因而对于 $t\geqslant T(\varepsilon)$ 有 $|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$，这表明 $f(t)$ 具有性质 $(P)$.

**定理** 1.13　若 $f(t)$ 是渐近概周期的，这里 $t\in R_+$，则 $f(t)$ 具有性质 $(L)$.

**证**　对任一序列 $\{h_k\}$，这里 $h_k>0$ 且当 $k\to\infty$ 时 $h_k\to\infty$，我们有

$$f(t+h_k)=p(t+h_k)+q(t+h_k)$$

因为当 $t\to\infty$ 时，$q(t)\to 0$，故存在正整数 $k_0(\varepsilon)$，使得若 $m,k\geqslant k_0(\varepsilon)$，则对于所有 $t\in R_+$

$$|q(t+h_k)-q(t+h_m)|<\varepsilon$$

此外，存在 $\{h_k\}$ 的子序列 $\{h_{k_j}\}$ 和正整数 $j_0(\varepsilon)$，使得若 $j,l\geqslant j_0(\varepsilon)$，则有 $|p(t+h_{kl})-p(t+h_{k_j})|<\varepsilon$，对 $\forall\ t\in R$ 成立．因为 $p(t)$ 是概周期的，于是存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得若 $j,\ l\geqslant N(\varepsilon)$．对所有 $t\in R_+$ 成立

$$|p(t+h_k)-p(t+h_{kl})|<\varepsilon,\ |q(t+h_{k_j})-q(t+h_{kl})|<\varepsilon$$

由此推出，若 $j,l\geqslant N(\varepsilon)$ 且 $t\in R_+$，则我们就有

$$|f(t+h_{k_j})-f(t+h_{kl})|<2\varepsilon\Rightarrow f \text{ 具有性质}(L).$$

本节最后这部分内容目的是说明：$f(t)$ 是渐近概周期，$f(t)$ 具有性质 $(P)$，$f(t)$ 具有性质 $(L)$，这三者之间的等价关系．为了证明这一点，我们还要给出几个引理和定理（证明参看[15]）.

**引理** 1.4　若 $f(t)$ 具有性质 $(P)$，这里 $t\in R_+$，在 $R_+$ 上 $f(t)$ 有界且一致连续.

**定理** 1.14　若 $f(t)$ 具有性质 $(P)$，$t\in R_+$，　则 $f(t)$ 具有性质 $(L)$，反之若 $f(t)$ 具有性质 $(L)$，则 $f$ 具有性质 $(P)$.

**定理** 1.15　若 $f(t)$ 具有性质 $(P)$，$t\in R_+$，则 $f(t)$ 是渐近概周期的.

**证**　对 $\varepsilon_k>0$，$\exists\ l_k>0$ 和 $T_k\geqslant 0$，使得 $[k,k+l_k]$ 包含 $\tau$ 而有

$|f(t+\tau_k)-f(t)|<\varepsilon_k$，对于 $t\geqslant T_k$ 成立．因为 $\tau_k\geqslant k$，故当 $k\to\infty$ 时 $\tau_k\to\infty$，由［15］中的证明可得 $\{f(t+\tau_k)\}$ 有一个子序列 $\{f(t+\tau_{k_j})\}$，它在 $R_+$ 上一致收敛于一个概周期函数 $p(t)$，设当 $k\to\infty$ 时 $\varepsilon_k\to 0$，且设 $\eta_{k_j}$ 定义为

$$\eta_{k_j}=\sup_{t\in R_+}|f(t+\tau_{k_j})-p(t)|$$

则当 $j\to\infty$ 时 $\eta_{k_j}\to 0$，对于 $t\geqslant 0$，令 $q(t)=f(t)-p(t)$，此时对于 $t\geqslant T_{k_j}$，我们有

$$|q(t)|\leqslant|f(t)-f(t+\tau_{k_j})|+|f(t+\tau_{k_j})-p(t)|<\varepsilon_{k_j}+\eta_{k_j}$$

这表明当 $t\to\infty$ 时，$q(t)\to 0\Rightarrow f(t)$ 是渐近概周期的．

最后我们有

$$f(t)\text{渐近概周期}\underset{\text{定理 1.15}}{\overset{\text{定理 1.12}}{\Longleftrightarrow}}f(t)\text{具有性质}(P)$$

$$f(t)\text{具有性质}(P)\underset{\text{定理 1.14}}{\Longleftrightarrow}f(t)\text{具有性质}(L)$$

## §2 概周期 FDE

对常微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x) \tag{2.1}$$

其中 $x\in R^n$，$f(t,x)\in C(R\times\Omega,R^n)$，$\Omega\subseteq R^n$ 是开的，若 $f(t,x)$ 关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 是一致概周期的，则称(2.1)是一个概周期微分方程，类似地可定义概周期 FDE．

设 $C=C([-r,0],R^n)$，$H\in R_+$ 或 $H=+\infty$，记

$$C_H=\{\varphi:\varphi\in C,|\varphi|<H\}$$

$|\varphi|=\sup_{\theta\in[-r,0]}|\varphi(\theta)|$，$\Omega\subset C$ 是开集，$f:R\times\Omega\to R^n$ 连续．

**定义 2.1** 称 $f(t,\varphi)$ 关于 $t$ 对 $\varphi\in\Omega$ 是一致概周期的，若对 $\forall\,\varepsilon>0$，及 $\Omega$ 中任一紧集 $W$，$\exists\ l(\varepsilon,w)>0$，使得对每一长度为 $l(\varepsilon,$

$W$)的区间上均含有 $\tau$,使成立

$$|f(t+\tau,\varphi)-f(t,\varphi)|\leqslant\varepsilon, t\in R,\varphi\in W \tag{2.2}$$

若 $f(t,\varphi)$关于 $t$ 对 $x\in\Omega$是一致概周期的,则 RFDE($f$)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{2.3}$$

叫做滞后型概周期泛函微分方程.

例如 $a(t)$,$b(t)$当 $t\in R$ 时关于 $t$ 是概周期的,则对于 $x_t\in C_H$,方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau) \tag{2.4}$$

是一个概周期差分微分方程,当然也是一个概周期泛函微分方程,以后略记为($A$,$P$)RDDE 以及($A$,$P$)RFDE($f$)等等.

由定义自治和周期 FDE 都是概周期 FDE.

对渐近概周期函数 $f(t)$,以及性质($P$)、性质($L$)都沿用 §1 的定义,并有相应的结果,但必须注意此时把 $R^n$ 换为 $C$,初始数据空间 $C$ 不是局部紧的,§1 的各种定义和提法要自然地做相应的限制,我们不再一一复述 §1 的全部结果. 例如 $S\subset\Omega\subset R^n$ 现在为 $W\subset\Omega\subset C$,连续的 $f(t,\varphi)$关于 $t$ 对 $\varphi\in\Omega$是一致概周期的,当且仅当对任意一个序列$\{\tau_k\}$存在子序列$\{\tau_{k_j}\}$,使得 $f(t+\tau_{k_j},\varphi)$在 $R\times W$ 上一致收敛,$W\subset\Omega$是紧的,那么这种收敛性是 $C$ 空间中的一致收敛性等等.

注意到概周期 FDE 是一般的非自治 FDE 中的一类特别情形,于是第四章中的基本理论对于方程(2.3)都适用,但自治与周期系统的理论则对(2.3)未必适用.

对概周期 FDE 稳定性、有界性、渐近性的研究结果,可以概括地评述如下:要得到相同的结果,对概周期系统所附加的条件,比非自治系统所附加的条件弱,比自治和周期系统强.

现在设差分算子 $D(t,\varphi)$和泛函 $f(t,\varphi)$关于 $t$ 对 $x\in\Omega$都是一致概周期的,则满足第六章定义的方程

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{2.5}$$

叫做概周期中立型泛函微分方程，如上述记号所表示的那样，简记为$(A,P)$NFDE$(D,F)$.

最后，我们指出，对概周期 FDE 的基本理论与线性系统理论，还没有相应的专著系统地给出严密的理论体系，这是有待读者去做的一项有意义的工作，它应当反映两个基本要求：

(1)既反映与常微分方程类同的性质，又能用各种反例和条件严格区分出与常微概周期系统的本质区别.

(2)细致地区分出，概周期 FDE 与非自治、自治、周期的 FDE 保证解的各种性态的条件有什么不同.

由于概周期系统不仅在天文学中，而且在生态学与控制理论中有广泛应用. 事实上，当出现两个周期是不可公度的干扰因素时，总要引入概周期解. 在近代微分方程理论中同时引入时滞与概周期这两种因素是必然的，不可避免的. 本章仅仅是一个简单的导引，有兴趣的读者参看[15]的附录.

## §3 $(A,P)$RFDE$(f)$概周期解的存在性

沿用§1中关于$f(t)$为渐近概周期的定义，我们先给出一个与常微分方程类似的概周期解存在定理：

**定理** 3.1 设 RFDE$(f)$(2.3)是概周期的. 若(2.3)有一个渐近概周期解$\hat{x}(t)$定义在$R_+$上，对$\forall\ t\geqslant 0$有$|\hat{x}(t)|\leqslant \alpha<H$，则(2.3)有一个概周期解.

**证** 由于$\hat{x}(t)$是有界渐近概周期解，故有分解式

$$\hat{x}(t)=\xi(t)+\eta(t) \tag{3.1}$$

其中$\xi(t)$是概周期的，$\eta(t)\to 0$，当$t\to\infty$，由$\hat{x}(t)$和$\xi(t)$的一致连续性，存在紧集$W\subset C_H$，使得当$t\in R$，$\xi_t\in W$时，由性质$(L)$，可令

$\{\tau_k\}$为使 $k\to\infty$时 $\tau_k\to\infty$的序列，使得在 $R\times W$ 上

$$f(t+\tau_k,\varphi)\xrightarrow{\text{一致}}f(t,\varphi)$$

且在 $R$ 上 $\xi(t+\tau_k)\to\xi^*(t)$是一致的，$\xi^*(t)$是概周期的.

令 $\hat{x}^k(t)=\hat{x}(t+\tau_k)$，则 $\hat{x}^k(t)$定义在$-\tau_k-r\leqslant t<\infty$上，对$\forall\, t\geqslant-\tau_k$，$\xi_t^k\in W$，并且对一切 $k$，$\hat{x}^k(t)$是方程

$$\dot{x}(t)=f(t+\tau_k,x_t) \tag{3.2}$$

的解，由于 $\hat{x}(t+\tau_k)=\xi(t+\tau_k)+\eta(t+\tau_k)$，$\eta(t)\to0$，当 $t\to\infty$，可见当 $k\to\infty$时 $\hat{x}^k(t)\to\xi^*(t)$在任何紧区间$[-N,N]$上是一致的($N>0$)$\Rightarrow\xi^*(t)$是(2.3)的一个概周期解(注意 $\hat{x}(t)$的分解式是唯一的).

如§2 指出的那样，我们有关于$(A\cdot P)$RFDE$(f)$(2.3)的一个结果，它是定理 1.2 的推广.

**定理** 3.2 设 $f(t,\varphi)\in C(R\times\Omega,R^n)$关于 $t$ 对 $\varphi\in\Omega\subset C$ 是一致概周期的，则对任一实数序列$\{h'_k\}$，存在子序列$\{h_k\}$以及连续函数 $g(t,\varphi)\in C(R\times\Omega,R^n)$，使得当 $k\to\infty$时在 $R\times W$ 上一致地有

$$f(t+\tau_k,\varphi)\to g(t,\varphi) \tag{3.3}$$

其中 $W\subset\Omega$是紧的，并且 $g(t,\varphi)$也是关于 $t$ 对 $\varphi\in\Omega$一致概周期的.

**定义** 3.1 $T(f)$表示由 $f$ 关于时间 $t$ 的所有平移组成的函数空间，即 $f_\tau\in T(f)$定义为

$$f_\tau\triangleq f_\tau(t,\varphi)=f(t+\tau,\varphi),\ \tau\in R \tag{3.4}$$

$H(f)$表示依(3.3)意义下 $T(f)$的一致闭包，则 $H(f)$叫做 $f$ 的"壳(hull)".

**定义** 3.2 (2.3)的解 $\hat{x}(f)$称为在 $H(f)$扰动之下对 $t\geqslant0$ 关于紧集 $K$ 是稳定的，若对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得每当 $g\in H(f)$和某个 $\tau$，$|\hat{x}_\tau-\varphi|\leqslant\delta(\varepsilon)$以及 $\rho(f_\tau,g,k)\leqslant\delta(\varepsilon)$时，便有

$$|\hat{x}(t+\tau)-x(t,0,\varphi,g)|\leqslant\varepsilon,t\leqslant 0 \tag{3.5}$$

其中 $f_\tau=f(t+\tau,x)$，而 $x(t,0,\varphi,g)$是方程

$$\dot{x}(t)=g(t,x_t) \tag{3.6}$$

过$(0,\varphi)$的解，且对$\forall\ t\geqslant 0,x(t,0,\varphi,g)\in K$.

定义 3.2 还可这样表达：

"解 $\hat{x}(t)$在 $H(f)$扰动下关于 $K$ 是稳定的，如果对$\forall\ \varepsilon>0,\tau\geqslant 0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)\geqslant 0$ 使得当 $g\in H(f)$，$|\hat{x}_\tau-\varphi|\leqslant\delta(\varepsilon)$和 $p(f,g,k)\leqslant\delta(\varepsilon)$时有

$$|\hat{x}(t)-x(t,\tau,\varphi,g)|\leqslant\varepsilon,t\geqslant\tau$$

其中 $x(t,\tau,\varphi,g)$是(3.6)过$(\tau,\varphi)$的解，且对$\forall\ t\geqslant\tau$ 成立 $x(t,\tau,\varphi,g)\in K$".

**定义** 3.3　设$\Omega=C_{B^*}$，$B^*>0$，$\hat{x}(t)$是(2.3)对 $t\geqslant 0$ 满足$|\hat{x}_t|<B$，$0<B<B^*$ 的解，$\hat{x}(t)$称为完全稳定的，若对$\forall\ \sigma\geqslant 0,\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得若 $g(t,\psi)$是$[\sigma,\infty)\times C_{B^*}$上的任一连续函数，且对$\forall\ (t,\psi)\in[\sigma,\infty)\times C_{B^*}$，$|\hat{x}_t-\psi|\leqslant\varepsilon$ 时成立

$$|g(t,x_t)-f(t,x_t)|<\delta(\varepsilon) \tag{3.7}$$

若 $\varphi\in C_{B^*}$，满足$|\hat{x}_\sigma-\varphi|<\delta(\varepsilon)$，则方程

$$\dot{x}(t)=g(t,x_t) \tag{3.8}$$

过$(\sigma,\varphi)$的任一解 $x(t)$，对$\forall\ t\geqslant\sigma$ 满足

$$|\hat{x}(t)-x(t)|<\varepsilon$$

完全稳定性实际上即 1944 年 И. Г. 马尔金提出的："在经常干扰下的稳定性."我们把定义 3.3 换一种方式表达之：考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{3.9}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)+R(t,x_t) \tag{3.10}$$

其中 $f,R:R\times C_{B^*}\to R^n(R_\sigma=[\sigma,+\infty))$，若对$\forall\ \sigma\in R,\varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得对(3.9)的解 $\hat{x}(t)$，当

$$|R(t,\psi)|<\delta(\varepsilon),(\text{当}\ |\hat{x}(t)|\leqslant\varepsilon)$$

$$|\hat{x}_\sigma-\varphi|<\delta(\varepsilon)$$

时，(3.10)过$(\sigma,\varphi)$的任何解$x(t)=x(t,\sigma,\varphi,g)$满足

$$|\hat{x}(t)-x(t)|<\varepsilon$$

则称(3.9)的解$\hat{x}(t)$在经常干扰下是稳定的，或者说是完全稳定的.

定义3.2和定义3.3这两种意义下的稳定是有区别的.定义3.3⇒定义3.2，但反之不真.例如方程$\dot{x}(t)=0$的零解不是完全稳定的，但它的零解在壳$H(f)$的扰动下是稳定的.

**定义3.4** 设$K$是给定的$C_\beta$中的紧集，$\hat{x}(t)$是(3.9)的解，使得$\hat{x}_t\in K$对$\forall\ t>0$成立，对$g\in H(f)$和$h\in H(f)$($H(f)$是$f$的壳).定义

$$\rho(g,h,k)=\sup\{|g(t,\varphi)-h(t,\varphi)|:t\in R,\varphi\in K\}$$

若对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，当$g\in H(f)$，$|\xi_\tau-\psi|\leqslant\delta(\varepsilon)$以及$\rho(f_\tau,g,k)\leqslant\delta(\varepsilon)$时，使得对$t\geqslant0$有

$$|\hat{x}_{t+\tau}-x_t(0,\psi,g)|<\varepsilon \tag{3.11}$$

其中$\tau>0,\psi\in K,f_\tau(t,\varphi)=f(t+\tau,\varphi)$，$x(t,0,\psi,g)$是方程

$$\dot{x}(t)=g(t,x_t) \tag{3.12}$$

过$(0,\psi)$的解.

我们有

**定理3.3** 设$K$是$C_\beta$中的紧集.若系统(3.9)有解$\hat{x}(t)$使$\hat{x}_t\in K$对$\forall\ t\geqslant0$成立.又$\hat{x}(t)$在$H(f)$扰动下关于$K$是稳定的，则$\hat{x}(t)$是渐近概周期的，从而(3.9)存在概周期解.

**证** 设序列$\{\tau_k\}$给定，$k\to\infty$时$\tau_k\to\infty$，又令$\hat{x}^k(t)=\hat{x}(t+\tau_k)$，故$\hat{x}^k(t)$是方程

$$\dot{x}(t)=f(t+\tau_k,x_t)$$

满足条件$\hat{x}_0^k=\hat{x}_{\tau_k}$的解.并且$\hat{x}_t^k\in K$对$\forall\ t\geqslant0$及一切$k$成立，此外显然$\hat{x}^k(t)$在$H(f_{\tau_k})$扰动之下关于$k$是稳定的，且具有$\hat{x}(t)$在$H(f)$扰动之下关于$k$是稳定的定义中相同的$\delta$.$\exists\ \{\tau_k\}$的子序列，为方便计仍记为$\{\tau_k\}$，使得$f(t+\tau_k,\varphi)$当$k\to\infty$时在$R\times K$上

一致收敛，因而存在整数 $k_0(\varepsilon)>0$，使得只要 $m\geqslant 1$，$k\geqslant k_0(\varepsilon)$，在 $R\times K$ 上就有

$$|f(t+\tau_k,\varphi)-f(t+\tau_m,\varphi)|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

其中 $\delta$ 是定义 3.4 中确定的数，因此 $\rho(f_{\tau_k},f_{\tau_m},k)\leqslant\delta(\varepsilon)$，只要 $m\geqslant k\geqslant k_0(\varepsilon)$，因为 $\hat{x}_0^k\in K$，可设 $|\hat{x}_0^k-\hat{x}_0^m|\leqslant\delta(\varepsilon)$，只要 $m\geqslant k\geqslant k_0(\varepsilon)$.

$\hat{x}^m(t)$ 是 $\dot{x}(t)=f(t+t_m,x_t)$ 的解，且 $\hat{x}_0^m\in K$，又由于 $\hat{x}^k(t)$ 在 $H(f_{tk})$ 的扰动之下关于 $K$ 是稳定的，并且 $f_{tm}\in H(f_{tk})$. 我们有 $|\hat{x}_t^k-\hat{x}_t^m|\leqslant\varepsilon$ 对 $\forall\ t\geqslant 0$ 成立，只要 $m\geqslant k\geqslant k_0(\varepsilon)$. $\Rightarrow$ 若 $n,m\geqslant k\geqslant k_0(\varepsilon)$，则对 $\forall\ t\geqslant 0$ 有

$$|\hat{x}(t+\tau_m)-\hat{x}(t+\tau_n)|\leqslant\varepsilon$$

$\Rightarrow\hat{x}(t)$ 是渐近概周期的. 由定理 3.1$\Rightarrow$(3.9)存在概周期解.

**定理** 3.4　若(3.9)的解 $\hat{x}(t)$ 是完全稳定的，则它在 $H(f)$ 扰动之下关于 $K$ 是稳定的，从而推知(3.9)有概周期解.

我们再给出几个结果，证明参看[15].

**定理** 3.5　设(3.9)是关于 $t$ 对 $x\in\Omega$ 一致概周期的，且对 $C$ 中任意紧集 $K$，$\exists$ 常数 $L(K)$，使得对 $\varphi_1,\varphi_2\in K$ 有

$$|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)|\leqslant L(K)|\varphi_1-\varphi_2| \tag{3.13}$$

若(3.9)当 $t\geqslant 0$ 时有解 $x(t,0,\varphi)$，使得 $|x(t,0,\varphi)|\leqslant H_1$，$t\geqslant 0$，$0<H_1<\infty$ 且全局一致渐近稳定，则(3.9)有唯一的概周期解，它是完全一致全局渐近稳定的，并且以 $H_1$ 为界.

考虑(3.9)的相伴方程(乘积组)

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{3.14}$$

$$\dot{y}(t)=f(t,y_t)$$

设 $f(t,\varphi)$ 关于 $t$，对 $\varphi\in C_H$ 是一致概周期的，$f(t,\varphi)\in C(R\times C_H,R^n)$，$C_H\subseteq C$，且对 $\forall\ \alpha>0$，$\exists\ L(\alpha)>0$，使得 $t\in R$，$\varphi\in C_\alpha$ 时有

$$|f(t,\varphi)|\leqslant L(\alpha) \tag{3.15}$$

**定理** 3.6　设对 $t\geqslant 0,\varphi,\psi\in C_H$，存在一个连续的 $V$ 泛函，$V(t,\varphi,\psi)$ 满足

(i) $u(|\varphi-\psi|)\leqslant V(t,\varphi,\psi)\leqslant v(|\varphi-\psi|)$

(ii) $|V(t,\varphi_1,\psi_1)-V(t,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant\hat{k}\{|\varphi_1-\varphi_2|+|\psi_1-\psi_2|\}$

(iii) $\dot{V}_{(3.13)}(t,\varphi,\psi)\leqslant-\alpha V(t,\varphi,\psi)$

其中 $\alpha=\text{const.}>0$，$u(s)$，$v(s)$ 连续非减，当 $s\to 0$ 时 $u(s)\to 0$，$\hat{k}=\text{const.}>0$（若 $\varphi,\psi\in C$，对 $\varphi_i,\psi_i\in C\eta(i=1,2)$，则 $R$ 可以依赖于 $\eta$）。此时，若(3.9)有一个解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 使得 $|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant H_1$，其中 $t\geqslant\sigma\geqslant 0$，$H>H_1>0$，则(3.9)在 $C_H$ 中有唯一的完全一致渐近稳定的概周期解。

**定理** 3.7　设存在定理 3.6 中的泛函 $V(t,\varphi,\psi)$ 满足该定理的条件(i)(iii)以及

(ii)′ $|V(t,\varphi_1,\psi_1)-V(t,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant\tilde{k}|(\varphi_1-\varphi_2)-(\psi_1-\psi_2)|$

其中常数 $\tilde{k}>0$（若 $\psi,\varphi\in C$，对 $\varphi_i,\psi_i\in C\eta(i=1,2)$，$\tilde{k}$ 可以依赖于 $\eta$）此外设(3.9)有解 $\hat{x}(t)$ 使得对于 $t\geqslant\sigma\geqslant 0$ 及某个 $C_0>0$ 有 $|\hat{x}_t|\leqslant C_0$，考虑方程组

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)+h(t)\tag{3.16}$$

其中 $f(t,\varphi)$ 关于 $t$ 对 $\varphi\in C_H$ 是一致概周期的，$h(t)\in R^n$ 关于 $t$ 是概周期的，且 $|h(t)|\leqslant R=\text{const.}$ 对 $\forall\ t\in R$ 成立，那么如果 $u^{-1}(\frac{\tilde{k}R}{\alpha})+C\leqslant H_1<H^*$，则(3.16)在 $C_{H^*}$ 中有唯一的、完全一致渐近稳定的概周期解，它以 $H_1$ 为界，其中 $H_1<H^*<H$.

## §4　(A,P)NFDE(D,f)概周期解的存在性

考虑 NFDE$(D,f)$

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)\tag{4.1}$$

其中$D,f\in C(R_+\times\Omega,R^n)$，$\Omega\subseteq C$为开集，$D(t,\varphi)$在0处是原子的，$D(t,\varphi)$，$f(t,\varphi)$关于$t$，对$\varphi\in\Omega$是一致概周期的，为了证明简洁起见，再设$D(t,\varphi)=D(t)\varphi=\varphi(0)-g(t,\varphi)$，$g:R_+\times\Omega\to R^n$连续，线性，$D$是稳定算子.

若$H^*=\text{const}$. 我们有

**引理** 4.1　设存在常数$L$，当$\varphi\in C_H,\psi\in C_H$时

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi| \tag{4.2}$$

且(4.1)关于$(H^*,H)$一致渐近稳定，则存在一个$V$泛函：$V(t,\varphi,\psi):R_+\times C_{H^*}\times C_{H^*}\to R$满足条件

(i)$u(|D(t)\varphi-D(t)\psi|)\leqslant V(t,\varphi,\psi)\leqslant v(|\varphi-\psi|)$，这里$u,v$是连续递增的正定函数.

(ii)$|V(t,\varphi_1,\psi_1)-V(t,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant\hat{L}\{|\varphi_1-\varphi_2|+|\psi_1-\psi_2|\}$，这里$\hat{L}$是正常数.

(iii)$V$沿着方程组

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)\\&\frac{d}{dt}D(t,y_t)=f(t,y_t)\end{aligned} \tag{4.3}$$

的导数满足

$$\dot{V}_{(4.3)}(t,\varphi,\psi)\leqslant-rV(t,\varphi,\psi),r=\text{const.}>0 \tag{4.4}$$

**引理** 4.2　设$f(t,\varphi)$，$g(t,\psi)$关于$t$对$\varphi\in\Omega$是一致概周期的，则下述两结论等价.

(i)$m(g)\subset m(f)$，$m$是概周期函数的模.

(ii)任意使得$f(t+\tau_k,\varphi)$收敛到$f(t,\varphi)$的序列$\{\tau_k\}$，存在子序列$\{\tau_{k_j}\}$使得$g(t+\tau_{k_j},\varphi)$在$\Omega$的任意紧子集上一致收敛于$g(t,\varphi)$.

**定理** 4.1　设存在连续的泛函$V(t,\varphi,\psi)$满足下列条件

(i)$u(|D(t)\varphi-D(t)\psi|)\leqslant V(t,\varphi,\psi)\leqslant v(|\varphi-\psi|)$，其中$u(s)$，$v(s)$是连续单增的正定函数.

(ii) $|V(t,\varphi_1,\psi_1)-V(t,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant L\{|\varphi_1-\varphi_2|+|\psi_1-\psi_2|\}$. 其中 $\varphi_i\in C_\eta,\psi_i\in C_\eta(i=1,2)$，$L$ 可依赖于 $\eta$.

(iii) $\dot{V}_{(4.3)}(t,\varphi,\psi)\leqslant -rV(t,\varphi,\psi)$.

再设 $f(t,\varphi)$，$D(t)\varphi$ 关于 $t$ 对 $\varphi\in C_\eta$ 是一致概周期的，(4.1)存在一个有界解 $x_t(\sigma,\varphi)$满足

$$|x_t|\leqslant\eta \qquad t\geqslant\sigma \tag{4.5}$$

则(4.1)存在唯一的渐近稳定的概周期解 $\hat{x}(t)$，$m(\hat{x})\subset m(f)\cap m(D)$，当 $f(t,\varphi)$，$D(t,\varphi)$是 $t$ 的周期为 $T$ 的周期函数时. (4.1)存在唯一的渐近稳定的周期解.

为了证明这个定理，需要引用第六章的一个估计式：∃ 正常数 $\alpha,\beta$ 使对∀ $h\in C(R_+,R^n)$，差分方程

$$D(t)y_t=h(t) \qquad t\geqslant\sigma \quad x_\sigma=\varphi \tag{4.6}$$

的解 $y(\sigma,\varphi,h)(t)$满足不等式

$$|y_t(\sigma,\varphi,h)|\leqslant e^{-\alpha(t-\sigma)}\beta|\varphi|+\beta\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant t}|h(u)| \tag{4.7}$$

现在给出定理 4.1 的证明：

设 $x_t(\sigma,\varphi)$是(4.1)的有界解，则 $S_0=cl\{x_t:t\leqslant\sigma\}$是紧集，设 $\{\tau_k\}$是实数序列 $\tau_k\to\infty(k\to\infty)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}f(t+\tau_k,\varphi)=f(t,\varphi)$$
$$\lim_{k\to\infty}D(t+\tau_k)\varphi=D(t)\varphi \tag{4.8}$$

对∀ $\epsilon>0$，取整数 $n(\epsilon)\geqslant0$ 满足

$$b(2\eta)e^{-r(\tau_k-\sigma)}<\frac{1}{2}a(\frac{\epsilon}{2\beta}) \quad k\geqslant n \tag{4.9}$$

$$2\beta\eta e^{-\alpha\tau_n}<\frac{1}{2}\epsilon,\ |f(t+\tau_k,\varphi)-f(t+\tau_l,\varphi)|<\frac{r}{2\beta l}a(\frac{\epsilon}{2\beta}),$$

$l,k\geqslant n,\varphi\in S_0$

现在考虑 $V(t,x_t,x_{t+\tau_k-\tau_l})$，$x_t,x_{t+\tau_k-\tau_l}$是方程组

$$\frac{dD(t)x_t}{dt}=f(t,x_t)$$
$$\frac{dD(t)x_t}{dt}=f(t+\tau_k-\tau_l,z_t) \tag{4.10}$$

的解，设 $x(t),y(t)$ 是(4.3)的解，$x(t),z(t)$ 是(4.10)的解. 由定理条件立即导出

$$V_{(4.10)}(t,\varphi,\psi)\leqslant -rV(t,x_{t+\tau_k-\tau_l})+\frac{r}{2}a(\frac{\varepsilon}{2\beta})$$

两边同乘 $e^{rt}$ 从 $\sigma$ 到 $t+\tau_k$ 积分得

$$V(t+\tau_l,x_{t+\tau_l},x_{t+\tau_k})\leqslant a(\frac{\varepsilon}{2\beta}). \qquad t\geqslant\sigma$$

由条件(i)和(4.7)可得

$$|x_{t+\tau_l}-x_{t+\tau_k}|<\varepsilon,t\geqslant 0,l,k\geqslant n(\varepsilon)$$

即 $\{x(t+\tau_k)\}$ 在 $R_+$ 上一致收敛 $\Rightarrow x(t)$ 是渐近概周期函数，$x(t)=p(t)+q(t)$，$p(t)$ 是概周期函数，$q(t)\to 0,t\to\infty$，$\{p(t+\tau_k)\}$ 在 $R_+$ 上一致收敛于 $\hat{x}(t)$，$\hat{x}(t)$ 是概周期函数.

再由(4.1)的等价积分方程

$$D(t)x_t=D(\sigma)x_\sigma+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds$$

用 Lebesque 控制收敛定理可证得

$$D(t)\hat{x}_t=D(0)x_0+\int_\sigma^t f(s,\hat{x}_s)ds$$

即 $\hat{x}(t)$ 是 4.1 的一个概周期解.

由引理 4.1 和定理 4.1 推知

**定理** 4.2　设 $f(t,\varphi),D(t)\varphi$ 关于 $t$ 对 $\varphi\in C_H$ 是一致概周期的，且满足

(i)(4.1)关于 $(H^*,H)$ 一致渐近稳定.

(ii) $|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|,\varphi,\psi\in C_H$.

(iii)(4.1)存在一个有界解满足

$$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant H,t\geqslant\sigma\geqslant 0.$$

则(4.1)存在唯一的一致渐近稳定的概周期解 $\hat{x}(t)$, $m(\hat{x})\subset m(f)\cap m(D)$.

# 第十一章

# 无穷时滞 FDE

本章给出无穷时滞的有关概念和公理体系，并由此建立基本理论，研究解的各种性态.

## §1 问题的提出

有界滞量 FDE 中我们总是假定 $0\leqslant r(t)\leqslant r=\text{const}$. 这里 $r(t)$ 在离散滞量的情形即偏差 $\tau(t)$. 如

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)))\tag{1.1}$$

在分布滞量的情形即积分限之一的 $\sigma(t)$，如

$$\dot{x}(t)=\int_0^{\sigma(t)}g(t,x(t),x(t-s))ds\tag{1.2}$$

对于更普遍的情形，$r(t)$的含义已在第一章中系统指出过，由此建立的 Banach 空间 $C([-r,0],R^n)$作为初始数据空间，从而确立了第四章那样完整的理论体系，回顾一下有下列三种情形是不能概括到有界滞量 FDE 中去的，即

(1)$\tau(t)$或 $\sigma(t)$是无界的连续函数.

(2)$\sigma(t)=\infty$.

(3)$\dot{x}(t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i x_i(t-\tau_i)\quad \tau_i\to\infty,i\to\infty$.

如果我们作如下的形式推广：方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1.3}$$

中，$\dot{x}$ 表示右导数，$x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in R_-=(-\infty,0]$，并把初值问题也写成

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x_t)\\ x_t=\varphi,t\in R_-\end{cases} \tag{1.4}$$

则初始数据空间取为$C=C(R_-,R^n)$，那末看来推广已经完毕，而事实不然，$\varphi\in C(R_-,R^n)$的确可以包含(1)(2)(3)三种情形，但$C(R_-,R^n)$不是一个 Banach 空间，我们将失去应有的代数和拓扑结构. 例如仍取 C 的范数为$|\cdot|$如下：

$$|\varphi|=\sup_{s\in R_-}|\varphi(t+s)|,\varphi\in C \tag{1.5}$$

则根本无法讨论解的渐近稳定性，因为(1.4)的任何非 0 解关于这个范数必有

$$|x_t|=\sup_{s\in R_-}|x(t+s)|>0，当\ t\to\infty 时$$

即 $x$ 必不趋于 0. 所以无穷时滞 FDE 的全部基础和依据是如何选择初始数据空间？换言之，在C 上附加什么样的公理限制，以便能把有限时滞的系统理论予以推广？

对于无穷时滞 FDE 的三种具体形式(1)(2)(3)，在建立统一的初始数据空间之前，早已用经典分析的方法研究各种指定的具体方程，例如对具无穷积分限的 Volterra 型积分微分方程，对无界滞量 $\tau(t)$的方程都有大量研究工作，本章的目的在于建立类似第四章的普遍理论，而不在于具体介绍各种方程的个别结果.

最后，我们要指出一个极为重要的事实：从第一章的基本概念分析中可以看到，任何有界滞量 $\tau(t)$决定的初始集 $E_{t_0}=\{t-\tau(t):t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$必含在固定长度的区间$[t_0-r,t_0]$之中，补充定义后可设初始函数定义在$[t_0-r,t_0]$上，而不影响解的存在唯一性，如果再补充定义

$$\varphi(t)=\varphi(t_0-r),t\in(-\infty,t_0-r]$$

则这个 $\varphi$ 所确定的解与原先定义在 $[t_0-r,t_0]$ 上的 $\varphi$ 所确定的解完全一样，换言之，只要补充定义初始函数的定义域使之为 $(-\infty,t_0]$，一切有界滞量问题都可归入无穷时滞问题，从这个意义上说，无穷时滞 FDE 所有结果应当含有有界时滞的相应结果，倘若我们有了完整满意的无穷时滞 FDE 的理论体系，有界时滞的现有理论便只是一种特例，只起导引作用. 但事实不然，无穷时滞 FDE 并没有得到所期望的系统完整的结果，而且若用它代替有界时滞的现有理论，势必大大复杂化，结果也粗糙得多，是完全不可取的，况且从应用背景来看，有界滞量 FDE 理论做为主体是自然的，合理的.

在上述一般性回顾之后，现在我们要用各种不同的方式来确定初始数据空间——在 $C(R_-,R^n)$ 上附加公理条件，暂且把所要确定的空间记为 $B$，不仅 $\varphi\in B$，而且 $x_t\in B$，所以 $B$ 也称为状态空间或者相空间，(1.3)中 $f(t,\varphi):R\times B\to R^n$.

$B$ 空间的公理(1978 年由 J. Hale 与 J. Kato 提出的[382]).

设 $\hat{B}$ 是 $R_-\to R^n$ 的连续函数全体，$\hat{B}$ 是一个实线性向量空间，其元记为 $\hat{\varphi},\hat{\psi}\cdots\cdots$

$$\hat{\varphi}=\hat{\psi}\Leftrightarrow\hat{\varphi}(t)=\hat{\psi}(t),t\in R_-$$

我们所说的对 $B$ 附加条件限制或公理表示成：

设 $\hat{B}$ 中给定一个拟范数 $|\cdot|_B$(有时称为半模)

并且设

$$B=\hat{B}/|\cdot|_B \tag{1.6}$$

是一个 Banach 空间，$B$ 的范数 $|\cdot|_B$ 由 $|\cdot|_B$ 导出. $B$ 中元用 $\varphi,\psi\cdots\cdots$ 等表示，它们对应于 $\hat{B}$ 中由范数 $|\cdot|_B$ 确定的等价类. 对 $\forall\varphi\in B$，与之对应的等价类中相应的元记为 $\hat{\varphi}$，并且在 $B$ 中 $\varphi=\psi\Leftrightarrow|\hat{\varphi}-\hat{\psi}|_B=0$ 对一切 $\hat{\varphi}\in\varphi,\hat{\psi}\in\psi$ 成立.

对 $\beta>0,\hat{\varphi}\in\hat{B}$，记 $\hat{\varphi}^\beta$ 是 $\hat{\varphi}$ 在 $(-\infty,-\beta]$ 上的限制，在 $B$ 中定义拟范数 $|\cdot|_\beta$ 如下

$$|\varphi|_\beta=\inf_{\eta\in B}\{\inf_{\hat{\varphi}\in\hat{B}}[|\hat{\psi}|_B:\hat{\psi}^\beta=\hat{\eta}^\beta]:\eta=\varphi\} \tag{1.7}$$

因此 $|\varphi|_\beta \leqslant |\varphi|_B$，且 $\{\varphi\in B: |\varphi|_\beta=0\}$ 是 $B$ 的一个闭子空间，因此

$$B^\beta = B/|\cdot|_\beta \tag{1.8}$$

是一个 Banach 空间，它的范数仍由拟范数 $|\cdot|_\beta$ 导出，为方便计，仍记为 $|\cdot|_\beta$. 若

$$\{\varphi\}_\beta = \{\psi\in B: |\varphi-\psi|_\beta = 0\} \tag{1.9}$$

是 $B^\beta$ 的代表元，则当 $\hat{\psi}^\beta=\hat{\varphi}^\beta$ 时，$\psi\in\{\varphi\}_\beta$.

记 $(-\infty, a]=R_-^a$，$[b,+\infty)=R_+^b$，则

对于定义在 $R_-^a$ 上取值于 $R^n$ 的函数 $\hat{x}$，当 $t\in R_-^a$ 时，设 $\hat{x}_t$ 定义为

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t(\theta) = \hat{x}(t+\theta), \theta\in R_-$$

给定一个 $A>0$ 和 $\hat{\varphi}\in\hat{B}$，设

$$F_A(\varphi) = \{\hat{x}: R_-^A \to R^n, \hat{x}_0=\varphi, \hat{x}(t)\text{在}[0,A]\text{上连续}\}$$

$$F_A = \bigcup\{F_A(\hat{\varphi}): \hat{\varphi}\in\hat{B}\} \tag{1.10}$$

现在给出 $(\alpha)$ 公理：

$(\alpha_1)$ 对 $\forall\ \hat{x}\in F_A$，$\forall\ t\in[0,A]\Rightarrow\hat{x}_t\in\hat{B}$.

$(\alpha_2)$ 若 $B$ 中两元相等：$\varphi=\psi$，则对 $\forall\ \beta>0$ 有 $|\eta-\xi|_\beta=0$，其中 $\hat{\eta}\in\hat{\tau}^\beta\hat{\varphi}$，$\hat{\xi}\in\hat{\tau}^\beta\hat{\psi}$.

$(\alpha_3)$ 对 $\forall\ \beta\geqslant 0$，$|\varphi|_B\leqslant|\varphi|_{(\beta)}+|\varphi|_\beta$.

$(\alpha_4)$ 对 $\forall\ \varphi\in B$ 及某一个 $K$，$|\varphi(0)|\leqslant K|\varphi|_B$.

$(\alpha_4)'$ 对 $\forall\ \hat{\varphi}\in\hat{B}$ 及某一常数 $K$，$\{\hat{\varphi}(0)\}\leqslant K\{\hat{\varphi}\}_B$.

对这些公理的含义与记号一一注释如下：

(i) 对 $(\alpha_1)$，记 $x_t$ 为 $B$ 中对应于 $\hat{x}_t$ 的元，在公理 $(\alpha_1)$ 之下，对 $\forall\ \beta\geqslant 0$ 和 $\hat{\varphi}\in\hat{B}$ 可能找到 $\hat{\psi}\in\hat{B}$ 使得

$$\hat{\psi}(\theta) = \hat{\varphi}(\theta+\beta), \theta\in R_-^{-\beta}.$$

设 $\hat{\tau}^\beta$ 是 $\hat{B}$ 到 $\hat{B}^\beta$ 的线性算子

$$\hat{B}^\beta = \{[\hat{\psi}\in\hat{B}: \hat{\psi}^\beta=\hat{\varphi}^\beta]: \hat{\varphi}\in\hat{B}\} \tag{1.11}$$

使得当且仅当 $\hat{\psi}(\theta)=\hat{\varphi}(\theta+\beta)$，$\theta\in R_-^{-\beta}$ 时，$\hat{\psi}\in\hat{\tau}^\beta\hat{\varphi}$.

(ii) 对 $(\alpha_2)$，在这个公理之下才有可能定义线性算子 $\tau^\beta: B\to$

$B^{\beta}$. 即对使得 $\hat{\psi}\in\tau^{\beta}\hat{\varphi}$ 的 $\psi\in B$，令

$$\tau^{\beta}\varphi=\{\psi\}_{\beta} \tag{1.12}$$

(iii)对($\alpha_3$)，先解释记号 $|\varphi|_{(\beta)}$：用 $|\cdot|_{\beta}$ 类似的办法在 $B$ 中引入拟范数 $|\varphi|_{(\beta)}$ 如下：

$$|\varphi|_{(\beta)}=\inf_{\eta\in\hat{B}}\{\inf_{\hat{\psi}\in\hat{B}}[|\hat{\psi}|_{\hat{B}}:\hat{\psi}(\theta)\hat{\eta}(\theta),\theta\in[-\beta,0]]:\eta=\varphi\} \tag{1.13}$$

由这一公理看到，若 $x_0=y_0$ 且当 $t\in[0,A]$ 时 $\hat{x}(t)=\hat{y}(t)$，则 $x_t=y_t$. 于是可以考虑 $x\in F_A(\varphi)$ 以代替 $\hat{x}\in F_A(\hat{\varphi})$，为此须设 $\varphi=\psi$ 时 $\hat{\varphi}(0)=\psi(0)$. 所以要引进公理($\alpha_4$)$'$.

(iv)对($\alpha_4$)$'$，这表明对每个 $\hat{\psi}$，当 $\psi=\varphi$ 时，$\hat{\psi}(0)$ 都相等，因而可用 $\varphi(0)$ 表示. 而($\alpha_4$)是($\alpha_4$)$'$的等价形式.

($\alpha_1$)($\alpha_2$)($\alpha_3$)($\alpha_4$)是空间 $B$ 的基本公理. 下面简称“($\alpha$)公理”，并假定它总是满足的. 在($\alpha$)公理之下，$B$ 中的元与 $\hat{B}$ 中的元都可用 $\varphi$ 表示而不致混淆，对空间 $\hat{B}$ 也略去“ ˆ ”，而写成 $B$，除非我们事先申明. 在($\alpha$)公理之下，我们对无穷时滞 RFDE($f$)(1.3)给以严格的定义.

在有限时滞 RFDE($f$)定义中空间 $C$ 改为满足($\alpha$)公理的空间 $B$. 设$\Omega$为 $R\times B$ 中的一个开集. $f:\Omega\to R^n$ 是给定的连续算子，则式(1.3)叫做$\Omega$是的滞后型无穷时滞泛函微分方程，也简写成 RFDE($f$)或 RFDE($f,\Omega$).

**定义 1.1** 所谓 RFDE($f$)(1.3)在区间 $I\subset R$ 上的解，是指函数 $x:\bigcup\{R_-^t;t\in I\}\to R^n$，使得对于 $t\in I$，$(t,x_t)\in\Omega$，$x(t)$是连续可微的，且在 $I$ 上满足(1.3). (记号 $R_-^t=(-\infty,t]$，下同)

**定义 1.2** 对给定的$(\sigma,\varphi)\in\Omega$，若存在一个 $A>0$，使得 $x(t,\sigma,\varphi)$在$[\sigma,A]$上是(1.3)的一个解，且

$$x_{\sigma}(\sigma,\varphi)=\varphi \tag{1.14}$$

则说 $x(t,\sigma,\varphi)$是(1.3)过$(\sigma,\varphi)$的一个解.

由公理$(\alpha_4)$，$x(\sigma,\sigma,\varphi)=\varphi(0)$是$R^n$中的一个确定的值.

用这种方式定义相空间有三个问题：

第一，$(\alpha)$公理是否足以保证可以把有界滞量 FDE 的理论推广到无穷时滞 FDE 上去？

第二，是否可以建立这种满足$(\alpha)$公理的空间？

第三，是否有构成所需的相空间的其他方式？

对于第一个问题，回答是否定的. 即使是为了建立无穷时滞 FDE 的基本理论，也要做进一步的公理假定（$(\beta)$公理）.

对于第二个问题，回答是肯定的，例如

**例 1** 可积函数空间满足$(\alpha)$公理.

设$g:R_-\to R$是一个非负的局部可积函数，且本性上确界范数意义下满足

$$\text{ess}\cdot\sup\{g(s);t\leqslant s\leqslant 0\}<\infty \qquad t<0 \tag{1.15}$$

且满足

$$g(t+s)\leqslant G(t)g(s),\text{对}\forall\ t\in R_-,s\in R_--N_t \tag{1.16}$$

其中$N_t$是$R_-$中某一测度为零的集合，$G$是$R_-$上的非负函数.

在上述假定下，对$\forall\ r<\sup\left\{\frac{1}{s}\log G(s);s<0\right\}$，存在常数$C(r)$使得

$$g(t)\leqslant C(r)e^{rt},t\leqslant 0\text{ 时几乎处处成立} \tag{1.17}$$

事实上，可选取$s=s_r<0$，使$\log G(s_r)/s_r\geqslant r$，亦即$G(s_r)\leqslant \exp s_r\cdot r$. 设$N^r$是$R_-$中使得对某一个整数$k$成立$t-ks_r\in N_{s_r}$的集合，且测度$mN^r=0$.

$$N^r=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{t;t-ks_r\in N_{s_r},t\in R_-\}$$

$$\forall\ t\in R_-,\exists\ m\geqslant 0,\text{使 }s_r\leqslant t-ms_r\leqslant 0$$

故当$t-ms_r$时，有

$$g(t)=g(t+s_r-s_r)\leqslant G(s_r)g(t-s_r)\leqslant\cdots\cdots$$
$$\leqslant G(s_r)^m g(t-ms_r)$$

$$\leqslant e^{ms_r \cdot r} g(t-ms_r) = g(t-ms_r) e^{ms_r \cdot r - rt} e^{rt}$$

$$= g(t-ms_r) e^{r(ms_r - t)} e^{rt} \quad t \in R_- - N^r$$

再取

$$C(r) = \underset{s_r \leqslant t-ms_r \leqslant 0}{\text{ess.sup}}\, g(t-ms_r) e^{-r(t-ms_r)}$$

$$= \underset{s_r \leqslant s \leqslant 0}{\text{ess.sup}}\, g(s) e^{-rs}$$

$$= \begin{cases} \underset{s_r \leqslant s \leqslant 0}{\text{ess.sup}}\, g(s) e^{-rs_r} \text{或} \\ \underset{s_r \leqslant s \leqslant 0}{\text{ess.sup}}\, g(s), r > 0 \end{cases}$$

于是(1.17)成立.

我们注意到若取

$$G(s) = \text{ess.sup}\, \frac{g(s+t)}{g(t)} \tag{1.18}$$

则 $G$ 自身适合(1.16);对$\forall\, t, s \in R_-$,有

$$G(t+s) = \underset{t \in R_-}{\text{ess.sup}}\, g(t+s-\tau)/g(\tau)$$

$$\leqslant \underset{t \in R_-}{\text{ess.sup}} \frac{G(t) g(s+\tau)}{g(\tau)} = G(t) G(s)$$

即 $G$ 亦满足(1.17),即当

$$r < \sup_{s \leqslant 0} \frac{1}{s} \log \underset{t \leqslant 0}{\text{ess.sup}} \frac{g(t+s)}{g(t)}$$

时有

$$\underset{t \leqslant 0}{\text{ess.sup}} \frac{g(t+s)}{g(t)} \leqslant C(r) e^{rs}$$

这样选择 $G$,ess. sup$\{G(s): 0 \geqslant s \geqslant s_r\}$的有界性作为假设.事实上可以由[4]中推导得.

现在设 $\hat{B} = \{\hat{\varphi}: R_- \to R^n$,可测且$|\hat{\varphi}|_B < \infty\}$,其中

$$|\hat{\varphi}|_B = |\hat{\varphi}(0)| + \int_{-\infty}^{0} g(\theta) |\hat{\varphi}(\theta)| d\theta \tag{1.19}$$

对应的 $B$ 空间是一个 Banach 空间,它满足公理$(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)(\alpha_4)$,因为

(1)设 $\hat{x}\in F_A, A>0$，则 $\hat{x}_0\in\hat{B}$ 且当 $t\in[0,A]$ 时 $\hat{x}_t(\theta)$ 关于 $\theta$ 可测，且

$$|\hat{x}_t|_B=|\hat{x}_t(0)|+\int_{-\infty}^{0}g(\theta)|\hat{x}_t(\theta)|d\theta$$

$$=|\hat{x}(t)|+\int_{-\infty}^{-t}g(\theta)|\hat{x}(t+\theta)|d\theta+\int_{-t}^{0}g(\theta)|\hat{x}(t+\theta)|d\theta$$

$$=|\hat{x}(t)|+\int_{-\infty}^{0}g(\theta-t)|\hat{x}_0(\theta)|d\theta+\int_{-t}^{0}g(\theta)|\hat{x}(t+\theta)|d\theta$$

$$\leqslant|\hat{x}(t)|+G(-t)|\hat{x}_0(\theta)|_B+\sup\int_{-t}^{0}g(\theta)d\theta<\infty.$$

由此推出 $\hat{x}_t\in\hat{B}$. $(\alpha_1)$成立.

(2)由于 $K=1$ 时，$|\hat{\varphi}(0)=|\hat{\varphi}|_B-\int_{-\infty}^{0}g(\theta)|\hat{x}_t(\theta)|d\theta\leqslant|\hat{\varphi}|_B\Rightarrow$ $(\alpha_4)$成立.

(3)由于 $\varphi=\psi\Leftrightarrow\hat{\varphi}(\theta)=\hat{\psi}(\theta),\theta\in\{\theta:g(\theta)>0\}$，故若 $\hat{\eta}\in\hat{\tau}^{\beta}\hat{\varphi},\hat{\xi}\in\hat{\tau}^{\beta}\hat{\psi}$ 有 $\hat{\xi}(\theta)=\hat{\eta}(\theta)$, a.e. $\theta\in R_-^{-\beta}\cap\{\theta:g(\theta)>0\}$. 由一个函数在 $R_-^{-\beta}$ 上等于 $\hat{\eta}-\hat{\xi}$，在$(-\beta,0]$上等于 0 时仍是可积的，故 $|\eta-\xi|_\beta=0\Rightarrow(\alpha_2)$成立.

(4)令

$$\hat{\psi}(\theta)=\begin{cases}\hat{\varphi}(\theta) & \theta\leqslant-\beta\\ 0 & -\beta\leqslant\theta\leqslant0\end{cases}$$

$$\hat{\eta}(\theta)=\begin{cases}0 & \theta\leqslant-\beta\\ \hat{\varphi}(\theta) & -\beta\leqslant\theta\leqslant0\end{cases}$$

$\hat{\varphi}\in\hat{B}\Rightarrow\hat{\psi}\in\hat{B},\hat{\eta}\in\hat{B}$. 故

$$|\varphi|_\beta=|\hat{\psi}|_B,\ |\varphi|_\beta=|\hat{\eta}|_B$$

由此得 $|\varphi|_B\leqslant|\varphi|_\beta+|\varphi|_{(\beta)}.\Rightarrow(\alpha_3)$成立.

**例 2** 设 $\hat{B}=\{\hat{\varphi}:R_-\to R^n$，在 $R_-^{-r}$ 上可测，在$[-r,0]$上连续，$|\hat{\varphi}|_B<\infty\}$，其中 $r\geqslant0$，又设

$$|\hat{\varphi}|_B=\left\{\sup_{\theta\in[-r,0]}|\hat{\varphi}(\theta)|^p+\int_{-\infty}^{0}g(\theta)|\hat{\varphi}(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}.$$

$1 \leqslant p < \infty$.

其中 $g: R_- \to R$ 如例 1 所给定，则可以验证($\alpha$)公理满足.

第三个问题的回答是肯定的，换句话说，确有许多作者给出不同的 $B$ 的范数和不同的公理系统，得到了不同的相空间，如 Sawano 在[388]中建立了 $B$ 空间和公理 $B_1 \sim B_4$，以及[197]中提出的 $C_g$, $C_h$ 等等，为了方便今后把相空间及其范数合记为 $(C, |\cdot|)$ 例如 $(C_h, |\cdot|_h)$. 其定义如下：

$x \in R^n$, $|x|$ 是通常的 $R^n$ 的模. 例如 $|x| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$，设 $x(t)$: $[a, b] \to R^n$，我们再定范数

$$|x|^{[a,b]} = \sup\{|x(s)|: a \leqslant s \leqslant b\} \tag{1.20}$$

$C$ 是 $R_- \to R^n$ 的连续函数全体. 设 $h \in C(R_-, R_+)$, $h(s) > 0$, $l = \int_{-\infty}^{0} h(s) ds < \infty$，则集

$$C_h = \left\{ \varphi \in C: \int_{-\infty}^{0} h(s) |\varphi|^{[s,0]} ds < \infty \right\} \tag{1.21}$$

是一个线性空间，在其中定义范数

$$|\varphi|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s) |\varphi|^{[s,0]} ds$$

为简单计仍用 $C_h$ 记 $(C_h, |\cdot|_h)$ 而不致混淆.

可以指出 $C_h$ 有以下几点性质：

(1) 对 $\forall\ \varepsilon > 0$, $k > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon, k) > 0$，使得对 $\forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in C_h$，当 $|\varphi_1 - \varphi_2|_h \leqslant \delta$ 时满足 $|\varphi_1 - \varphi_2|^{[-k,0]} < \varepsilon$.

(2) 令 $\varphi_0 \in C_h$，序列 $\varphi_n \in C_h$, $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ 关于 $|\varphi|^R$ 是一致有界的，则 $\lim\limits_{n \to \infty} |\varphi_n - \varphi_0|_h = 0$ 的充要条件是对任何整数 $k$ 成立

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n - \varphi_0|^{[-k,0]} = 0$$

(3) $C_h$ 是一个 Banach 空间.

(4) $C_h$ 满足 Sawano 对空间 $B$ 的公理 $B_1 \sim B_4$[388].

## §2 无穷时滞 RFDE($f$)的基本理论

要建立 $B$ 空间中无穷时滞 FDE 的基本理论，光有($\alpha$)公理还不够，还要增加新的假定，即($\beta$)公理：

($\beta_1$)对 $\beta \geqslant 0$，存在连续函数 $k_1(\beta)$，使得

$$|\varphi|_{(\beta)} \leqslant k_1(\beta)|\varphi|_{[-\beta,0]} \tag{2.1}$$

其中 $|\varphi|_{[-\beta,0]}$ 有时记为 $|\varphi|^{[-\beta,0]}$，定义为

$$|\varphi|_{[-\beta,0]} = \inf_{\psi \in B}\left\{\sup_{-\beta \leqslant \theta \leqslant 0}|\hat{\psi}(\theta)|; \psi = \varphi\right\}$$

($\beta_2$)对 $\beta \geqslant 0$，$\tau^\beta$ 是有界线性算子，其范数

$$M_1(\beta) = \sup_{|\varphi|_B = 1}|\tau^\beta \varphi|_\beta$$

是局部有界的，即对任何 $\beta \geqslant 0$，存在 $\beta$ 的一个邻域 $U$，使得

$$\sup_{t \in U \cap R_+} M_1(t) < \infty$$

($\beta_3$)若 $x \in F_A$，$A > 0$，则 $x_t$ 关于 $t$ 在$[0,A]$上是连续的.

设函数 $x: R_-^A \to R^n$ 满足当 $\sigma \in R_-^A$ 时 $x_\sigma \in B$，且 $x(t)$ 在$[\sigma,A)$上连续，则可得不等式

$$|x_t|_B \leqslant k_1(t-\sigma)\sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t}|x(s)| + M_1(t-\sigma)|x_\sigma|_B,$$
$$t \in [\sigma, A] \tag{2.2}$$

事实上，由公理($\alpha_3$)及($\beta_1$)($\beta_2$)可得

$$|x_t|_B \leqslant |x_t|_{(\beta)} + |x_t|_\beta \leqslant k_1(\beta)|x_t|_{[-\beta,0]} + |\tau^\beta x_{t-\beta}|_\beta$$

令 $\beta = t - \sigma$ 便得(2.2).

**引理** 2.1　设($\beta_1$)($\beta_2$)($\beta_3$)成立，再令

$F_A^l(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma}\{x \in F_A(\varphi): x(t)$在$[0,A]$上是 Lipschitz 型的$\}$，若 $\Gamma \subset B$ 为紧的，且 $A < \infty$，则集合

$$\Gamma_0 = \{x_t: t \in [0,A], x \in F_A^l(\Gamma)\}$$

是紧的，且当 $x\in F_A^l(\Gamma)$ 时，$x_t$ 关于 $t$ 是等度连续的.

**证** 任选序列 $\{x_{t_k}^k: t_k\in[0,A], x^k\in F_A^l(\Gamma)\}$，可设 $t^k\to\sigma\in[0,A]$，$x_0^k\to\varphi\in\Gamma$，$x^k(t)\to x^0(t)$ 在 $[0,A]$ 上一致地成立，因为 $x_0^k\in\Gamma$，而 $\Gamma$ 是紧的，又 $x^k(t)$ 在 $[0,A]$ 上是 Lipschitz 型的，由 $(\alpha_4)\Rightarrow x^k(0)\to\varphi(0)=x^0(0)$ 以及 $x^k(t)$ 在 $[0,A]$ 上是一致有界的，现在定义

$$x(t)=\begin{cases}x^0(t) & t>0\\ \varphi(t) & t\leqslant 0\end{cases}$$

则 $x\in\Gamma_A^k(\Gamma)$. 于是对 $x^k-x$ 用不等式(2.2)得

$$|x_t^k-x_t|\leqslant k_1(t)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^0(s)|+M_1(t)|x_0^k-\varphi|_B.$$

因此对给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\ N_1$，使当 $k\geqslant N_1$ 时有

$$|x_t^k-x_t|<\frac{\varepsilon}{2}, t\in[0,A]$$

另一方面由于 $x_t$ 在 $[0,A]$ 上连续 $\Rightarrow\exists\ \delta>0$，使得当 $|t-s|<\delta$ 时有

$$|x_t-x_s|<\frac{\varepsilon}{2},\quad t,s\in[0,A]$$

故可取 $N_2$ 使得当 $k\geqslant N_2$ 时，$|t_k-t_0|<\delta$，于是有

$$|x_{t_k}^k-x_\sigma|_B\leqslant|x_{t_k}^k-x_{t_k}|_B+|x_{t_k}-x_\sigma|_B<\varepsilon$$

当 $k\geqslant\max\{N_1,N_2\}$ 时成立，引理第一部分得证.

其次，考虑函数 $(\varphi)\in F_\infty(\varphi)$

$$(\varphi)(t)=\varphi(0)\quad t\geqslant 0 \tag{2.3}$$

由不等式(2.2)得

$$|(\varphi)_t-(\psi)_t|_B\leqslant k_1(t)|\varphi(0)-\psi(0)|+M_1(t)|\varphi-\psi|_B$$

即 $(\varphi)_t$ 关于 $\varphi$ 是 Lipschitz 型的，由 $(\beta_3)\Rightarrow(\varphi)_t$ 关于 $t$ 是连续的 $\Rightarrow(\varphi)_t$ 关于 $(t,\varphi)$ 是连续的 $\Rightarrow$ 对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $\varphi\in\Gamma_0$，$A\geqslant t,s\geqslant 0$，$|t-s|<\delta(\varepsilon)$ 时，$|(\varphi)_t-(\varphi)_s|_B<\varepsilon$(因 $\Gamma_0$ 是紧的)，从而当 $s\leqslant t<s+\delta(\varepsilon)$ 时，有

$$|x_t-x_s|_B\leqslant|(t_s)_{t-s}-x_t|_B+|x_t-(x_s)_{t-s}|_B$$

$$\leqslant \varepsilon + k_1(t-s)\sup_{s\leqslant r\leqslant t}|x(r)-x(s)|$$
$$\leqslant \varepsilon + k_1(t-s)L|t-s|$$

这表明 $x_t$ 关于 $t$ 等度连续，其中 $L$ 是 Lipschitz 常数.

**引理** 2.2 $(\beta_3)$保证了无穷时滞 RFDE($f$)的初值问题(1.4)等价于下述积分方程的初值问题

$$\begin{cases} x(t)=\varphi(\varphi)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds, & t\geqslant\sigma \\ x_\sigma=\varphi \end{cases} \tag{2.4}$$

**引理** 2.3 设$(\beta_3)$成立，$x^k(t)$是无穷时滞 RFDE($f_k$)

$$\dot{x}(t)=f_k(t,x_t) \tag{2.5}$$

在$[0,A]$上的一个解，又设$\exists\ x\in F_A$使得在$[0,A]$上有$x^k(t)\to x(t)$，$x_t^k\to x_t$(当 $k\to\infty$时)，并且当 $k\to\infty$时，有 $f_k(t,\varphi)\to f(t,\varphi)$在$\Omega_0\subset\Omega$上一致成立，这里$\Omega_0$ 满足

$$\Omega_0\supseteq\{(t,x_t^k):t\in[0,A],k\geqslant 1\}$$

则 $x(t)$是(1.3)在$[0,A]$上的一个解.

现在可以把第四章的有关定理逐一予以推广，我们将证明其中的一部分. 其他定理的证明可参看 J. Hale 与 J. Kato 原始论文[382].

**定理** 2.1 设$(\beta_1)(\beta_3)$成立，则无穷时滞 RFDE($f,\Omega$)过$(\sigma,\varphi)\in\Omega$的解存在.

**证** 与第四章相应的存在定理证明类似，主要做法是：设$(\varphi)\in F_\infty(\varphi)$是(2.3)所定义的函数，由$(\beta_3)\Rightarrow(\varphi)_t$，当 $t\geqslant 0$ 时是 $t$ 的连续函数，显然，若 $x$ 是(1.3)过$(\sigma,\varphi)$的解，其充要条件是 $y$ 满足

$$\begin{aligned} &y(t)=\int_0^t f(s+\sigma,(\varphi)_s+y_s)ds, t\in[0,A] \\ &y_0=0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $y$ 定义为 $y(t)=x(t+\sigma)-(\varphi)(t)$

对$\forall\ \delta>0,\eta>0$，设

$A(\delta,\eta)=\{\xi:(-\infty,\delta]\to R^n$ 连续，当 $t\leqslant 0$ 时 $\xi(t)=0$，当 $t\in[0,\delta]$时 $|\xi(t)|\leqslant\eta\}$，则 $A(\delta,\eta)$是 Banach 空间 $C^0((-\infty,\delta],R^n)$中的有界闭凸集($C^0((-\infty,\delta],R^n)$是$(-\infty,\delta]$上有界连续函数全体)．对$\forall\ \xi\in A(\delta,\eta)$，$(\beta_3)\Rightarrow\xi_t$ 关于 $t$ 在$[0,A]$上连续．再设 $U$ 是 $B$ 中元素 $\varphi$ 的邻域，取定 $\delta_0>0$，对$\forall\ \varepsilon>0$，由$(\beta_1)\Rightarrow\exists\ \eta_0>0$，使得当 $t\in[0,\delta_0]$，$\xi\in A(\delta_0,\eta_0)$时 $|\xi_t|_B<\varepsilon$，因此可设 $\delta_0,\eta_0$ 足够小，使得 $t\in[0,\delta_0]$，$\xi\in A(\delta_0,\eta_0)$时有 $\varphi+\xi_t\in U$．

现在在 $A(\delta,\eta)$上定义算子 $T$ 如下：

$$[T\xi](t)=\begin{cases}\int_0^t f(\sigma+s,(\varphi)_s+\xi_s)ds, & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad(2.7)$$

其中 $\xi\in A(\delta,\eta)$．由于 $f$ 连续，$(\varphi)_t$ 关于 $t$ 连续，故由上述论证可得，当 $0<\delta<\delta_0$，$0<\eta<\eta_0$，$\xi\in A(\delta,\eta)$时，函数 $T\xi\in C^0((-\infty,\delta],R^n)$．

下面完全类似于第四章存在性定理的证明，可以得到：

存在正数 $\delta$ 和 $\eta$，使 $TA(\delta,\eta)\subset A(\delta,\eta)$．

$T$ 为紧算子．

$T$ 连续($(\beta_1)$保证)．

最后由 Schauder 不动点定理$\Rightarrow T$ 在 $A(\delta,\eta)$上有不动点 $y$，它满足(2.6)，再由 $x$ 与 $y$ 的关系$\Rightarrow$函数 $x$ 在$(-\infty,\sigma+A]$上满足

$$x(t)=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds\qquad t\in[\sigma,\sigma+A]$$

$$x_\sigma=\varphi$$

即(1.3)存在过$(\sigma,\varphi)$的解．

**定理** 2.2　设$(\beta_1)(\beta_3)$成立，$f$ 是局部 Lipschitz 型的，亦即$\exists$常数 $L$，使得对$\forall\ (t,\varphi),(t,\psi)\in\Omega$时有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_B\qquad(2.8)$$

则存在连续函数 $L(t)$使得

$$|x_t(\sigma,\varphi)-x_t(\sigma,\psi)|_B\leqslant L(t-\sigma)|\varphi-\psi|_B\qquad t\geqslant\sigma\quad(2.9)$$

(2.9)可直接推得解的唯一性.

**证** 设 $u(t)=|x_t(\sigma,\varphi)-x_t(\sigma,\psi)|_B$，则由(2.2)(2.3)及引理2.2可以得出

$$u(t)\leqslant k_1(t-\sigma)\left\{|\varphi(0)-\psi(0)|+\int_\sigma^t Lu(s)ds\right\}$$
$$+M_1(t-\sigma)|\varphi-\psi|_B$$

再由公理$(\alpha_4)$得

$$u(t)\leqslant\{k_1(t-\sigma)k+M_1(t-\sigma)\}|\varphi-\psi|_B+k_1(t-\sigma)L\int_\sigma^t u(s)ds$$

用 Gronwall 不等式⇒定理结论成立.

**定理** 2.3 设$(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3)$成立，$x$ 为无穷时滞 RFDE$(f,\Omega)$(1.3)在$[\sigma,\delta)$上的不可延拓解，则对$\Omega$中的任一紧集 $W$，$\exists\ t_w\in[\sigma,\delta]$，使得当 $t_w\leqslant t<\delta$ 时$(t,x_t)\notin W$.

**证** 用反证法，设对某一紧集 $W\subset\Omega$定理结论不成立，则$\exists$序列$\{t_k\}$，$t_k\to\delta^-$，使得$(t_k,x_{t_k})\in W$，由于 $W$ 是紧的，故不妨设$(t_k,x_{t_k})$收敛于$(\delta,\varphi)$. $W$ 的紧性也保证$\exists\ \varepsilon_0>0$ 及 $L$ 使得当$(s,\psi)$落在 $W$ 的 $\varepsilon_0$—邻域 $U$ 中，$U\subset\Omega$，则$|f(s,\psi)|<L$.

若可证 $t\to\delta^-$时 $x_t\to\varphi$，则 $x(t)$可向右方延拓而越过$\delta$.这与不可延拓的假定不合，定理得证. 为此，设 $t\to\delta^-$时 $x_t\not\to\varphi$，⇒存在序列$\{t'_k\}$，使得 $t'_k\to\delta^-$，并且$|x'_{t_k}-x_{t_k}|=\varepsilon$，$\varepsilon$ 是某一正数，显然可设 $\varepsilon<\varepsilon_0$，$t_k<t'_k$ 且当 $t_k\leqslant t<t'_k$ 时，$|x_t-x_{t_k}|_B<\varepsilon$.

现在定义函数 $x^k$ 为

$$x^k(t)=\begin{cases}x(t+t_k),t\leqslant t'_k-t_k\\ x(t'_k),t\geqslant t'_k-t_k\end{cases}$$

则 $x^k\in F_\infty^L(\Gamma)$，这里 $\Gamma=Cl(U_k\{x_{t_k}\})$是紧的，故由引理2.1及 $t\leqslant t'_k-t_k$ 时 $x_t^k=x_{t+t_k}\Rightarrow t'_k-t_k\to0$ 时有 $\varepsilon=|x_{t'_k}-x_{t_k}|_B=0\Rightarrow$矛盾. 证毕.

与第四章平行的另几个定理列出而不予以证明(参看[382]).

**定理** 2.4 在定理 2.3 的假定之下，若 $f$ 把$\Omega$中的有界闭集映为有界集，则对$\Omega$中的任何有界闭集 $W$，$\exists$ 序列 $\{t_k\}$，$t_k \to \delta^-$，使得 $(t_k, x_{t_k}) \notin W$.

此外，若$\Omega = R \times B$ 或 $B$ 满足条件：$\exists$ $r>0$ 和 $k^*$，使得

$$|\varphi|_{[-r,0]} \leqslant k^* |\varphi|_B \tag{2.10}$$

则$\exists$ $t_w$ 使当 $t_w \leqslant t < \delta$ 时，$(t, x_t) \notin W$.

关于连续依赖性有如下两论断.

**定理** 2.5 设无穷时滞 RFDE$(f,\Omega)$过$(\sigma,\varphi)$的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 定义在$[\sigma,\sigma+A]$上，$A>0$ 是唯一的，又设$(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3)$成立，则对$\forall\ \epsilon>0$，$\exists$ $\delta(\epsilon)>0$，使得若$(s,\psi)\in\Omega$，$|s-\sigma|<\delta(\epsilon)$，$|\varphi-\psi|_B<\delta(\epsilon)$，就有

$$|x_t(s,\psi)-x_t(\sigma,\varphi)|_B<\epsilon$$

对$\forall$ $t\in[\max\{s,\sigma\},\sigma+A]$成立，这里 $x(t,s,\psi)$是 RFDE$(f,\Omega)$(1.3)过$(s,\psi)$的解.

**定理** 2.6 若定理 2.5 的条件满足，无穷时滞 RFDE$(f,\Omega)$中含有参量 $\lambda\in\Lambda$

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t,\lambda)\triangleq f_\lambda \tag{2.11}$$

$\Lambda$ 是某一 Banach 空间的子集，若 $f$ 关于 $\lambda$ 连续，则 RFDE$(f_\lambda)$过$(\sigma,\varphi)$的解 $x(t,\sigma,\varphi,\lambda)$关于$(\sigma,\varphi,\lambda)$是连续的.

证明参看[382].

## §3 无穷时滞 NFDE$(D,f)$的基本理论

这里把第六章的结果予以推广，我们再强调一下记号 $R_-^a=(-\infty,a]$，$R_+^b=[b,+\infty)$，$a,b\in R$，其他记号沿用§1、§2 的表示：空间 $B$ 是由 $\hat{B}$ 的拟范数$|\cdot|_{\hat{B}}$导出的，$\varphi\in B$，$|\varphi|_B\triangleq|\hat{\varphi}|_{\hat{B}}$，$\hat{\varphi}$是对应于 $\varphi$的 $\hat{B}$ 中元素(代表元)．$\hat{x}:R_-^a\to R^n$，定义 $\hat{x}_t:R_-\to R^n$ 为 $\hat{x}_t$

$\triangleq \hat{x}_t(\theta) \triangleq x(t+\theta)$，$\theta \in R_-$，对 $\alpha \geqslant 0$，$\sigma \in R$，$\hat{\varphi} \in \hat{B}$ 定义一个集

$$\mathscr{F}_{\alpha,\sigma}(\hat{\varphi}) = \{\hat{\psi}: R_-^{\sigma+\alpha} \to R^n, \hat{\psi}_\sigma = \hat{\varphi}, \hat{\psi} \text{ 在}[\sigma,\sigma+\alpha]\text{上连续}\}$$

且 $$\mathscr{F}_{\alpha,\sigma} \triangleq \bigcup_{\varphi \in \hat{B}} F_{\alpha,\sigma}(\hat{\varphi})$$

现在设 $\hat{B}$ 满足下列公理（仍用记号 $(\alpha_i)(\beta_i)$．

$(\alpha_1)$ $\exists$ $k = \text{const.} > 0$ 使 $|\hat{\varphi}(0)| \leqslant k|\hat{\varphi}|_B$，对 $\forall$ $\hat{\varphi} \in \hat{B}$ 成立．

$(\alpha_2)$ 对 $\forall$ $\hat{x} \in \mathscr{F}_{\alpha,\sigma}$ 和 $t \in [\sigma,\sigma+\alpha]$，$\hat{x}_t \in \hat{B}$ 且 $\hat{x}_t$ 关于 $t \in [\sigma,\sigma+\alpha]$ 连续．

$(\alpha_3)$ $\exists$ 定义在 $R_+$ 上的连续函数 $K_1(s)$ 及局部有界函数 $M_1(s)$，使得对 $\forall$ $\sigma \in R$，$\alpha \geqslant 0$，$\hat{x} \in \mathscr{F}_{\alpha,\sigma}$ 有

$$|\hat{x}_{\alpha+\sigma}| \leqslant K_1(\alpha) \sup_{\sigma \leqslant \theta \leqslant \sigma+\alpha} |\hat{x}(\theta)| + M_1(\alpha)|\hat{x}_\sigma|$$

称 $\hat{\psi}, \hat{\omega} \in \mathscr{F}_{\alpha,\sigma}$ 是等价的，若成立 $|\hat{\psi}_\sigma - \hat{\omega}_\sigma|_B = 0$ 和 $\hat{\psi}(s) = \hat{\omega}(s)$，$s \in [\sigma,\sigma+\alpha]$，记为 $\hat{\psi} \sim \hat{\omega}$．仍用 $\psi$ 表示在这种等价关系之下的类，由 $(\alpha_3) \Rightarrow$ 对等价类 $\psi$，可以定义 $\psi(s) = \hat{\psi}(s)$，$s \in [\sigma,\sigma+\alpha]$ 和 $\psi_t = \hat{\psi}_t$ 在 $\hat{B}$ 中关于 $|\cdot|_B$ 的等价类 $(t \in [\sigma,\sigma+\alpha]$ 时)．

对 $\forall$ $\sigma \in R$，$\alpha \geqslant 0$，$\varphi \in B$，我们定义

$$F_{\alpha,\sigma}(\varphi) = \{\psi: \hat{\varphi} \in \mathscr{F}_{\alpha,\sigma}(\hat{\varphi}), (\hat{\varphi}) \in \varphi\}$$

$$F_{\alpha,\sigma}(\varphi) = \bigcup_{\varphi \in B} F_{\alpha,\sigma}(\varphi)$$

又由 $(\alpha_1)$，对 $\varphi \in B$，可定义 $\varphi(0) = \hat{\varphi}(0)$，其中 $\hat{\varphi}$ 是 $\varphi$ 的任一代表元，相应于公理 $(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)$，相空间 $B$ 要求满足如下公理：

$(\beta_1)$ $|\varphi(0)| \leqslant k|\varphi|_B$．$\varphi \in B$，$k$ 是常数．

$(\beta_2)$ 若 $x \in F_{\alpha,\sigma}$，则 $x_t \in B$ 且关于 $t \in [\sigma,\sigma+\alpha]$ 连续．

$(\beta_2)$ 若 $x \in F_{\alpha,\sigma}$，则

$$|x_{\alpha+\sigma}|_B \leqslant k_1(\alpha) \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant \sigma+\alpha} |x(s)| + M_1(\alpha)|x_\sigma|_B$$

同样地，我们可以给出满足这些公理的相空间的实例，以确定无穷时滞 NFDE$(D,f)$ 的基本理论．为此，首先必须推广原子的概念：

**定义 3.1** 设$\Omega\subseteq R\times B$是开集，$D:\Omega\to R^n$连续且$D(t,\varphi)$存在关于$\varphi$的连续 Fréchet 导数$D_\varphi(t,\varphi):B\to R^n$满足

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=A(t,\varphi)\psi(0)+L(t,\varphi,\psi) \tag{3.1}$$

其中$(t,\varphi)\in\Omega$，$\psi\in B$，$A(t,\varphi)$是定义在$\Omega$上的$n\times n$阵，$A^{-1}(t,\varphi)$存在且$A(t,\varphi)$，$A^{-1}(t,\varphi)$在$\Omega$上连续，$L(t,\varphi,\psi)$关于$\psi$是线性的，并且满足公理$(r_1)$.

$(r_1)$ $\exists$ $\beta_0>0$和连续映射$r:\Omega\times[0,\beta_0]\to R_+$，$r(t,\varphi,0)=0$，使得当$\psi\in B$且存在$\hat{\psi}\in\psi$，$\hat{\psi}(\theta)=0$，$\theta\in R_-^{-\beta}$时成立

$$|L(t,\varphi,\psi)|\leqslant r(t,\varphi,\beta)|\psi|_B,\ \beta<\beta_0 \tag{3.2}$$

则称差分算子$D(t,\varphi)$在$\Omega$上于 0 处是"广义原子的".

现在定义无穷时滞 NFDE$(D,f)$.

若$\Omega\subseteq R\times B$是开集，$x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in R_-$，$D,f\in C(\Omega,R^n)$，$D$在$\Omega$上于 0 处为广义原子的，则称

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t) \tag{3.3}$$

是一个无穷时滞 NFDE，记为 NFDE$(D,f)$或者记为 NFDE$(D,f,\Omega)$.

若$\exists$ $A>0$，$\sigma\in R$，$x\in F_{n,\sigma}$，使当$t\in[\sigma,\sigma+A]$时，$(t,x_t)\in\Omega$，且$D(t,x_t)$连续可微满足(3.3)，则称$x(t)$是(3.3)的一个解，若$x_\sigma=\varphi$，则称$x$是方程(3.3)过$(\sigma,\varphi)$的一个解，记为$x(t,\sigma,\varphi)$.

**例 3** 设$k:R_-\to R_+$连续非减，在$(-\infty,0)$上可积且使得

$$k(u+v)\leqslant k(u)k(v),\ v,u\leqslant 0$$

$B_k^r$表示$R_-\to R^n$的某些映射的等价类构成的集合，这些映射在$R_-$上可测，在$[-r,0]$上连续，$r=\text{const.}>0$，并且

$$|\varphi|_B=\sup_{u\in[-r,0]}|\varphi(u)|+\int_{-\infty}^{-r}k(u)|\varphi(u)|du<+\infty.$$

容易推出$B_k^r$的对偶空间$(B_k^r)^*$，由映射

$$\psi:R_-\to R^n$$

组成，$\psi$ 在 $R_-^{-r}$ 上的限制属于 $L^\infty((-\infty,-r),R^n)$，$\psi$ 在 $[-r,0]$ 上的限制是有界变差的左连续函数且 $\psi(0)=0$. 对于 $\varphi\in B_k^1$，$\psi\in(B_k^1)$，$\varphi$ 与 $\psi$ 的内积为

$$<\varphi,\psi>=\int_{-\infty}^{-r}\psi(u)\varphi(u)k(u)du+\int_{-r}^{0}[d_u\psi(u)]\varphi(u)$$

其中 $\psi\varphi$，$[d\psi]\varphi$ 表示 $R^n$ 中的纯量积.

故若 $D:B_k^1\to R^n$ 是有界线性泛函，则存在 $\eta_D:R_-\to L(R^n,R^n)$，$L$ 是列向量属于 $(B_k^1)^*$ 的矩阵，使得

$$D\varphi=\int_{-\infty}^{-r}k(s)\eta_D(s)\varphi(s)ds+\int_{-r}^{0}[d\eta_D(s)]\varphi(s)$$

则 $D$ 诱导出一个有界线性映射 $D^r:C([-r,0],R^n)\to R^n$ 满足

$$D^r\varphi=\int_{-r}^{0}[d\eta_D(s)]\varphi(s),\varphi\in C([-r,0],R^n)$$

若 $D^r:C([-r,0],R^n)\to R^n$ 在 0 处是原子的，则

$$\frac{d}{dt}D(x_t)=f(t,x_t)$$

是一个 NFDE$(D,f,\Omega)$.

**定理 3.1** 设 $\Omega\subseteq R\times B$ 是开集，则对 $\forall\ (\sigma,\varphi)\in\Omega$，存在 NFDE$(D,f,\Omega)$(3.3)过$(\sigma,\varphi)$的解.

**证** 给定 $\alpha>0,\beta>0$，定义

$$A(\alpha,\beta)=\{y\in\mathscr{F}_{\alpha,0}(0):|y(t)|\leqslant\beta,t\in[0,\alpha]\}$$

显然，$A(\alpha,\beta)$是 $B\times C(R_-^\alpha,R^n)$中的有界闭凸集，空间 $C(R_-^\alpha,R^n)$ 是 $R_-^\alpha=(-\infty,\alpha]$上有界连续函数全体，赋以范数 $|\cdot|$.

现在取定 $\varphi$ 的代表元 $\hat{\varphi}$，定义

$$\bar{\hat{\varphi}}(t)=\begin{cases}\hat{\varphi}(t) & t\leqslant 0\\ \hat{\varphi}(0) & t>0\end{cases}$$

则 $\bar{\hat{\varphi}}\in\mathscr{F}_{\infty,0}(\hat{\varphi})$，以 $\bar{\varphi}$ 表示 $\bar{\hat{\varphi}}$的等价类.

据 $f,D,D_\varphi,r$ 的连续性，存在$(\sigma,\varphi)$的邻域 $U$，$\alpha_0>0$，$\beta_0>0$，$M>0$ 以及定义在$[0,\beta_0]$上的函数 $\alpha_1(\beta)$($\alpha_1(\beta)<\alpha_0$)，使得

$$|f(\sigma^*,\varphi^*)|\leqslant M,(\sigma^*,\varphi^*)\in U$$

且对 $0\leqslant t\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1(\beta),0<\beta<\beta_0,\hat{z}\in A(\alpha,\beta)$ 有

$$(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)\in U,M\alpha|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|<\frac{\beta}{2}$$

$$|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|\{|D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|+|D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)$$

$$-D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)+D_\varphi(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)z_t)|\}<\frac{\beta}{4}$$

$$|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)||L(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)|$$

$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|r(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,t)k_1(t)\sup_{0\leqslant\theta\leqslant t}|z(\theta)|<\frac{\beta}{4}$$

在 $A(\alpha,\beta)$ 上定义两个算子，对 $\hat{z}\in A(\alpha,\beta)$，定义

$$S:\begin{cases}s\hat{z}(t)=0,\ t\in R_-\\ A(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)(s\hat{z})(t)=-L(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)+D(\sigma,\varphi)\\ -D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)+D\varphi(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)z_t,0\leqslant t\leqslant\alpha\end{cases}$$

$$U:\begin{cases}U\hat{z}(t)=0,t\in R_-\\ A(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)(U\hat{z})(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+z_s)ds,0\leqslant t\leqslant\alpha.\end{cases}$$

则当 $0\leqslant t\leqslant\alpha<\alpha_1(\beta),0<\beta<\beta_0,\hat{z}\in A(\alpha,\beta)$ 时，有

$$|s\hat{z}(t)|\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|\{|D(\sigma,\varphi)-D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|$$

$$+|L(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)|+|D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)-D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)$$

$$+D\varphi(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)z_t|\}<\frac{\beta}{2}.$$

$$|U\hat{z}(t)\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)||\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+z_s)ds|$$

$$\leqslant M\alpha|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|<\frac{\beta}{2}$$

故 $s+u$ 是 $A(\alpha,\beta)$ 到自身的映射.

下面证明，对适当选取的 $\alpha,\beta,s$ 是压缩映射，记

$$g(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)=D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)-D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)-D_\varphi(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)z_t,$$

由 $D_\varphi$ 的连续性，任意给定 $\varepsilon>0$，$\exists\ \alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)>0,\beta(\varepsilon)<\beta_0,\alpha(\varepsilon)<\alpha_1(\beta(\varepsilon))$，使得对 $\hat{y},\hat{z}\in A(\alpha,\beta),t\in[0,\sigma]$ 有

$$|g(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)-g(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,y_t)|\leqslant\varepsilon|y_t-z_t|_B$$

则当 $0<\beta\leqslant\beta(\varepsilon)<\beta_0, 0<\alpha\leqslant\alpha(\varepsilon)<\alpha_1(\beta)<\alpha_0$ 时

$$|s_z-s_y|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|[|L(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,y_t-z_t)|$$
$$+|g(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,z_t)-g(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,y_t)|]\}$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|[r(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,t)+\varepsilon]|z_t-y_t|_B\}$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\{|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|k_1(t)[r(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t,t)+\varepsilon]|z-y|_B\}$$

故存在 $0<\beta_2<\beta_0$，定义在$[0,\beta_2]$上函数 $\alpha_2(\beta)<\alpha_1(\beta)$ 及常数 $k$：$0<k<1$，使当$0<\beta<\beta_2, 0<\alpha<\alpha_2(\beta), \hat{z},\hat{y}\in A(\alpha,\beta)$时，$|s_{\hat{z}}-s_{\hat{y}}|\leqslant k|\hat{z}-\hat{y}|\Rightarrow s$ 是压缩映射.

其次证 $U$ 在 $A(\alpha,\beta)$上全连续($0<\alpha<\alpha_2, 0<\beta<\beta_2$).

任意给定有界集 $B\subseteq A(\alpha,\beta)$和 $\hat{z}\in B, 0\leqslant t,\tau\leqslant\alpha$ 时有

$$|Uz(t)-Uz(\tau)|$$
$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|\left|\int_\tau^t f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|$$
$$+|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)-A^{-1}(\sigma+\tau,\tilde{\varphi}_\tau)|\left|\int_0^\tau f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+z_s)ds\right|$$
$$\leqslant\frac{\beta}{2\alpha}|t-\tau|+M\alpha|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)-A^{-1}(\sigma+\tau,\tilde{\varphi}_\tau)|$$

因而由 Ascoli 定理⇒任意给定有界集 $B\subseteq A(\alpha,\beta)$，$UB$ 是子紧集，即 $U$ 在 $A(\alpha,\beta)$上全连续.

综上所述，$S+U$ 是 $A(\alpha,\beta)$上的 $\alpha$－压缩映射，依 Darbo 定理⇒$S+U$ 在 $A(\alpha,\beta)$上∃ 不动点，因而相应的积分方程

$$\begin{cases}D(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t+z_t)=\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+z_s)ds, t\geqslant0\\ z_0=0\end{cases}$$

有解⇒方程(3.3)过$(\sigma,\varphi)$的解存在．证毕.

**定理** 3.2　若(3.3)过$(\sigma,\varphi)$的解存在，且存在常数 $L>0$，使对 $(t,\varphi)\in\Omega, (t,\psi)\in\Omega$成立

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_B$$

则对$\forall$ $(\sigma,\varphi)\in\Omega$，(3.3)过$(\sigma,\varphi)$的解是唯一的.

**证** 只要证$S+U$在$A(\alpha,\beta)$中有唯一不动点即可.

设$\hat{Z}_1,\hat{Z}_2\in A(\alpha,\beta)$，使$\hat{Z}_i=(S+U)\hat{Z}_i(i=1,2)$类似于定理3.1的证明，可以推出存在常数$K_1\in(0,1)$使得

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|S\hat{Z}_1(u)-S\hat{Z}_2(u)|\leqslant K_1\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|Z_1(u)-Z_2(u)|$$

$$|U\hat{Z}_1(t)-U\hat{Z}_2(t)|\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|\left|\int_0^t[f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+Z_{1s})\right.$$

$$\left.-f(\sigma+s,\tilde{\varphi}_s+Z_{2s})]ds\right|$$

$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|L\int_0^t|Z_{1s}-Z_{2s}|_Bds$$

$$\leqslant|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|L\int_0^tK_1(s)\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|Z_1(u)-Z_2(u)|ds$$

$$\leqslant L_1L\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|Z_1(u)-Z_2(u)|du$$

其中$L_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}|A^{-1}(\sigma+t,\tilde{\varphi}_t)|\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}K_1(t)$，故

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{Z}_1(u)-\hat{Z}_2(u)|$$

$$\leqslant K_1\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{Z}_1(u)-\hat{Z}_2(u)|+L_1L\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|Z_1(u)-Z_2(u)|ds$$

从而有

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{Z}_1(u)-\hat{Z}_2(u)|\leqslant\frac{LL_1}{1-K_1}\int_0^t\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|Z_1(u)-Z_2(u)|ds$$

由Gronwall不等式$\Rightarrow\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\hat{Z}_1(u)-\hat{Z}_2(u)|=0,t\in[0,\alpha]\Rightarrow$ $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2$. 证毕.

**定理3.3**(连续依赖性) 设$\Omega\subseteq R\times B$开集，$\Lambda^*$是另一Banach空间$X$的子集，$D,f:\Omega\times\Lambda^*\to R^n$满足

(i)$f(\sigma,\varphi,\lambda),D(\sigma,\varphi,\lambda),D_\varphi(\sigma,\varphi,\lambda)$关于$(\sigma,\varphi,\lambda)\in\Omega\times\Lambda^*$是

连续的.

(ii)∃ $\beta_0>0$ 和定义于$\Omega\times[0,\beta_0]\times\Lambda^*$上的连续函数 $r(\sigma,\varphi,\lambda,\beta)$,使得对$(\sigma,\varphi,\lambda)\in\Omega\times\Lambda^*$,$r(\sigma,\varphi,\lambda,0)=0$ 且

$$D_\varphi(\sigma,\varphi,\lambda)\psi=A(\sigma,\varphi,\lambda)\psi(0)+L(\sigma,\varphi,\psi,\lambda)$$

其中 $A(\sigma,\varphi,\lambda)$,$A^{-1}(\sigma,\varphi,\lambda)$连续,$L(\sigma,\varphi,\psi,\lambda)$关于 $\psi$ 线性且对 $\psi\in B$,若存在 $\hat{\psi}\in\psi$,使 $\hat{\psi}(\theta)=0$,$\theta\in R_-^{-\beta}$,$\beta\leqslant\beta_0$,则

$$|L(\sigma,\varphi,\psi,\lambda)|\leqslant r(\sigma,\varphi,\lambda,\beta)|\psi|_B$$

(iii)存在 NFDE$(D(\cdot,\lambda_0),f(0,\lambda_0),\Omega)$过$(\sigma,\varphi_0)\in\Omega$的唯一解,定义在$(-\infty,\delta)$上.

则对∀ $b<\delta$,∃ $(\sigma,\varphi_0,\lambda_0)$的邻域 $N(\sigma,\varphi_0,\lambda_0)$,使得对$(\sigma',\varphi',\lambda')\in N(\sigma,\varphi_0,\lambda_0)$,NFDE$(D(\cdot,\lambda'),f(\cdot,\lambda'),\Omega)$过$(\sigma',\varphi')$的解在 $R_-^b$上存在且 $x(t,\sigma',\varphi',\lambda')$关于所有变元连续.

**证** 与定理 3.1 的证明类似,可证∃ $\alpha>0$,$\beta>0$,$(\sigma,\varphi_0)$的邻域 $N(\sigma,\varphi_0)$和 $\lambda_0$ 的邻域 $O(\lambda_0)$,使得对$(\sigma',\varphi',\lambda')\in N(\sigma,\varphi_0)\times(O(\lambda_0)\cap\Lambda^*)$,$x(t,\sigma',\varphi',\lambda')$在 $R_-^{\sigma+\alpha}$上存在且 $S(\sigma',\varphi',\lambda')+U(\sigma',\varphi',\lambda')$:$A(\alpha,\beta)\to A(\alpha,\beta)$. ($U(\sigma',\varphi',\lambda')$与 $S(\sigma',\varphi',\lambda')$的定义与定理 3.1 中的 $S$,$U$ 类似)

容易证明对 $\Lambda=N(\sigma,\varphi_0)\times(\Lambda^*\cap O(\lambda_0))$,$\Gamma=A(\alpha,\beta)$,满足第六章引理 5.3 的全部条件⇒在$[\sigma',\sigma'+\alpha]$上 NFDE$(D(\cdot,\lambda'),f(\cdot,\lambda'),\Omega)$过$(\sigma',\varphi')$的解关于所有变元连续.

由 $t\in[\sigma,b]$时,集$\{(t,x_t(\sigma,\varphi_0,\lambda_0))\}$是紧的,用有限覆盖定理即可推出定理成立.

最后列出一个解的延拓定理.

**定理** 3.4 设$\Omega\subseteq R\times B$ 是开集,$D$,$f$ 满足条件:若 $W$ 为$\Omega$中有界闭集,且存在 $W$ 的 $\delta$-邻域 $V(W,\delta)\subseteq\Omega$,则 $f$ 把 $W$ 映入 $R^n$ 中的有界集,$D(t,\varphi)$,$D_\varphi(t,\varphi)$在 $W$ 上一致连续且

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=A(t,\varphi)\psi(0)+L(t,\varphi,\psi)$$

其中$(t,\varphi)\in W$ 时,$|A^{-1}(t,\varphi)|\leqslant N=\text{const.}$,$L$ 满足公理

$(r_2)$ $\exists$ $s_0<0$，使得当 $\psi\in F_t$，$\sigma,s\in[0,s_0]$时

$$|L(t,\varphi,\psi_{s-\sigma})|\leqslant r(t,\varphi,s)\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant\sigma+s}|\psi(\theta)|+N_1(t,\varphi,s)|\psi_\sigma|_B$$

其中 $r(t,\varphi,s)$是连续的，且当 $s\to0$ 时 $r(t,\varphi,s)$关于$(t,\varphi)\in W$ 一致趋于 0. 对$(t,\varphi)\in W$，$0\leqslant s\leqslant s_0$，$N_1(s)\geqslant N_1(t,\varphi,s)$，若 $x$ 是 NFDE$(D,f,\Omega)$过$(\sigma,\varphi)$且定义于$(-\infty,b)$中不可延拓解，则存在序列 $t_n\to b^-$，$n\to\infty$使得$(t_n,x_{t_n})\notin W$，$n\geqslant N_0=\text{const.}>0$

## §4 无穷时滞 RFDE($f$)的稳定性

1978 年在 J. Hale 与 H. Kato 共同确立 §1、§2 的基本理论的同时，Kato 引入了"容许空间"的概念，研究了无穷时滞 RFDE$(f,\Omega)$的稳定性.

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{4.1}$$

设 $X:R_-\to R^n$ 构成的线性空间赋以拟范数$|\cdot|_X$. 记

$X_\tau=\{\varphi\in X:\varphi(s)$在$[-\tau,0]$上连续，$\varphi_{-\tau}\in X\}$，$\tau\geqslant0$ 其中 $\varphi:R_-\to R^n$，$\varphi_t(s)=\varphi(t+s)$，$s\in R_-$.

**定义 4.1** 称空间$(X,|\cdot|_X)$是容许的，如果对$\forall$ $\tau\geqslant0$ 和 $\varphi\in X_\tau$ 满足

(i)$\varphi_t\in X$，且 $\varphi_t$ 对 $t$ 连续，$t\in[-\tau,0]$.

(ii)$\mu|\varphi(0)|\leqslant|\varphi|_X\leqslant K(\tau)\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant0}|\varphi(s)|+M(\tau)|\varphi_{-\tau}|_X$.

其中 $\mu>0$ 是常数，$K(s)$，$M(s)$是连续非负函数.

称容许空间$(X,|\cdot|_X)$具有"衰退记忆"的，若$K(s)=K$，$\lim\limits_{s\to\infty}M(s)=0$.

由定义可以看出，若$(X,|\cdot|_X)$是容许空间，$\tau\geqslant0$，则空间$(X_\tau,|\cdot|_{X_\tau})$也是容许的，这里$|\varphi|_X=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant0}|\varphi_s|_X$，而 $R^n$ 也是个容许空间，其拟范数定义为$|\varphi|_{R^n}=|\varphi(0)|$.

**例 4** 用 $C_h^r$ 表示当 $h<\infty$ 时，所有 $[-h,0]$ 上的连续函数的集合，而 $h=\infty$ 时，所有 $R_-$ 上连续，且 $\lim\limits_{s\to-\infty} e^{rs}\varphi(s)$ 存在的函数 $\varphi$ 全体构成的集合，在 $C_h^r$ 中定义拟范数

$$|\varphi|_{C_h^r}=\sup_{-h\leqslant s\leqslant 0} e^{rs}|\varphi(s)|$$

则 $(C_h^r,|\cdot|_{C_h^r})$ 是一个容许空间.

**例 5** 用 $M_h^r$ 表示所有 $(-h,0]$ 上可测，$e^{rs}|\varphi(s)|$ 在 $(-h,0]$ 上可积的函数 $\varphi$ 构成的集合，这里 $0\leqslant h\leqslant\infty$，$0\leqslant r<\infty$，在 $M_h^r$ 上定义拟范数

$$|\varphi|_{M_h^r}=|\varphi(0)|+\int_{-h}^{0} e^{rs}|\varphi(s)|ds$$

则 $(M_h^r,|\cdot|_{M_h^r})$ 是容许空间.

在诸容许空间中我们引进一个顺序关系“$<$”.

设 $X,Y$ 是两个容许空间，若存在常数 $r$，使得对 $\forall\ \varphi\in X$ 必有 $\varphi\in Y$，且 $|\varphi|_Y\leqslant r|\varphi|_X$，则称 $X<Y$.

由定义 4.1 的(ii)$\Rightarrow$对 $\forall\ \tau\geqslant 0$，$X_\tau<X<R^n$.

例 4、例 5 给出的容许空间有如下性质：

$(a_1)$ 当 $r>0$ 或 $h<\infty$ 时 $C_h^r$，$M_h^r$ 有衰退记忆.

$(a_2)$ 若 $h<\infty$，则对 $\forall\ r$ 和 $\beta$，有 $C_h^r<C_h^\beta$，$M_h^r<M_h^\beta$.

$(a_3)$ 若 $r>\beta$，则 $C_h^\beta<M_h^r$.

$(a_4)$ 若 $0\leqslant k\leqslant h\leqslant\infty$，则 $C_h^r<C_k^r$，$M_k^r<M_h^r$.

现在设(4.1)中 $f:R_+\times X\to R^n$ 是全连续的，且 $f(t,0)=0$，它在容许空间对 $(X,Y)$ 中的各种稳定性定义如下：

**定义 4.2** 设 $(X,|\cdot|_X)(Y,|\cdot|_Y)$ 是两个容许空间，$X<Y$，称(4.1)的零解在 $(X,Y)$ 中

(i) 稳定，若对 $\forall\ \sigma\geqslant 0$，$\varepsilon<0$，$\exists\ \delta(\sigma,\varepsilon)>0$ 使得当 $t\geqslant\sigma$，$|x_\sigma|_X<\delta(\sigma,\varepsilon)$ 时，$|x_t|_Y<\varepsilon$，这里 $x$ 是(4.1)定义在 $t\geqslant\sigma$ 上的解.

(ii) 一致稳定，若(i)中 $\delta$ 与 $\sigma$ 无关.

(iii)渐近稳定，若(4.1)的零解稳定，且对$\forall\ \sigma\geqslant 0$，$\exists\ \delta_0(\sigma)>0$，使当$|x_\sigma|_X<\delta_0(\sigma)$时，$\lim\limits_{t\to\infty}|x_t|_Y=0$.

(iv)等度渐近稳定，若(4.1)的零解渐近稳定，且(iii)中极限对$|x_\sigma|_X<\delta_0(\sigma)$一致成立.($\exists\ T(\varepsilon,\sigma)>0$使当$t\geqslant\sigma+T(\varepsilon,\sigma)$及$|x_\sigma|_X<\delta_0(\sigma)$时，$|x_t|_Y<\varepsilon$).

(v)一致渐近稳定，若零解一致稳定，且$\exists\ \delta_0>0$，使得对任意的$\varepsilon>0$，$\exists\ T(\varepsilon)>0$，当$\sigma\geqslant 0$，$t\geqslant\sigma+T(\varepsilon)$，$|x_\sigma|_X<\delta_0$时，有$|x_t|_Y<\varepsilon$.

由定义看到，容许空间对$(X,Y)$这一提法，即第七章中指出的初始数据空间取一种范数，状态空间取另一种范数，这种做法对FDE是方便的，可行的. 但现在要考虑诸空间及其范数的不同选择与稳定性之间的关系，我们给出定理如下：

**定理 4.1** 设$X_i,Y_i(i=1,2)$都是容许空间，并且成立$X_2<X_1<Y_1<Y_2$，则$(X_1,Y_1)$中的稳定性可以推出$(X_2,Y_2)$中相关类型的稳定性，特别地，$(X,Y)$中的稳定性$\Rightarrow(X,R^n)$中的稳定性，当$X$具有衰退记忆时，$(X,R^n)$中稳定性$\Rightarrow(X,X)$中的稳定性.

**证** 以渐近稳定为例证定理的后半部分.

由$X$具有衰退记忆$\Rightarrow\exists\ M_1>0$，使

$$M(s)\leqslant M_1,s\geqslant 0$$

由(4.1)的零解在$(X,R^n)$中的稳定性$\Rightarrow$对$\forall\ \varepsilon>0,\sigma\geqslant 0$，$\exists\ \delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2M_1}\right)$，使当$|x_\sigma|_X<\delta$时有

$$|x(t)|<\varepsilon/2(K+M_1),t\geqslant\sigma$$

从而

$$|x_t|_X\leqslant K\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s)|+M_1|x_\sigma|_X\leqslant\frac{K\varepsilon}{2(K+M_1)}+M_1\delta\leqslant\varepsilon$$

故$x=0$在$(X,X)$中稳定.

取$\delta_0(\sigma)=\delta(\sigma,1)$，则当$|x_\sigma|_X<\delta_0(\sigma)$时$|x_t|_X<1$(取$\varepsilon=1$). 再

对任意的 $\varepsilon>0$，由 $x=0$ 在$(X,R^n)$中是渐近稳定的$\Rightarrow\exists\ T>0$，使得当 $t\geqslant\sigma+T$ 时，$|x(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2K}$，取 $T_1>0$，使当 $t\geqslant T_1$ 时，$M(t)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $t\geqslant\sigma+T+T_1$ 时有

$$|x_t|_X\leqslant K\sup_{t-T_1\leqslant s\leqslant t}|x(s)|+M(T_1)|x_{t}-T_1|_X$$

$$\leqslant K\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\varepsilon$$

故 $x=0$ 对于$(X,X)$是渐近稳定的. 证毕.

由这个定理看到，在有界滞量的情形，$(X,R^n)$中稳定性与$(X,X)$中稳定性并无区别，而在无穷时滞系统中这两种稳定性的概念并非等价，要等价便需要增加条件限制，"衰退记忆"是限制条件的一种.

最后，我们给出容许空间对 $\varphi$ 的稳定性定理. 首先有

**定义 4.3** 在集$\{(t,\varphi):\varphi\in X_{t-\sigma},t\geqslant\sigma\}$上定义的实值连续函数 $V(t,\varphi,\sigma)$，$\sigma\geqslant 0$ 叫做 $V$ 泛函，若满足

(i) $u(|\varphi|_Y)\leqslant V(t,\varphi,\sigma)$，$u$ 为楔函数.

(ii) $V(t,\varphi,\sigma)\leqslant v(t,|\varphi|_{X_{t-\tau}},\sigma)$，$v(t,r,\sigma):R_+\times R_+\times R_+\to R_+$，连续，关于 $r$ 非减，且 $v(y,0,\sigma)=0$.

$V(t,\varphi,\sigma)$沿(4.1)的导数定义为

$$\dot V_{4.1}(t,\varphi,\sigma)=\sup\left\{\overline{\lim_{s\to t+0}}\frac{1}{s-t}[V(s,x_s,\sigma)-V(t,\varphi,\sigma)]\right\}\tag{4.2}$$

其中 $x(s)$是(4.1)满足 $x_t=\varphi$ 的解，上式中 sup 是对一切这样的解取的上确界.

沿用一般的记号，列出一些条件：

$(L)\ \exists\ R_+\times R_+\times R_+$上的连续函数$L(t,s,r)$，关于$r$非减，$L(t,s,0)\equiv 0$ 及 $R_+\times R_+$的连续函数 $\delta_0(t,s)>0$，使得对方程(4.1)的任何解 $x(s)$满足

$|x_t|_X \leqslant L(t,s,|x_s|_X)$，若 $|x_s|_X < \delta_0(t,s)$，$t \leqslant s_0$（或 $\sigma$）

由第六章 NFDE$(D,f)$基本理论推知，若(4.1)过$(\sigma,\varphi)$的解是唯一的，则条件$(L)$成立.

$(UL)$在$(L)$中，$L(t,s,r)$和 $\delta_0(t,s)$满足

$$L(t,s,r)=L(t-s,0,r),\delta_0(t,s)=\delta_0(t,-s,0)$$

$(P)$ $P(t,r)$在 $R_+\times(0,\infty)$上连续，对 $r$ 非减，且满足

$$P(t,r)\leqslant r,\lim_{t\to\infty}P(t,r)=\infty$$

$(F)$ $F(r)$是 $R_+$ 上连续非减函数，且 $F(r)-r>0$（当 $r>$时成立）

$(UP)$在$(P)$中设 $q(r)=t-P(t,r)$是正的且与 $t$ 无关.

可以证明在条件$(P)$之下，$\Delta(t,r)=\sup\{s:P(s,r)\leqslant t\}$关于 $r$ 非减，$\Delta(t,r)\geqslant t$，且

$$P(t,r)\geqslant\sigma,\text{当 } t\geqslant\Delta(\sigma,r)$$

**定理** 4.2　对(4.1)假定

(i)条件$(L)$成立.

(ii)∃ $V$ 泛函：$V(t,\varphi,\sigma)$，$\sigma\geqslant 0$ 它满足

当 $V(t,\varphi,\sigma)>0$，$P(t,V(t,\varphi,\sigma))\geqslant\sigma$，以及

$$V(s,\varphi_{s-t},\sigma)\leqslant V(t,\varphi,\sigma),s\in[P(t,V(t,\varphi,\sigma)),t]$$

时，成立

$$\dot{V}_{(4.1)}(t,\varphi,\sigma)\leqslant w(t,V(t,\varphi,\sigma))\tag{4.3}$$

其中 $w(t,r)$是 $R_+\times R_+$上非负连续函数，$w(t,0)\equiv 0$，而 $P(t,r)$满足条件$(P)$.

(iii)纯量方程

$$\dot{y}(t)=w(t,y(t))\tag{4.4}$$

的零解是稳定的.

则无穷时滞 NFDE$(D,f,\Omega)$(4.1)的零解是$(X,R^n)$中稳定的.

**证**　令 $x(t)$是(4.1)自 $t=\sigma$，$(\sigma\geqslant 0)$出发的解，记 $V(t)=V(t,$

$x_t,\sigma$)对$\forall\ \eta>0$,令$\varepsilon=u(\eta)$,由条件(iii)$\Rightarrow\exists\ \delta_1=\delta_1(\sigma,\varepsilon),0<\delta_1\leqslant\varepsilon$,使当$y_0=\delta_1$时有

$$\delta_1\leqslant y(t,\sigma,y_0)\leqslant\varepsilon,t\geqslant\sigma \tag{4.5}$$

其中$y(t)=y(t,\sigma,y_0)$是(4.4)过$(\sigma,y_0)$的右行最大解.

对上述$\delta_1>0$,$\exists\ \delta>0$,使得

$$\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\Delta(\sigma,\delta_1)}\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}b(t,\sigma,L(s,\sigma,\delta))<\delta_1$$

且$\delta\leqslant\inf\limits_{\sigma\leqslant s\leqslant\Delta(\sigma,\delta_1)}\delta_0(s,\sigma)$

又由条件$(L)$和$(B)$,若$|x_\tau|_X<\delta,t\in[\sigma,\Delta(\sigma,\delta_1)]$,则

$$V(t)\leqslant b(t,\sigma,|x_t|_{X_{t-\sigma}})$$

$$\leqslant b(t,\sigma,\sup_{-(t-\sigma)\leqslant s\leqslant 0}|(x_t)_s|_X)$$

$$\leqslant b(t,\sigma,\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x_s|_X)\leqslant\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}b(t,\sigma,|x_s|_X)$$

$$\leqslant\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}b(t,\sigma,L(s,\sigma,|x_s|_X))<\delta_1$$

由(4.5)我们有

$$V(t)<y(t),t\in[\sigma,\Delta(\sigma,\delta_1)]$$

要证

$$V(t)\leqslant y(t),t\geqslant\sigma \tag{4.6}$$

令$y_n(t),n=1,2,\cdots\cdots$是方程

$$\dot{y}=\omega(t,y)+\frac{1}{n}\qquad y(\sigma)=y_0$$

的任何解,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)=y(t),t\geqslant\sigma$.

用反证法,设(4.6)不成立,则$\exists\ t_1>\Delta(\sigma,\delta_1)$,使$V(t_1)>y(t_1)$,因而当$n$充分大时有$V(t_1)>y_n(t_1)$,由于$y_0(t)$非减我们可以找到$t_2\in[\Delta(\sigma,\delta_1),t_1]$,使得

$V(t_2)=y_n(t_2),V(t_2)\geqslant V(t)$,当$t\in[\sigma,t_2]$且

$$\dot{V}(t_2)\geqslant \dot{y}_n(t_2)=\omega(t_2,y_n(t_2))+\frac{1}{n}=\omega(t_2,V(t_2))+\frac{1}{n} \tag{4.7}$$

另一方面，因为 $V(t_2)>0,t_2\geqslant\Delta(\sigma,\delta_1),P(t_2,V(t_2))\geqslant P(t_2,\delta_1)\geqslant\tau$，而且 $V(t)\leqslant V(t_2)$，当 $t\in[P(t_2,V(t_2)),t_2]$时，由条件(ii)有

$$\dot{V}(t_2)\leqslant\omega(t_2,V(t_2))$$

$\Rightarrow$矛盾$\Rightarrow$(4.6)成立，从而有

$$u(|x(t)|)\leqslant V(t)<\varepsilon=u(\eta)\quad,t\geqslant\sigma$$

$\Rightarrow|x(t)|<\varepsilon,t\geqslant\sigma$. 证毕.

**定理** 4.3　在定理 4.2 中再假定$(UL)(UB)(UP)$成立且(4.4)的零解一致稳定，则方程(4.1)的零解对$(X,R^n)$中一致稳定.

**证**　此时显然有 $\Delta(t,r)=t+q(r)$，且 $\delta,\delta_1$ 可选得与 $\sigma$ 无关，使

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_1)}\ \sup_{0\leqslant\eta\leqslant q(\delta_1)}b(\xi,0,L(\eta,0,\delta))\leqslant\delta_1\ \text{且}$$

$$\delta\leqslant\inf_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_1)}\delta_0(\xi,0)$$

与定理 4.1 类似证明，可得本定理结论.

**定理** 4.4　对(4.1)我们设

(i)条件$(UL)$成立.

(ii)$\exists$ $V$ 函数：$V(t,\varphi,\sigma)\sigma\geqslant0$ 满足条件$(UB)$以及

$$\dot{V}_{(4.1)}(t,\varphi,\sigma)\leqslant-\omega(t,V(t,\varphi,\sigma)) \tag{4.8}$$

当 $V(t,\varphi,\sigma)>0,P(t,V(t,\varphi,\sigma))\geqslant\sigma$，且

$$V(s,\varphi_{s-t},\sigma)\leqslant F(V(t,\varphi,\sigma)),s\in[p(t,V(t,\varphi,\sigma)),t]$$

其中 $\omega(t,r)$是 $R_+\times R_+$ 上的非负连续函数，$\omega(t,0)\equiv0$，而 $P(t,r)$，$F(r)$分别满足$(UP)$，$(F)$.

(iii)纯量方程

$$\dot{Z}(t) = -\omega(t, Z) \tag{4.9}$$

的零解一致渐近稳定.

则(4.1)的零解在$(X, R^2)$中一致稳定.

**证** 由(iii)⇒∃ $\delta_0>0$, $\tau_0(\eta)>0$,使当$\sigma\geqslant 0$, $0<Z_0<\delta_0$时有

$$|Z(t,\sigma,Z_0)|<\eta, t\geqslant\sigma+\tau_0(\eta) \tag{4.10}$$

对上述的$\delta_0>0$,∃ $\delta_1>0$,使得

$$\sup_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_0)}\ \sup_{\eta\leqslant\eta\leqslant q(\delta_0)} b(\xi,0,L(\eta,0,\delta_1))\leqslant\delta_0,\text{且}$$

$$\delta_1\leqslant\inf_{0\leqslant\xi\leqslant q(\delta_0)}\delta_0(\xi,0)$$

则当$|x_\sigma|_X<\delta_1$时有

$$V(t,x_t,\sigma)<\delta_0, t\in[\sigma,\sigma+q(\delta_0)]$$

由此可以证明

$$V(t)=V(t,x_t,\sigma)\leqslant\delta_0, t\geqslant\sigma$$

事实上,若∃ $t_1>\sigma+q(\delta_0)$,使$V(t_1)>\delta_0$,则可找到$t_2\in[\sigma+q(\delta_0), t_1]$,使得$V(t_2)\geqslant\delta_0$, $\dot{V}(t_2)>0$且$V(t)\leqslant V(t_2)$当$t\in[\sigma,t_2]$时成立. 但因为$P(t_2,V(t_2))\geqslant p(t_2,\delta_0)\geqslant\sigma$,关且$V(t)\leqslant V(t_2)\leqslant F(V(t_2))$,当$t\in[P(t_2,V(t_2)),t_2]$. 故$\dot{V}(t_2)\leqslant 0$⇒矛盾.

下证对∀ $\eta>0$, $\eta<\delta_0$, ∃ $\tau(\eta)>0$,使当$|x_\sigma|_X<\delta_1$时有

$$V(t,x_t,\sigma)\leqslant\eta, t\geqslant\sigma+\tau(\eta) \tag{4.11}$$

令$\alpha=\inf\limits_{\eta\leqslant s\leqslant\delta_0}\{F(s)-s\}>0$,并设$m$为使得$\eta+m\alpha\geqslant\delta_0$的第一个正整数,记$C_n=\eta+n\alpha (n=0,1,2\cdots\cdots,m)$, $\Delta_i=\Delta(\sigma_{i-1},C_{m-i})=\sigma_{i-1}+q(c_{m-i})$, $\sigma_0=\sigma$, $\sigma_i=\Delta_i+\tau_0(\eta)$.

首先证存在$t_1\in[\Delta_1,\Delta_1+\tau_0(\eta)]$使

$$V(t_1)<C_{m-1} \tag{4.12}$$

若不然,则成立

$$V(t)\geqslant C_{m-1}, \text{对}\forall\ t\in[\Delta_1,\Delta_1+\tau_0(\eta)] \tag{4.13}$$

由此当$s\in[\sigma,t]$时有

$$F(V(t))\geqslant V(t)+\alpha\geqslant C_{m-1}+\alpha\geqslant\delta_0\geqslant V(s)$$

因为 $t\geqslant\Delta_1=\Delta(\sigma,C_{m-1})$ 且 $P(t,V(t))\geqslant P(t,C_{m-1})\geqslant\sigma$，故

$$F(V(t))\geqslant V(s),t\in[\Delta_1,\Delta_1+\tau_0(\eta)].$$

由条件(ii)有

$$\dot V(t)\leqslant-\omega(t,V(t)),t\in[\Delta_1,\Delta_1+\tau_0(\eta)]$$

从而 $V(t)\leqslant Z(t,\Delta_1,Z_1),t\in[\Delta_1,\Delta_1+\tau_0(\eta)]$，其中 $Z_1=V(\Delta_1,x_{\Delta_1},\sigma)<\delta_0$，且 $Z(t,\Delta_1,Z_1)$是(4.9)满足 $Z(\Delta_1)=Z_1$ 的右行最大解，因为 $0<Z<\delta_0$ 有

$$|Z(t,\Delta_1,Z_1)|<\eta,t\geqslant\Delta_1+\tau_0(\eta)$$

由此得 $V(\Delta_1+\tau_0(\eta))<\eta$，另一方面由(4.13)有

$$V(\Delta_1+\tau_0(\eta))\geqslant C_{m-1}>\eta$$

$\Rightarrow$矛盾$\Rightarrow$(4.12)成立.

其次证

$$V(t)\leqslant C_{m-1}\text{对}\forall\ t\geqslant t_1\text{ 成立}\tag{4.14}$$

若不然，则$\exists\ t_1^*>t_1$ 使 $V(t^*)>C_{m-1}$且 $\dot V(t_1^*)>0$，但因 $t_1^*>\Delta(\sigma_m,C_{m-1})$，$P(t_1^*,V(t_1^*))\geqslant P(t_1^*,C_{m-1})\geqslant\sigma$ 且当 $s\in[\sigma,t_1^*]$时有

$$F(V(t_1^*))\geqslant V(t_1^*)+\alpha\geqslant\delta_0\geqslant V(s)$$

由(ii)$\Rightarrow\dot V(t_1^*)\leqslant0\Rightarrow$矛盾，故(4.14)得证.

把解 $Z(t,\Delta_1,Z_1)$代之为 $Z(t,\Delta_k,Z_k)$，类似地有

$$\dot V(t)\leqslant C_{m-k},\text{当 }t\geqslant\Delta_k+\tau_0(\eta),k=2,\cdots\cdots,m$$

其中$Z_k=V(\Delta_k,X_{\Delta_k},\sigma)<\delta_0$，在进行$m$次之后得$V(t)\leqslant\eta,t\geqslant\sigma+\tau(\eta)$，这里$\sigma+\tau(\eta)=\Delta_m+\tau_0(\eta)$，且$\tau(\eta)=q(C_{m-1})+\cdots\cdots+q(C_1)+m\tau_0(\eta)$. 证毕.

**例 6** $C_\infty$上的纯量方程

$$\dot x(t)=-ax(t)+bx(t-h)+\int_{-\infty}^0 g(t,s,x(t+s))ds\tag{4.15}$$

其中 $a$, $b$, $h$ 皆常数，$a>0$，$|b|<a$，$h>0$，设 $g(t,s,x)$连续且满足 $|g(t,s,x)|\leqslant m(s)|x|$. 其中

$$\int_{-\infty}^{0} m(s)ds < a - |b|, \int_{-\infty}^{0} m(s)e^{-rs}ds < \infty, r > 0 \quad (4.16)$$

则方程(4.15)的零解对$(C_{\infty}^{r}, R_n)$是一致渐近稳定的.

不难逐一验证它满足定理 4.4 的条件.

在各种相空间的选择之下都有 RFDE$(f,\Omega)$稳定性定理的很多推广,例如[11]中所列举者.

## §5 无穷时滞 NFDE$(D,f,\Omega)$的稳定性

与 RFDE$(f,\Omega)$一样,相空间有各种不同的选择,因而得出各种不同的稳定性准则,现在我们重新给出解的整体存在唯一性定理,在这个前提下沿用 §4 的稳定性定义,给出了诸稳定性定理.

对 NFDE$(D,F,\Omega)$

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t) = F(t,x_t) \quad (5.1)$$

记 $Z: R_- \to R^n$ 是连续函数全体构成的线性空间,定义拟范数$|\cdot|_Z$,$Z^*$是由$|\cdot|_Z$导出的 Banach 空间,其范数简记为$|\cdot|$,$Z^*$也略为 $Z$ 而不致混淆,对$\forall\ \varphi\in Z, \beta\in R_+$,记 $\varphi^\beta$ 是 $\varphi$ 在$[-\beta,0]$上的限制,$Z^\beta$ 是这种函数全体构成的空间,它的拟范数$|\cdot|_\beta$及映射 $\tau^\beta: Z \to Z^\beta$ 定义为

$$|\varphi|_\beta = \inf\{|\eta| : \eta\in Z, \eta^\beta = \varphi\}, \varphi\in Z^\beta$$

$$[\tau^\beta\varphi](\theta) = \varphi(\beta+\theta), \theta\leqslant -\beta$$

再记

$$|\varphi|_{[-\beta,0]} = \sup_{\theta\in[-\beta,0]} |\varphi(\theta)|$$

对 $\varphi\in Z$,令$|\varphi|_\beta = |\varphi^\beta|_\beta$,则$|\cdot|_\beta$定义了 $Z$ 中的一个拟范数.

对空间 $Z$ 的基本公理:

$(H_1)$:对$\forall\ \sigma\in R, A\geqslant 0, x: (-\infty,\sigma+A]\to R^n, x_\sigma\in Z, x(t)$在$[\sigma,\sigma+A]$上连续,则对$\forall\ t\in[\sigma,\sigma+A]$,有 $x_t\in Z$,且 $x_t$ 关于 $t$ 在

$[\sigma,\sigma+A]$上连续.

$(H_2)$:∃ 常数 $k>0$,使得

$$|\varphi|\leqslant k|\varphi|_{[-\beta,0]}+|\varphi|_\beta,\varphi\in Z,\beta\geqslant 0$$

$(H_3)$:∃ 局部有界函数 $M(\beta)$,使得

$$|\tau^\beta\varphi|_\beta\leqslant M(\beta)|\varphi|,\varphi\in Z,\beta\geqslant 0$$

$(H_4)$:∃ 常数 $k_0>0$,使得

$$|\varphi(0)|\leqslant k_0|\varphi|,\varphi\in Z$$

显然在$(H_1\sim H_4)$之下,对$(H_1)$中的函数 $x$ 有不等式:

$$|x_t|\leqslant k\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s)|+M(t-\sigma)|x_\sigma|,t\in[\sigma,\sigma+A] \tag{5.2}$$

记 $C_a$ 是 $R^a_-\to R^n$ 的有界连续函数全体构成的空间,其范数定义为

$$|u|_a=\sup_{t\in R^a}|u(t)|,u\in C_a \tag{5.3}$$

对 $a\in R$,记 $L^n_a$ 是 $R^a_+\to R^n$ 的 Lebesque 局部可积函数全体构成的集合,$R^a_+=[a,+\infty)$.

今设 $D(t,\varphi)=\varphi(0)-g(t,\varphi)-k(t,\varphi)$,$F(t,\varphi)=f(t,\varphi)+h(t,\varphi)+Q(t)$,则(5.1)写成

$$\frac{d}{dt}[x(t)-g(t,x_t)-k(t,x_t)]=f(t,x_t)+h(t,x_t)+Q(t) \tag{5.4}$$

其中 $Q(t)\in L^n_a$,$f,g,k,h$ 是$\Omega=R^a_+\times Z\to R^n$ 的连续函数.称函数 $x:R^{\sigma+A}_-\to R^n$,$x_\sigma\in Z$,$x(t)$在$[\sigma,\sigma+A]$上连续,是(5.4)的解,若对 $\forall t\in[\sigma,\sigma+A]$,$D(t,x_t)$关于 $t$ 可微,且 $x(t)$在$[\sigma,\sigma+A]$上满足(5.4),若 $x(t,\sigma,\varphi)$是(5.4)的解,且满足初始条件 $x_\sigma(\sigma,\varphi)=\varphi$,则称 $x(t,\sigma,\varphi)$是(5.4)过$(\sigma,\varphi)$的解,整体存在定理为

**定理** 5.1　若(5.4)中的函数 $f,g,k,h$ 满足条件

$$\text{(i)}\ g(t,\varphi)=\int_{-\infty}^0[d_\theta\eta(t,\theta)]\varphi(\theta),\varphi\in Z \tag{5.5}$$

其中$\eta(t,\theta)$是$R_-$上的局部有界变差函数，且存在正常数$\varepsilon_0$及$[0,\varepsilon_0]$上的非负不减函数$\delta(s)$，$\delta(0)=0$使得

$$\left|\int_{-s}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]\varphi(\theta)\right|\leqslant\delta(s)|\varphi|_{[-s,0]},(t,\varphi)\in\Omega,\ s\in[0,\varepsilon_0]$$

又设有非负连续函数$G(t)$，使得

$$|g(t,\varphi)|\leqslant G(t)|\varphi|,(t,\varphi)\in\Omega \tag{5.6}$$

(ii)对$\forall\ t\in R_+^a$，$k(t,0)\equiv0$，且有常数$\rho\in[0,\frac{1}{k})$使得

$$|k(t,\varphi_1)-k(t,\varphi_2)|\leqslant\rho|\varphi_1-\varphi_2|,(t,\varphi_i)\in\Omega,$$
$$i=1,2,3\cdots\cdots$$

(iii)$f(t,\varphi)$关于$\varphi$上线性的，有非负连续函数$F(t)$使得

$$|f(t,\varphi)|\leqslant F(t)|\varphi|,(t,\varphi)\in\Omega$$

(iv)$\exists\ H(t)\in L_a^1$使得$|h(t,\varphi)|\leqslant H(t)|\varphi|,(t,\varphi)\in\Omega$

则对$\forall\ (\sigma,\varphi)\in\Omega$，方程(5.4)过$(\sigma,\varphi)$的解必在$R$上存在.

(证明参看[11])

现在我们设$\Omega=R\times Z$，系统的解在$R$上存在，且$Z$满足条件$(H_3)'$.

$(H_3)'$：$(H_3)$中的函数$M(\beta)$有界：$M(\beta)\leqslant M$.

为了稳定性定理能顺利推广，不妨设$h\equiv0$，$Q\equiv0$且对方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)-g(x_t)-k(x_t)]=f(t,x_t) \tag{5.7}$$

中，$g,k,Z\to R$满足定理5.1的条件(i)(ii)，且设$k(\varphi)$关于$\varphi$是线性的，$f:R\times Z\to R^n$连续，把$R\times W$映入$R^n$的有界集，$W\subset Z$是有界闭集，$f(t,0)\equiv0$，诸记号与基本假定为

$$Z_\beta=\{\varphi\in Z:\varphi_{-\beta}\in Z,\beta\geqslant0,\varphi(s)\text{在}[-\beta,0]\text{上连续}\}$$

$$|\varphi|_{(\beta)}=\sup_{\theta\in[-\beta,0]}|\varphi_\theta|$$

$(L)$：$\exists\ R^2\times R_-$上的连续函数$\delta_0(t,\sigma)>0$，使得(5.7)的解$x(t)$满足

$$|x_t|\leqslant L(t,\sigma,|x_\sigma|),t\geqslant\sigma,\text{若}|x_\sigma|<\delta_0(t,\sigma)$$

$(UL)$在$(L)$中，$L(t,\sigma,r)$和$\delta_0(t,\sigma)$满足

$$L(t,\sigma,r)=L(t-\sigma,0,r),\delta_0(t,\sigma)=\delta(t-\sigma,0)$$

$(F)F(r)$在$R_-$上连续非减，且当$r>0$时$F(r)>r$.

$(P)P(t,r)$在$R\times(0,\infty)$上连续、对$r$非减、且满足

$$P(t,r)\leqslant t,\lim_{t\to\infty}P(t,r)=\infty$$

$(UP)$：在$(P)$中设$q(r)=t-P(t,r)$是正的且与$t$无关.

**定义** 5.1　称算子$D(\varphi)=\varphi(0)-g(\varphi)-k(\varphi)$是稳定的，若方程

$$\begin{cases}D_{x_-}=0\\x_\sigma=\varphi\in C_D,C_D=\{\varphi\in Z;D\varphi=0\}\end{cases}\tag{5.8}$$

的零解是一致渐近稳定的.

**引理** 5.1　若$D$是稳定的，则必存在常数$L,\alpha\geqslant0$，使得(5.8)的解$x(t,\sigma,\varphi)$满足

$$|x_t(\sigma,\varphi)|\leqslant L|\varphi|e^{-\alpha(t-\sigma)},t\geqslant\sigma\tag{5.9}$$

**引理** 5.2　$\exists\ \varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots\varphi_n\in Z$，使得$D\Phi=E,\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots\varphi_n),D\Phi\triangleq(D\varphi_1,D\varphi_2,\cdots\cdots,D\varphi_n)$，$E$是$n\times n$单位阵.

**证**　作函数$\Psi:R_-\to R$

$$\Psi(\theta)=\begin{cases}0 & \theta\leqslant-s\\1+\dfrac{\theta}{s} & \theta\in[-s,0]\end{cases}$$

由$(H_1)$知，$E\Psi$的每一列元素$\Psi_1$均属于$Z$，且可取$s$充分小，使得

$$\det DE\Psi\neq0,1-\rho K-\delta(s)>0$$

令$\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_n)=\Psi E(DE\Psi)^{-1}$，则有$D\Phi=E$且$\varphi_i\in Z$.

**引理** 5.3　若$D$是稳定的，则必$\exists$正常数$b,\alpha$，使得方程

$$Dx_t=h(t),h\in C(R,R^n)\tag{5.10}$$

的任何解$x(t)$满足不等式

$$|x_t|\leqslant be^{-\alpha(t-\sigma)}|x_t|+b\sup_{\sigma\leqslant u\leqslant t}|h(u)|\tag{5.11}$$

**证** 设 $x(t,\sigma,\varphi,h)$是(5.10)过$(\sigma,\varphi)$的解，则有

$$x(t)=x(\sigma,x_t-\Phi h(\sigma),0)(t)+x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t) \quad (5.12)$$

其中 $\Phi$ 是引理 5.2 中存在的矩阵，由引理 5.1⇒存在常数 $L,\alpha>0$ 使得

$$|x_t(\sigma,x_\sigma-\Phi h(\sigma),0)|\leqslant L|x_\sigma-\Phi h(\sigma)|e^{-\alpha(t-\sigma)}$$

$$\leqslant L(|x_s|+K\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}|\Phi(\theta)h(\sigma)|)e^{-\alpha(t-\sigma)}$$

$$\leqslant L|x_\sigma|e^{-\alpha(t-\sigma)}+KLM_0|h(\sigma)|$$

其中 $M_0=\sup_{\theta\leqslant 0}|\Phi(\theta)|<\infty$，又由等式

$$x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t)-g(x_t(\sigma,\Phi h(\sigma),h))$$

$$-K(x_t(\sigma,\Phi h(\sigma),h))=h(t)$$

得

$$|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t)|$$

$$\leqslant\left|\int_{-\infty}^{0}[d\eta(\theta)]x_t(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)\right|+\rho|x_t(\sigma,\Phi h(\sigma),h)|+|h(t)|$$

因为 $x_\sigma(\sigma,\Phi h(\sigma),h)=\Phi h(\sigma)\sup_{\theta\leqslant -s}|\Phi(\theta)|=0$，故

$$\left|\int_{-\infty}^{t}[d\eta(\theta)][x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t+\theta)]\right|$$

$$=\left|\int_{-s}^{0}[d\eta(\theta)][x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t+\theta)]\right|$$

$$\leqslant\delta(s)\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(t+\theta)|$$

$$\leqslant\delta(s)\sup_{\sigma-s\leqslant\theta\leqslant\sigma}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|$$

$$+\delta(s)\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|$$

$$\leqslant\delta(s)M_0|h(\sigma)|+\delta(s)\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|$$

又由不等式(5.2)⇒

$$|x_t(\sigma,\Phi h(\sigma),h)|\leqslant K\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|+M_1|\Phi h(\sigma)|$$

$$\leqslant K\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|+MKM_0|h(\sigma)| \qquad (5.13)$$

故有

$$\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|\leqslant\delta(s)M_0|h(\sigma)|$$

$$+\delta(s)\sup_{\sigma-\theta\leqslant\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|+\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|h(\theta)|$$

$$+\rho MKM_0|h(\theta)|+\rho K\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|$$

亦即

$$\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\sigma,\Phi h(\sigma),h)(\theta)|$$

$$\leqslant\frac{[\delta(s)M_0+\rho MKM_0]|h(\sigma)|+\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|h(\theta)|}{1-\delta(s)-\rho K} \qquad (5.14)$$

把(5.14)代入(5.13)，令

$$b=\max\left\{L,KLM_0,MM_0K,\frac{\rho K^2MM_0}{1-\rho K-\delta(s)},\frac{\delta(s)M_0K}{1-\rho K-\delta(s)},\frac{K}{1-\rho K-\delta(0)}\right\}$$

由(5.12)⇒(5.11)成立.

应用不等式(5.11)和传统的证明方法，可得 $V$ 泛函法及 Разумихин 型稳定性定理.

**定理5.2** 设$D$是稳定算子，若∃ $R\times Z$到$R^n$的连续函数 **$V(t,\varphi)$及$R$上的非负不减函数$u(s),v(s),\omega(s)$：$u(0)=v(0)=\omega(0)=0$，且$u(s),v(s)>0,s>0$时满足下列诸条件**

(i) $u(|D\varphi|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|)$

(ii) $\dot V_{(5.7)}(t,\varphi)\leqslant-\omega(|D\varphi|)$

则(5.7)的零解是一致稳定的；若除(i)(ii)外还成立 $\lim\limits_{s\to\infty}u(s)=\infty$，则(5.7)的解是一致有界的，若 $\omega(s)>0,s\neq0$ 时，(5.7)的零解是一致渐近稳定的.

**定理5.3** 若$(L)$满足，且存在定义在$\{(t,\varphi):\varphi\in Z_{t-\sigma}\},t\geqslant\sigma$上的实值连续函数$V(t,\sigma,\varphi),\sigma\in R$，它满足

(i)$u(|D\varphi|)\leqslant V(t,\sigma,\varphi)\leqslant v(t,\sigma,(|\varphi_{t,t-\sigma}))$，其中 $u(s)$连续非减，$u(0)=0$，$u(s)>0$，$s>0$ 时，$v(t,\sigma,r)$在 $R^2\times R_-$上连续非负，对 $r$ 非减且 $b(t,\sigma,0)\equiv 0$.

(ii)$\dot{V}_{(5.7)}(t,\sigma,\varphi)\leqslant\omega(t,V(t,\sigma,\varphi))$且

$V(s,\sigma,\varphi_{s-t})\leqslant V(t,\sigma,\varphi)$，$s\in[P(t,V(t,\sigma,\varphi)),t]$时

其中 $\omega(t,r)$是 $R\times R_-$上非负连续函数，$\omega(t,0)\equiv 0$，$P(t,r)$满足条件($P$).

(iii)$D$ 是稳定算子.

(iv)方程 $\dot{y}=\omega(t,y)$的零解是稳定的.

则(5.7)的零解是稳定的，此外若还满足($UL$)($UP$)且(i)中的 $V(t,\sigma,r)$仅与 $r$ 有关，则由 $\dot{y}=\omega(t,y)$的零解一致稳定性可推出(5.7)的零解是一致稳定的.

**定理** 5.4　设 $D$ 是稳定算子，($UL$)成立，若存在 $V(t,\sigma,\varphi)$满足下列条件：

(i)$u(|D\varphi|)\leqslant V(t,\sigma,\varphi)\leqslant v(|\varphi|_{t-\sigma})$，这里 $u,v$ 满足定理 5.2 的条件(i).

(ii)$\dot{V}_{(5.2)}(t,\sigma,\varphi)\leqslant-\omega(t,V(t,\sigma,\varphi))$

当 $V(t,\sigma,\varphi)>0$，$P(t,V(t,\sigma,\varphi))\geqslant\sigma$ 且

$V(s,\sigma,\varphi_{s-t})\leqslant F(V(t,\sigma,\varphi))$，$s\in[P(t,V(t,\sigma,\varphi)),t]$成立，其中 $\omega(t,r)$是 $R\times R_-$上的非负连续函数，$\omega(t,0)\equiv 0$，$P(t,r)$和 $F(r)$分别满足($UP$)和($F$).

(iii)方程 $\dot{y}=-\omega(t,y)$的零解是一致渐近稳定的.

则(5.7)的零解是一致稳定的.

诸定理的证明作为练习，也可参看[11]，NFDE($D,f,\Omega$)的稳定性有许多推广工作.

## §6 无穷时滞FDE周期解的存在性

这里以[177]中的结果为例，介绍无穷时滞泛函微分方程周期解的存在性准则.

考虑具无穷时滞的 Volterra 积分微分方程以及一般形式下的 RFDE

$$\dot{x}(t)=A(t)x+\int_{-\infty}^{t}D(t,s)x(s)ds+e(t),x\in R \tag{6.1}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(s);-\infty<s\leqslant t),x\in R^n \tag{6.2}$$

或

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),x\in R^n \tag{6.3}$$

对 $x\in R^n$，$|x|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，$x_i$ 为 $x$ 的分量，若 $x:[a,b]\to R^n$，定义 $|x|^{[a,b]}=\sup\{|x(s)|;s\in[a,b]\}$. $\varphi:R_-\to R^n$ 全体记为 $C_{-\infty}$，$BC_{-\infty}$ 表示 $C_{-\infty}$ 中有界连续函数全体，在 $BC_{-\infty}$ 中定义 $|\varphi|=\sup\{|\varphi(s)|;s\in R_-\}$. 又以 $C_{-\infty}(D)$ 表示 $C_{-\infty}$ 的子集，$C_{-\infty}(D)$ 中的函数皆取值于 $D\subset R^n$.

设 $x:(-\infty,A]\to R^n$ 连续，当 $t\in R^A_-$ 时定义 $\hat{x}_t\in C_{-\infty}$.

$$\hat{x}_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in R_-$$

对 $\varphi,\psi\in C_{-\infty}$ 定义范数

$$\rho(\varphi,\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|\varphi-\psi|^{[-k,0]}}{1+|\varphi-\psi|^{[-k,0]}} \tag{6.4}$$

则 $\rho$ 符合距离三公理 $\Rightarrow(C_{-\infty},\rho)$ 与 $(BC_{-\infty},\rho)$ 是度量空间，显然有

**引理** 6.1 $(BC_{-\infty},\rho)$ 是局部凸的线性拓扑空间.

**引理** 6.2 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $C_{-\infty}$ 中的序列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n,\varphi_0)=0$ 的充要条件是：对任意的整数 $K$，$\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_n,\varphi_0|^{[-K,0]}=0$

$V$ 泛函，$V(t,\varphi):R\times C_{-\infty}\to R_+$ 满足

$(a_1)$对$\forall\ \varphi\in C_{-\infty}$，$V(t,\varphi)$对$t\in[\alpha,\beta]$连续.

$(a_2)V(t,\varphi)$关于$\varphi$是局部 Lipschitz 型的.

$V$ 函数 $V(t,x):R\times R^n\to R_+$，也满足$(a_1)(a_2)(V(t,\varphi)$代之以$V(t,x))$.

**定义 6.1** 泛函 $V(t,\varphi)$(或 $V(t,x)$)称为凸的，若对$\forall\ B\geqslant 0$及$\forall\ t\in[\alpha,\beta]$，集$\{\varphi\in C_{-\infty}:V(t,\varphi)\leqslant B\}$(或者集$\{x\in R^n:V(t,x)\leqslant B\}$)是凸的.

**定理 6.1** 若满足条件

(i)$\exists\ \tau>0$，使得对$\forall\ t\in[\alpha,\beta]$及$\varphi\in BC_{-\infty}$，有

$$f(t+\tau,\varphi)=f(t,\varphi) \tag{6.5}$$

(ii)$\exists$ 凸泛函$V:[\alpha,\beta]\times BC_{-\infty}\to R_+$及楔函数$W(r)$，使得

$$W(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)$$

且对$\forall\ H>0$，$V$ 对于满足$|\varphi|\leqslant H$ 的 $\varphi$关于 $\rho$ 连续.

(iii)存在可微函数 $u:[\alpha,\beta]\to R_+$与函数 $g:[\alpha,\beta]\times R_+\to R$，$g(t,V)$关于 $V$ 是局部 Lipschitz 型的，当 $\sigma\in[\alpha,\beta]$时，有

$$u(\sigma+\tau)\leqslant u(\sigma),V(\sigma,0)\leqslant u(\sigma)$$

当 $t\in[\sigma,\sigma+\tau]$时，有 $\dot{u}(t)\geqslant g(t,u(t))$

(iv)沿方程(6.2)的任何解 $x$，$V(t,\hat{x}_t)$关于 $t$ 连续，当 $V(t,\hat{x}_t)\geqslant u(t)$时有

$$\dot{V}_{(6.2)}(t,\hat{x}_t)\leqslant g(t,V(t,\hat{x}_t))$$

(v)对于满足 $W(|\varphi|)\leqslant u_0=\max\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+\tau}u(t)$的$\forall\ \varphi\in C_{-\infty}$，有

$$V(\sigma,\varphi)\leqslant V(\sigma+\tau,\varphi)$$

(vi)对$\forall\ H>0$，方程(6.2)的解依 $\rho$ 连续依赖于满足$|\varphi|\leqslant H$的初始函数 $\varphi$.

则方程(6.2)存在 $T$—周期解.

**证** 考虑集合

$S=\{\varphi\in C_{-\infty}:V(\sigma,\varphi)\leqslant u(\sigma),|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|$

$\leqslant M|s_1-s_2|, s_1, s_2 \in R_-, W(|\varphi|)\leqslant u_0\}$

这里 $M=\sup\{|f(t,\varphi)|: \sigma\leqslant t\leqslant \sigma+\tau, W(|\varphi|)\leqslant u_0\}$. 由于 $W(0)\leqslant V(\sigma,0)\leqslant u(\sigma)$, $\varphi\equiv 0\in S\Rightarrow S$ 非空.

由 $V$ 是凸的, $W(r)$ 为楔函数, 可证 $S$ 是 $C_{-\infty}$ 中的凸集, 不仅如些, $S$ 是 $(C_{-\infty},\rho)$ 中紧集, 设 $\{\varphi_n\}$ 为 $S$ 中的叙列, 要证它存在子序列 $\{\varphi_{n_k}\}$, 当 $n_k\to\infty$ 时 $\varphi_{n_k}$ 依 $\rho$ 趋于某个 $\varphi_0\in S$, 记 $I_k=[-k,0]$, $i=1,2,\cdots\cdots$ 在 $I_1$ 上由 $S$ 的定义 $\Rightarrow\{\varphi_n\}$ 一致有界且等度连续. 由 Ascoli-Arzela 定理 $\Rightarrow\{\varphi_n\}\exists$ 子序列 $\{\varphi_n^{(1)}\}$ 在 $I_1$ 上一致收敛于某一连续函数 $\varphi_0^{(1)}$, 在 $I_2$ 上, 同理 $\Rightarrow\{\varphi_n^{(1)}\}$ 也存在子序列 $\{\varphi_n^{(2)}\}$ 一致收敛于 $\varphi_0^{(2)}$, 且当 $s\in I_1$ 时有 $\varphi_0^{(2)}(s)=\varphi_0^{(1)}(s)$, 重复这种做法, 并取 $\{\varphi_n^{(n)}\}$, 它在 $I_k(k=1,2,\cdots\cdots)$ 上一致收敛于连续函数 $\varphi_0$, $\varphi_0$ 满足

$$\varphi_0(s)=\varphi_0^{(k)}(s), s\in I_k, k=1,2,\cdots\cdots$$

由引理 6.2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n^{(n)},\varphi_0)=0$.

现在验证 $\varphi_0\in S$, 首先, 由于 $V$ 对 $\varphi$ 依 $\rho$ 连续, 故由 $V(\sigma,\varphi_n^{(n)})\leqslant u(\sigma)$ 可得 $V(\sigma,\varphi_0)\leqslant u(\sigma)$, 对任意的正整数 $k$ 以及 $\forall\ s_1,s_2\in I_k$ 有

$$|\varphi_n^{(n)}(s_1)-\varphi^{(n)}{}_n(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|$$

由引理 6.2 $\Rightarrow|\varphi_0(s_1)-\varphi_0(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|$ 又对 $\forall\ k$ 有

$$W(|\varphi_n^{(n)}|^{[-k,0]})\leqslant W(\varphi_n^{(n)}|)\leqslant u_0$$

由引理 6.2 $\Rightarrow W(|\varphi_0|^{[-k,0]})\leqslant u_0$, 于是 $W(|\varphi_0|)\leqslant u_0$, $\varphi_0\in S\Rightarrow S$ 为 $(C_{-\infty},\rho)$ 中紧集.

在 $S$ 中定义映射 $P(\varphi)=\hat{x}_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi)$, $\varphi\in S$, 由条件(vi)知 $P(\varphi)$ 连续, 下证 $P(\varphi)\in S$, 记 $V(t)=V(t,\hat{x}_t(\sigma,\varphi))$, $t\geqslant\sigma$, 由(iv)$\Rightarrow V(t)$ 连续, 由条件(iii)(iv)及微分不等式的比较定理有 $V(t)\leqslant u(t)$, $t\in[\sigma,\sigma+\tau]$, 再由条件(ii)$\Rightarrow$在$[\sigma,\sigma+\tau]$上 $x(t,\sigma,\varphi)$ 存在, 由于当 $t\in[\sigma,\sigma+\tau]$ 时有

$$W(|x(t,\sigma,\varphi)|)\leqslant V(t,\hat{x}_t(\sigma,\varphi))\leqslant u(t)\leqslant u_0$$

以及 $W(|\varphi|)\leqslant u_0\Rightarrow W(|\hat{x}_{\sigma+\tau}|)\leqslant u_0$, 由(v)及(iii)有

$$V(\sigma,\hat{x}_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi))\leqslant V(\sigma+\tau,\hat{x}_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi))$$
$$=V(\sigma+\tau)\leqslant u(\sigma+\tau)\leqslant u(\sigma)\leqslant u_0$$

此外有 $|\hat{x}_{\sigma+\tau}(s_1)-\hat{x}_{\sigma+\tau}(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|,s_1,s_2\in R_-\Rightarrow P(\varphi)\in S\Rightarrow$ $P$ 是 $S\to S$ 的映射，由 Schauder—Тихонов 定理 $P$ 在 $S$ 内有不动点 $\varphi^*$，即 $P(\varphi^*)=\varphi^*$，亦即 $\hat{x}_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi^*)=\hat{x}_t(\sigma,\varphi^*)$. 由(i)$\Rightarrow x(t+\tau,\sigma,\varphi^*)$也是(6.2)的一个解，由解的唯一性$\Rightarrow x(t+\tau,\sigma,\varphi^*)=x(t,\sigma,\hat{x}_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi^*))=x(t,\sigma,\varphi^*),t\geqslant\sigma\Rightarrow x(t,\sigma,\varphi^*)$是(6.2)的 $T$—周期解．证毕.

对方程(6.1)，我们记

$$M(t,k)=A(t)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}|(D(t,s)|ds+k\int_{-t}^{\infty}|D(u,t)|du$$

其中 $k$ 中待定正数，$t>-\infty$，且上式积分存在，则有

**定理** 6.2　若 $A(t),e(t)$ 皆 $T$—周期的，$D(t,s)=D(t+\tau,s+\tau)$，$|A(t)|\leqslant M$ 且满足

(i)(6.1)具有"衰退记忆"，即对$\forall\ \varepsilon_1>0$，$\exists\ L>0$，使对$\forall\ t_1>-\infty,t-t_1\geqslant L$有$\int_{-\infty}^{t_1}|D(t,s)|ds<\varepsilon_1$.

(ii)对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ N$>0$，使对$\forall\ t>-\infty$有$\int_{-\infty}^{t-N}\int_{t}^{\infty}|D(u,s)|duds<\varepsilon$.

(iii)$\exists\ k>0$，使得 $k\int_{t}^{\infty}|D(u,s)|du\leqslant|D(t,s)|$.

(iv)$\exists\ k>\frac{1}{2}$，使得当 $t>-\infty$时，$2m(t,k)-\frac{1-2k}{2k}k\leqslant 0$.

则方程(6.1)存在 $T$—周期解.

**证**　在本定理的条件下，可以逐一验证定理 6.1 的所有条件成立，而(6.1)又含于(6.2)之中，故得证.

事实上，定理 6.1 的条件(i)是显然的，下证(vi)，由(6.2)(自然也包括(6.1)的解依 $\rho$ 连续依赖于 $\varphi$，只要证对$\forall\ \epsilon>0$ 及 $J>0$，$\exists\ \delta>0,\hat{m}>0$ 使得对$\forall\ H>0$，当$|\varphi_1|,|\varphi_2|\leqslant H$，$|\varphi_1-\varphi_2|^{[-\hat{m},0]}<\delta$

时有

$$|x(t,0,\varphi_1)-x(t,0,\varphi_2)|<\varepsilon,0\leqslant t\leqslant J$$

令 $x_i(t)=x(t,0,\varphi_i),i=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant J$. 由条件(i)，在区间 $0\leqslant t\leqslant J$ 上有

$$\begin{aligned}&|x_1(t)-x_2(t)|\\ \leqslant&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|+M\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|ds\\ &+2HJ\varepsilon_1+\int_{-L}^0\int_0^t|D(u,s)||x_1(s)-x_2(s)|duds\\ &+\int_0^t\int_s^t|D(u,s)|(x_1(s)-x_2(s)|duds\end{aligned}$$

当 $\rho'(\varphi_1,\varphi_2)<\delta$ 时，$\exists\ a>0$ 使 $|\varphi_1-\varphi_2|^{[-L,0]}\leqslant a\delta$，又由条件(iii)，(iv)$\Rightarrow\exists\ P>0,Q>0$，使当 $-\infty<s<t$ 时有

$$0\leqslant\int_{-\infty}^t\int_t^\infty|D(u,s)|duds\leqslant P$$

$$0\leqslant\int_s^t|D(u,s)|du\leqslant Q$$

故有

$$\begin{aligned}&|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant(a\delta+2HJ\varepsilon_1+\alpha p\delta)\\ &+(M+Q)\int_0^t|x_1(s)-x_2(s)|ds,\text{当 }0\leqslant t\leqslant J\end{aligned}$$

$\Rightarrow$定理 6.1(vi)成立，再验证定理 6.1 的条件(ii)，令

$$V(t,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+k\int_{-\infty}^0\int_t^\infty|D(u,t+\theta)|\varphi^2(\theta)dud\theta$$

则有

$$V(t,\varphi)\geqslant\frac{1}{2}\varphi^2(0)\triangleq W(|\varphi(0)|)$$

至于 $V(t,\varphi)$ 的凸性，可由

$$[(1-\lambda)\varphi+\lambda\psi]^2\leqslant(1-\lambda)\varphi^2+\lambda\psi^2,0<\lambda<1$$

直接推得，尚须证 $V$ 对 $\varphi$ 依 $\rho$ 连续，由条件(ii)，对$\forall\ \varepsilon>0$，存在正

整数 $N$，使得

$$\int_{-\infty}^{t-N}\int_{t}^{\infty}|D(u,s)|duds=\int_{-\infty}^{-N}\int_{t}^{\infty}|D(u,t+\theta)|dud\theta<\varepsilon$$

对于 $\varphi_i\in C_{-\infty}$，$|\varphi_i|\leqslant H$，$(i=1,2)$可证得

$$|V(t,\varphi_1)-V(t,\varphi_2)|\leqslant 2k\varepsilon H|\varphi_1-\varphi_2|^{(-\infty,-N]}$$

$$+\left\{H+2kH\int_{-N}^{0}\int_{t}^{\infty}|D(u,t+\theta)|dud\theta\right\}|\varphi_1-\varphi_2|^{[-N,0]}$$

当 $\rho(\varphi_1,\varphi_2)$充分小时，$|\varphi_1-\varphi_2|^{[-N,0]}$将充分地小，即推出 $V(t,\varphi)$对满足$|\varphi|\leqslant H$ 的 $\varphi$ 依 $\rho$ 连续，即定理 6.1(ii)成立. 再验证定理 6.1 的(iii)～(v). 为方便计，改写 $V(t,\varphi)$为

$$V(t,\hat{x}_t)=\frac{1}{2}x^2(t)+\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}|D(u,s)||x(s)|^2duds$$

$$\dot{V}_{(6.1)}(t,\hat{x}_t)\leqslant m(t,k)x^2(t)$$

$$+(\frac{1}{2}-k)\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)|x^2(s)ds+|x(t)||e(t)|$$

令 $u(t)=M$，$V(t,\hat{x}_t)\geqslant u(t)=M$ 时有

$$x^2(t)\geqslant 2M-2k\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}|D(u,s)||x^2(s)|duds$$

由于 $m(t,k)\leqslant 0\Rightarrow$

$$\dot{V}_{(6.1)}(t,\hat{x}_t)\leqslant 2m(t,k)M+[-2m(t,k)+\frac{1-2k}{2k}k]V$$

$$+\sqrt{2}LV^{\frac{1}{2}}\triangleq g(t,V)$$

当 $M$ 充分大时有

$$g(t,u(t))=g(t,m)=[\frac{1-2k}{2k}kM^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}L]M^{\frac{1}{2}}<0$$

故 $\dot{u}(0)=0>g(t,m)\Rightarrow$定理 6.1(iv)及(iii)成立. 容易推出 $V(t,\varphi)=V(t+\tau,\varphi)$即(v)也成立. 故由定理 6.1⇒本定理成立.

[8]中引进了空间 $C_k$，并给出了 $h$ 一致有界及 $h$ 一致最终有界的概念，然后把周期解的存在性联系起来，对(6.2)有如下结果.

**定理 6.3** 设

(i) $f(t,\varphi)$关于 $t$ 是 $T$—周期函数.

(ii)对$\forall\ \alpha>0$,$\exists\ L(t,\alpha)>0$,使得当$|\varphi|_h\leqslant\alpha$时有

$$|f(t,\varphi)|\leqslant L(t,\alpha)$$

其中 $L(t,s)$是 $t$ 的连续函数.

(iii)(6.2)中解是 $h$ 一致有界及 $h$ 一致最终有界的,界为 $b$,则(6.2)存在 $T$—周期解.

## §7 若干注释

### 1. 关于"衰退记忆"和"健忘"的概念

§1 中我们已指出,在空间 $B=C(R_-,R^n)$中若简单地取上确界模,便无法建立空间 $B$ 中的拓扑性质,根本不可能谈论解的渐近稳定性问题,若 $\varphi\neq0,\varphi\in B$,则恒成立

$$|\varphi|=\sup_{\theta\in R_-}|\varphi(t+\theta)|\neq0 \tag{7.1}$$

例如 $x(t):(-\infty,A)\to R^n,A\in R$ 或为$+\infty$,不妨设 $A\geqslant0$

$$x_t=x(t+\theta),\ \theta\in R_-,t\geqslant0$$

总含有 $\varphi$,换言之,$x(t)$定义为

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ t\in R_-\\ x(t)\text{在}[0,A]\text{上的限制},t\in[0,A]\end{cases} \tag{7.2}$$

对$\forall\ t\geqslant0$ 成立.(7.2)表明,无穷时滞 FDE 的情形与有界滞量情形根本区别之处在于:不能在有限时间以后摆脱滞量的直接影响,通俗地说,它老是记住过去的历史,对$\forall\ t\geqslant0$,时刻不忘.

要研究无穷时滞 FDE 解的性态,就必须指定某种消除"记忆"的条件,目前有两种有效的附加条件:

第一,"衰退记忆".

在§4 中已定义了空间 $B$ 是容许空间的条件(其中 $B$ 记为

$X$)，并且指出："容许空间$(B,|\cdot|_B)$称为具有衰退记忆，若 $k(s)=$ const.，且 $\lim_{s\to\infty}M(s)=0$"，这意味我们把消除记忆的条件加在空间 $B$ 上.

第二，"健忘函数".

这是指我们用 Ляпунов 函数法，或者 Ляпунов 泛函法来研究无穷时滞 FDE 解的稳定性、有界性等性态时，把消除记忆的限制加在 $V$ 函数上，诸定义表述如下：

**定义 7.1** 称泛函$V(t,x(\cdot))$是健忘的，若存在楔函数 $W_1(r)$，常数 $l>0$，满足

(i)$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W_1(|x|^{[\alpha,t]})$，$t\geqslant\alpha$，$x\in C([\alpha,t],R^n)$.

(ii)对于任意的 $D>0$，$\delta>0$，$\sigma\geqslant\alpha$，$\exists$ $s>0$，使当 $|x|^{[\alpha,\sigma]}\leqslant D$，$|x|^{[\sigma,\sigma+s]}\leqslant\delta$，$t\geqslant\sigma+s$ 时有

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant l\max\{W_1(\delta),W_1(|x|^{[\sigma+s,t]})\}$$

若 $s$ 与 $\sigma$ 无关，则称 $V(t,x(\cdot))$是一致健忘的.

**定义 7.2** 称 $V$ 泛函，$V(t,x(\cdot))$是 I 型健忘的，若存在楔函数 $W_2(r)$，$W_3(r)$，$\lambda(r)$满足：对$\forall$ $D>0$，$\delta>0$ 存在 $s=s(D,\delta)>0$，使当 $\sigma\geqslant\alpha$，$|x|^{[\alpha,\sigma]}\leqslant D$，$t\geqslant\sigma+s$ 时有

$$0\leqslant W(t,x,(\cdot))\leqslant W_2(\delta)+W_3(|||\lambda(|x|)|||^{[\sigma,t]})$$

其中 $|||\cdot|||$为 ess. sup 范数.

类似地可定义 II 型健忘、III 型健忘函数 $V$[111].

可见，为了达到消除长期记忆带来的不便，可以用不同的方式加入条件限制，肯定不是唯一的做法，可以得出相应的各种稳定性、有界性定理.

### 2. 关于 $B$ 空间的公理系统

从整体上看，对无穷时滞 FDE 的处理过程大致可归纳为

(1)建立合适的相空间，确定相应的范数，使之构成 Banach 空

间，以保证必需的代数和拓扑结构，给定所需的若干基本公理.

(2)根据研究问题的需要，再给出一些公理，以确保有界滞量相应结果的顺利推广.

基于我们的目的，必然会有各种各样的公理系统.于是存在如下的几个重要课题：

(Ⅰ)如何划定研究对象.如基本理论，稳定性理论，解的有界性，最终有界性，周期解和概周期解的存在性、渐近性、振动性等等都是FDE要论证的课题，倘若对普遍的公理体系中划出一部分来保证基本理论与Ляпунов意义下的稳定性理论，那么究竟需要多少公理？

(Ⅱ)划定范围以后，各种不同形式的公理系统的等价性问题如何系统论证？

(Ⅲ)既然称之为公理系统，应当进一步研究Hilbert提出的：完备性、独立性、相容性问题.

可以这样认为，无穷时滞FDE理论的进一步发展，关键在于相空间的确立和公理系统的进一步完善.

本章的全部做法是基于一个根本的考虑：我们希望类似于有界滞量那样建立与初始时刻无关，与 $0\leqslant\tau(t)\leqslant r$ 的 $\tau(t)$ 的取法无关的相空间.从应用背景的需要出发，这种想法并非必要，因此，针对各种具体问题导出的具无界滞量DDE和具分布滞量有无穷积分限的Volterra方程，用经典分析方法给出详尽的研究是十分有意义的，限于篇幅从略，有兴趣的读者可参看[107]或[11].

# 第十二章

# 非 R. N. A. 型 FDE

## §1 概述

本章的主要部分是作者于 1990 年在第五次全国 FDE 会议上的综合报告内容. 如同我们在前言和第一章指出的那样,FDE 远不止滞后型(R)、中立型(N)、超前型(A)三种型式. 这一章的主要目的是对非 R 型、N 型、A 型的各种 FDE 作系统的介绍,基本上概括了这个问题近十年的进展状况,最后一节对偏 FDE 问题,特别是振动与稳定性,作举例性的介绍,供有兴趣的读者参考[341].

首先,我们再强调一下基本观点:泛函微分方程是含有未知函数导数的泛函方程. 非 R. N. A. 方程是广泛的方程类,例如

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+cx(t+\tau) \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t-\tau)=ax(t)+bx(t-\tau)+cx(t+\tau) \tag{1.2}$$

其中 $a,b,c,\alpha\in R,\tau=\text{const.}>0$.

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t-\sin t)) \tag{1.3}$$

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{r}x(t+\theta)A(t,\theta)d\theta,\ r>0 \tag{1.4}$$

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{2n}x(t)x(t^{\frac{1}{2}}),\ t\geqslant 0 \tag{1.5}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t^{\alpha})),0<\alpha<1,t\geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$\dot{x}(t)=f(x(x(t))) \tag{1.7}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(g(t,x(t)))) \tag{1.8}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x(t),\dot{x}(t),\cdots\cdots x^{(m)}(t)))) \tag{1.9}$$

$$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{1}A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta \tag{1.10}$$

等等，它们的应用背景在下一节中给出. 对独立变量不止一个的具有偏差变元的偏微分方程，以下略称偏 FDE，如[222][310].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D(t)\Delta u(x,t)+A(t)u(x,t)\\
&+B(t)u(x,t-\tau),(x,t)\in\Omega\times R_{+}\\
&u(x,t)=\varphi(x,t),(x,t)\in\Omega\times[-\tau,0]\\
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}+C(x,t)u(x,t)=0,(x,t)\in\delta\Omega\times[-\tau,-\infty)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 $A(t)$，$B(t)$是 $R_{+}$ 上连续的 $n\times n$ 阵.

$$D(t)=\mathrm{diag}(d_{1}(t),\cdots\cdots\cdots d_{n}(t))$$

$$C(x,t)=\mathrm{diag}(c_{1}(x,t),\cdots\cdots c_{n}(x,t))$$

而 $d_i(x,t)>0$，$c_i(x,t)\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$，$\Omega\times[-\tau,0]$上适当光滑的已知 $n$ 维函数. $\Delta$ 是$\Omega$上的 Laplace 算子，$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，而$\Omega$是 $R^m$ 中的有界开子集.

$$\Omega=\{x=(x_1,\cdots\cdots,x_m)^T,|x_i|<l\}$$

其边界 $\delta\Omega$光滑，$v$ 为 $\delta\Omega$上的单位外法向量，$\tau\geqslant 0$.

又如方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N(x,t)}{\partial t}=d(t)\Delta N(x,t)+N(x,t)[a(t)-b(t)N(x,t)\\
&-C(t)N(x,t-m\tau)-e(t)u(x,t)]
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-f(t)u(x,t)+g(t)N(x,t),(x,t)\in\Omega_X\times R_{+}$$

都认为是非 R. N. A. 型 FDE.

由于对这些广泛类型的 FDE 的研究还很不充分，没有合理的分类法. 为了讨论方便，我们大致地把它们归为若干类，这绝不能代替未来的、科学的分类法.

我们把上述的非 R. N. A. FDE 分为三大类.

(一)偏差依赖于未知函数及其导数的 FDE.

(二)含多个独立变量的偏 FDE.

(三)混合型 FDE—CFDE.

我们根据迄今为止的研究概况，把 CFDE 暂划分为 4 类.

I 型. 设方程中最高阶导数无偏差变元，偏差自身不变号，但出现具正负偏差的项. 如

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau(t))+cx(t+\tau(t)),\quad \tau(t)\geqslant 0 \tag{1.13}$$

$$\dot{x}(t)=\int_0^1 A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta+\int_{-\infty}^0 B(t,\theta)\dot{x}(t+\theta)d\theta \tag{1.14}$$

II 型. 方程最高阶导数无偏差变元，但偏差是变号的连续函数，如(1.3)(1.5)(1.6).

III 型. 设方程中最高阶导数出现偏差变元，方程的偏差不变号，但至少有一个低价导数的变元大于所有高阶导数的变元，如方程(1.2)及

$$\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-\tau)=\int_0^\tau A(t,\theta)x(t+\theta)d\theta+\int_{-\tau}^0 B(t,\theta)x(t+\theta)d\theta \tag{1.15}$$

其中 $\tau=\text{const.}>0$

IV 型. 设方程中最高阶导数出现偏差变元，方程的偏差变号，如

$$\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-\tau)=ax(t)+bx(t-\sin t),\quad t\geqslant 0 \tag{1.16}$$

非 R. N. A. FDE 中的一些类型是 FDE 中最早出现的方程，由于问题过于复杂和应用背景不够广泛，长期以来没有得到详尽的研究，近年来，在应用上大量提出这类方程促使人们加速进行这项研究工作．但所有工作只刚刚开始，因为这是一项严肃的挑战，也是很有生机的新机会．

自 1982 年第二次全国 FDE 会议以来，作者曾多次提出发展这一领域研究工作的建议[598][591]．特别是 Cauchy 问题的提法、基本理论，以及解的各种主要性态的研究，为了使对这项工作有兴趣的读者能查到有关文献，本书对这部分参考文献力求详尽、完整．

## §2 应用背景

我们用一些例子说明这类方程的实际意义及其广泛性．

**例 1** 在时间对称电动力学中提出了如下的二阶 CFDE [404]

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=\frac{1}{2}\alpha x(t-\tau)+\frac{1}{2}\beta x(t+\sigma)+\psi(t) \qquad (2.1)$$

其中 $\alpha,\beta,\tau>0,\sigma>0$ 皆常数，$\psi(t)$是给定的函数．这个方程也适用于大尺度的天文学问题．以色列的 L・S・Schulman 用 Green 函数给出了(2.1)在边值条件(或者说初始条件)：

$$x(t)=\varphi(t),t\in[-\tau,0],t\in[\mathrm{T},\mathrm{T}+\tau] \qquad (2.2)$$

之下，假定 $\sigma=\tau$，求得$[0.t]$上的解．

**例 2** 在光谱理论中有一类椭圆型泛函偏微分方程的边值问题[505]

$$\begin{cases} Lu(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial R}{\partial x_j}+L_1(u(x))=f(x) \\ u|_{[0,d]\times\partial G}=0, u|_{x_1=0}=\sum_{i=1}^{m}r_i^1(x^1)u|_{x_1=d} \\ u\Big|_{x_1=d}=\sum_{i=1}^{m}r_i^2(x^1)u\Big|_{x_1=d_i} \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $x\in Q=(0,d)\times G,G\subset R^{n-1}$是一个有界区域，若 $n\geqslant 3$，边界 $\partial G\in C^2$，算子 $L$ 在 $Q$ 的闭包 $\overline{Q}$ 中是一致椭圆型的，即

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant r\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{2.4}$$

(2.4)中 $x\in\overline{Q},\xi\in R^n,r>0$ 不依赖于 $x$ 和 $\xi$，而 $a_{ij}=a_{ji}\in C^1(\overline{Q})$，$(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$ $r_i^k\in C^2(\overline{G})$是实值函数($k=1,2,i=1,2\cdots\cdots,m$)，$f\in L_*(Q)$是复值函数，$0=d_0<d_1\cdots\cdots<d_m<d_{m+1}=d,x=(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)\in R^n,x^1=(x_2,\cdots\cdots,x_n)\in R^{n-1}$，$L_*$ 是[505]指明的线性映射构成的空间.

在[505]中，对

$$Ru(x)\doteq\sum_{j=-N}^{n}b_ju(x+j,x_2,\cdots\cdots x_n)\quad b_j\in R \tag{2.5}$$

的情形给出了(2.3)的适定性和解析解的物理意义分析.

**例 3** 在第一章中引用的经典 Poisson 几何问题导出的 FDE

$$y^2(x)+y^2(x)y'^2(x)-y^2(x+y(x)y'(x))=1 \tag{2.6}$$

其中“′”表示导数，我们在[249]中证明了(2.6)不存在连续解，对更普通的 Poisson 方程

$$y^2(x)+y^2(x)y'^2(x)+ay^2(x+y(x)y'(x))=b \tag{2.7}$$

其中 $a,b\in R$，我们在[250]中给出了详尽的分析.

**例 4** 电磁开关系统，其方程为[7]

$$\ddot{x}(t)+2\mu\dot{x}(t)+v^2x(t)+Tx(t-\Delta)=0 \tag{2.8}$$

其中 $\mu,v,T$ 为常数，滞量 $\Delta=\Delta(t,x(t))$，对 $t\in R$ 连续，关于 $x$ 的

依赖性是符号型的，为了给出 $\Delta$ 的表达式，考察开关触点的振动同输入信号之间的关系，以及由于自感或者分布电容的作用而出现的滞后特性，如图 12.1 所示，其中触点偏离的图形(A)中的 $x$ 的零点 $a_1, a_2$, ……等等，是本质的，可设与振动的形状无关，记输入的变化特征为 $f(t,x)$(如图 12.1(B)所示)，而由于系统的自感或分布电容的作用 $f$ 产生滞后变形，记之为 $g(t,x)$.

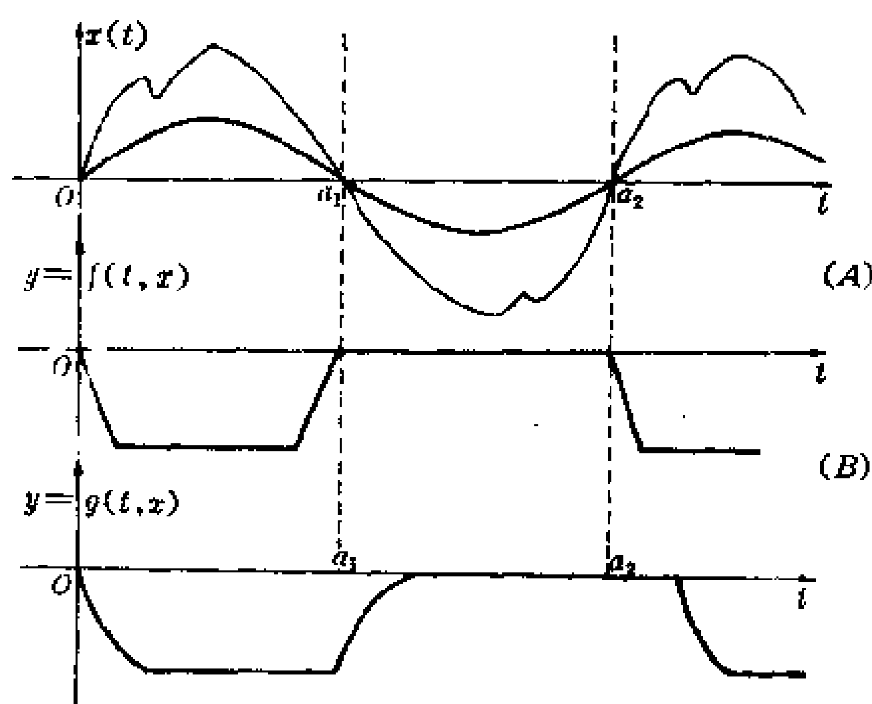



图 12.1

由于滞后，可以假定对 $\forall\ t \in R_+$，$\exists\ s < t$ 使

$$g(t,x) = f(s,x)$$

于是得到 $\Delta$ 的表示式

$$\Delta(t,x) = t - s \tag{2.9}$$

(i)在区间 $0 \leqslant t \leqslant k_0$ 上，设 $f(s,x)$ 图形的倾斜部分的方程为 $y = -ks$，由(2.9)，在此区间上有

$$\Delta(t,z) = t - s = t + y/k = t + \frac{f(s,x)}{k} = t + \frac{g(t,x)}{k} \leqslant t$$

若 $k\gg 1$，即自感或分布电容很小，则 $\Delta\approx t$（但实际上并不都可以视为 $k^{-1}g(x,t)$ 项可以略去）.

(ii)在区间 $k_0\leqslant t\leqslant a_1$ 上，$g(t,x)=f(t,x)$，故可令

$$\Delta(t,x)=\begin{cases}\dfrac{k_0}{\varepsilon}(k_0+\varepsilon-t), & k_0\leqslant t\leqslant k_0+\varepsilon\\ 0 & k_0+\varepsilon\leqslant t\leqslant a_1\end{cases}$$

即若略去 $k^{-1}g(t,x)$，这样定义 $\Delta$ 便在 $0\leqslant t\leqslant a_1$ 上连续，此时在 $a_1\leqslant t\leqslant a_2$ 上可定义 $\Delta$ 为

$$\Delta(t,x)=\begin{cases}t-a_1 & a_1\leqslant t\leqslant a_1+k_1\\ \dfrac{k_1}{\varepsilon}(a_1+k_1+\varepsilon-t) & a_1+k_1\leqslant t\leqslant a_1+\varepsilon+k_1\\ 0 & a_1+k_1+\varepsilon\leqslant t\leqslant a_2\end{cases}$$

一般地，当 $t\in R_+$，有 $x(t+a_2)=\rho x(t)$，$(\rho>0)$，于是有

$$\Delta(t+a_2,x)=\Delta(t,x).$$

其中 $k_0,k_1$ 是系统的参数，例如回路中的电阻和自感等等. 若再补充假定 $a_2-a_1=a_1$（即函数 $x(t)$ 的两个半周相等）以及 $k_0=k_1$，便得到滞量 $\Delta$ 对未知函数的符号型依赖性.

显然，若不略去 $k^{-1}g(t,x)$ 这一项，问题将更为复杂，而略去此项后虽 $\Delta(t,x)$ 的表达式中没有出现 $x$，但实际上依赖于 $x(t)$ 的零点 $a_1,a_2$.

**例 5** 生态系统及其他许多应用问题中给出了如下的 FDE

$$y'(x)=-ay(x-1)(1+y(x)) \tag{2.10}$$

作变换 $\ln n=2^x$，$Z(n)\ln n=1+y(x)$ 可使(2.10)化为 De Visme 的素数分布方程

$$Z'(n)=-Z(n)Z(n^{\frac{1}{2}})/2n \tag{2.11}$$

(2.11)相当于 $\tau(n)=n-n^{\frac{1}{2}}$ 的情形，当 $n>1$ 时 $\tau(n)>0$，当 $n\in(0,1)$ 时 $\tau(n)<0$. 所以若不从素数分布这一观点来看待(2.11)，则 $\tau(n)$ 在 $R_+$ 中是变号的，事实上，对更普遍的方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t^{a}))\quad 0<a<1 \tag{2.12}$$

也是如此.

**例** 6 K. L. Cooke 提出一个生物科学中的极为重要的方程[408],它与遗传现象密切相关

$$\dot{x}(t)+ax(t-h(t,x(t)))=F(t)\quad t\geqslant t_0 \tag{2.13}$$

J. Hale 与 R. Driver 也研究过这个方程[409][410]. 当

$$h(t,x(t))=r-\mu k(t,x(t))$$

特别是 $r=1,k=\sin 2\pi t$ 时 B. H. Stephan 详尽地研究了周期解的存在性[411].

**例** 7 在博奕论中研究解的连续过程时,导出了如下的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\min_{q}\max_{p} f(p,q,t,\dot{x}(t),\dot{x}(g(t,\dot{x}(t))),\\ &x(G(t,x(t),\dot{x}(t))))\qquad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)\quad t\in R_-$$

其中 $g,G$ 是确定的,但须满足某种递推公式[412].

**例** 8 在生命个体的活细胞里,控制酶反应的生物机制问题,提出了如下的数学模型[413]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&f(t,x_t,\dot{x}(t),x(g(t,x_t,\dot{x}(t))),\\ &\dot{x}(G(t,x_t,\dot{x}(t)))),t\leqslant 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),t\in R_-$$

其中 $x\in R^n,g,G$ 也是某种递推公式确定的.

**例** 9 考虑经典的电动力学中的二体问题,它用下述两个 FDE 确定[414][415]

$$\dot{y}(t)=f(t,y(g(t,y(t)))) \tag{2.16}$$

或者

$$\dot{y}(t)=f(t,y(t),y(g(t,y(t)))) \tag{2.17}$$

**例 10** 物理学中的许多问题，如一维返回的二体问题[410][417]导出方程

$$\dot{x}(t)=x(x(t)) \tag{2.18}$$

**例 11** Angelova 研究了金属切削理论中的二阶 FDE 形如[402]

$$\ddot{x}_i(t)+f_i(t_i,p_i(t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t)),x_i(t-p_i(t,x_1(t),x_2(t),\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t))))\quad i=1,2 \tag{2.19}$$

文[402]中研究了(2.19)的解的振动性问题，是这类方程应用的成功例子之一.

**例 12** 古典的 Euler 几何问题："求一曲线使能与它的渐缩线能经过运动而叠合"，当然，可以从不同的角度来考虑这个问题[76]，在[254]中设曲线 $\Gamma$ 的参数向量方程为 $r(s)$，这里 $s$ 是 $\Gamma$ 的弧长，取定 $\Gamma$ 上一个定点 $A$ 为原点，对应于 $s=0$，对$\forall\ s>0$，$\Gamma$ 上的相应点为 $B(S)$，如图 12.2 所示，$\overline{A}$，$\overline{B}$ 分别为 $\Gamma$ 在 $A$，$B$ 点的曲率中心，故 $\Gamma'$ 是 $\Gamma$ 的渐缩线，记

$$r(s)=(x(s),y(s))$$
$$\dot{r}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))$$

则有

$$\vec{n}(s)=(-\dot{y}(s),\dot{x}(s))$$

推出 $\overline{B}$ 点的向径为

$$\overline{r}(s)=(\overline{x}(s),\ \overline{y}(s))$$
$$=r(s)+\vec{n}(s)\frac{1}{k(s)}$$

其中 $k$ 为 $\Gamma$ 在 $B$ 点的相对曲率.

$R(s)=\dfrac{1}{k(s)}$是曲率半径，即

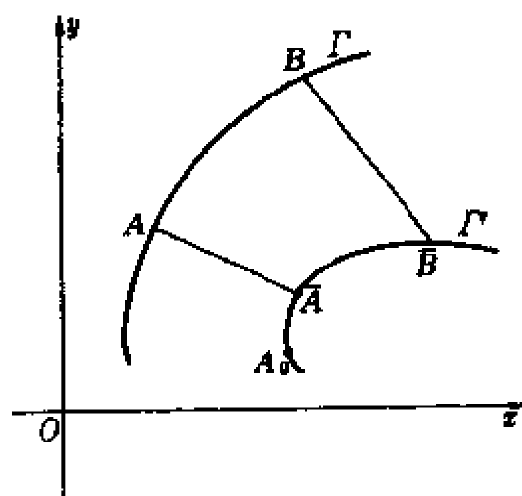



图 12.2

$$\bar{x}(s)=x(s)-\frac{1}{k(s)}\dot{y}(s)$$

$$\bar{y}(s)=y(s)+\frac{1}{k(s)}\dot{x}(s)$$

由此推出曲线 Γ 应满足方程

$$|\dot{k}(s)|=k^3(s)\left[k\left(c+\int_0^s\frac{|\dot{k}(s_1)|}{k^2(s_1)}ds_1\right)\right]^{-1} \tag{2.20}$$

(2.20)中 $k$ 有偏差变元

$$s-\tau(s)=c+\int_0^s\frac{|\dot{k}(s_1)|}{k^2(s_1)}ds_1\text{或者}$$

$$\tau(s)=s-c-\int_0^s\frac{|\dot{k}(s_1)|}{k^2(s_1)}ds_1\triangleq\tau(s,k(s),\dot{k}(s))$$

$\tau(s)$依赖于 $k(s)$及 $\dot{k}(s)$的方式用积分形式表示.

若 $k(s)$不变号，则由 $R(s)=\frac{1}{k(s)}$，(2.20)可以改写为 $R(s)$的方程

$$R(s)\dot{R}(s)=R(c_1+R(s)) \tag{2.21}$$

其中 $c$ 是 Γ′ 上的一段弧长 $\widehat{A_0A}$，$A_0$ 是经运动后渐缩线上与 $A$ 叠合的点，$c_1=c-R(0)$，$R(0)$是 Γ 上 $A$ 点的曲率半径.

[254]中给出(2.20)或(2.21)的一族解，即任何对数螺线都与它的渐缩线可以通过运动而重合. 从 FDE 的角度解决了 Euler 问题.

**例 13** 在最优控制问题中给出如下的 FDE

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-h(x(t),u(t),t)),u(t),t) \tag{2.22}$$

其中 $u(t)$是满足某些条件的控制函数.

**例 14** 一类无线电物理中的 Cauchy 问题.

$$\begin{aligned}&\dot{y}(t)=f(t,x(h(t,x(t),y(t))),y(\tau(t,x(t),y(t))))\\&x(t)=r^t\int_a^t y(s)ds,t\in[a,b]\\&x(\xi)=\varphi(\xi),y(\xi)=\psi(\xi),\xi<a\end{aligned} \tag{2.23}$$

Prahlin 在[419]中给出了问题(2.23)解的存在唯一性，Nikolova 与 Bainov 分析了解的性态及其物理意义[425].

此外还可以给出其他领域中导出的非 R. N. A. 型 FDE，如经济控制论，概率论中的马尔可夫过程等等，限于篇幅从略.

广泛的应用背景必将大大推动非 R. N. A. 型 FDE 的进一步研究工作.

## §3 CFDE 的结果与问题

### 1. Ⅰ型、Ⅱ型方程

在第一章、第二章中已经对方程

$$\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-\tau)+bx(t)+cx(t-\tau)+dx(t+\tau)=0 \quad (3.1)$$

作了许多研究，其中 $d\neq 0, a, b, c, \tau>0$ 皆常数，从(3.1)的特征方程

$$h(\lambda)=\lambda+a\lambda e^{-\lambda\tau}+b+ce^{-\lambda\tau}+de^{\lambda\tau}=0 \quad (3.2)$$

出发，一系列结果罗列如下：

(1)特征方程(3.2)必存在具任意大实部的根，所以有零解恒为不稳定的结论(这由庞德里亚金定理也可推出).

(2)若 $\lambda$ 是(3.2)的 $m$ 重根，则 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots\cdots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ 都是(3.2)的解(第二章定理 2.1).

(3)(3.1)有周期解的充要条件是(3.2)有纯虚根 $\lambda=iy$. 证明方法与第八章定理 1.1 类似.

(4)方程(3.1)的一切解为振动的充要条件是(3.2)无实解，根据这一原则[264][18][434]中研究了如下的方程

$$\frac{d}{dt}(x(t)+cx(t-r))+\sum_{i=1}^{n}P_i x(t-\tau_i)=0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t)+cx(t+r))-\sum_{i=1}^{n}P_i x(t+\tau_i)=0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t)-cx(t-r))+\sum_{i=1}^{n}P_i(t)x(t-\tau_i(t))=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}(x(t)-cx(t-r))-\sum_{i=1}^{n}P_i(t)x(t+\tau_i(t))=0 \tag{3.6}$$

解的振动性，其中$c\geqslant 0$，$r>0$，$P_i>0$，$\tau_i\in R$，$P_i(t)\in C(R_+^{t_0},R_+)$，$\tau_i(t)\in C(R_+^{t_0},R)$，注意到(3.3)(3.4)中诸$\tau_i$可以取不同的正负号，(3.5)(3.6)中$\tau_i(t)$可以是变号的，或者取不同的正负号，现在假定诸$\tau_i(t)$或者恒非正，或者恒非负，故(3.5)(3.6)便是Ⅰ型或Ⅱ型方程.

[264]中还设$c>0$，得到(3.3)～(3.6)一切解振动的充分条件，例如对(3.3)(3.4)[264]中得到

设$0<-c<1$，$m_i$分别是满足$\tau_i=m_ir+\tau_i>0$的最小非负整数，$i=1,2,\cdots\cdots,n$，若成立

$$\frac{1}{1-c}\sum_{i=1}^{n}c^{m_i}P_i(\tau_i+\frac{c}{1-c})>\frac{1}{e} \tag{3.7}$$

则(3.3)(3.4)的一切解振动.

对一般的非线性方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),x(t+\sigma)) \tag{3.8}$$

其中$\tau>0$，$\sigma>0$是常数，其Cauchy问题提法还没有公认的合理提法. J. Hale在[3]中也指出，要确定(3.1)的解究竟需要多少数据是一点也不清楚的.

早期有一种做法是把Ⅰ型方程作为中立型方程的退化情形来处理，如Lecornu对方程

$$\dot{x}(t)+ax(t-1)+bx(t+1)=0 \tag{3.9}$$

设初始时刻为$t_0=0$，作自变量代换$s=t+1$，则(3.9)写成下式

$$x(s)+\frac{1}{b}\dot{x}(s-1)+\frac{a}{b}x(s-2)=0 \tag{3.10}$$

然后在$[-2,0]$上给定连续可微的初始函数$\varphi(t)$，使$x(t)=\varphi(t)$，$\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)$，$t\in[-2,0]$，于是得$[0,1]$上(3.10)的解，这是微分延

拓解，这相当于 N 型方程

$$\varepsilon\dot{x}(s)+\frac{1}{b}\dot{x}(s-1)+\frac{a}{b}x(s-2)+x(s)=0 \qquad (3.11)$$

当 $\varepsilon=0$ 时的退化情形(实际上是 A 型方程的一种初值问题提法).

对(3.8)的 Cauchy 问题提法还在探索之中，作者在[255]中提出了三种可供选择的 Cauchy 问题提法. 第一种是沿用常微分方程的 Cauchy 问题提法，第二、三种提法则是把问题设计成边值问题，即化为一种常微分方程边值问题. 并且给出了解的存在唯一性定理. 其中第二种提法如下：对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),x(t+\sigma)) \qquad (3.12)$$

其中 $\tau>0,\sigma>0$ 皆常数，我们要求(3.12)在指定区间 $I=[a,b]$ 上的解，则应当在 $[a-\tau,a],[b,b+\sigma]$ 上的给定初始函数 $\varphi(t)$，Cauchy 问题写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),x(t+\sigma)) & t\in[a,b]\\ x(t)=\varphi(t),t\in[a-\tau,a]\cup[b,b+\sigma]\end{cases} \qquad (3.13)$$

[256]中用压缩映象原理，在区间充分小时给出了解的存在唯一性. [257]中放宽了对 $f$ 的要求，用 Schauder 不动点定理证明了解的存在性并且用 Picard 迭代法构造出它的近似解序列，证明了在一定条件下近似解序列收敛于真实解，且给出了近似解与真实解之差的估计式，顺便指出[256][257]中研究的是二阶方程.

当 $\tau=\sigma$ 时，Schulman 给出了解析解[404].

我们在[258]中给出 Ⅱ 型的一种 Cauchy 问题提法. 设 $\tau=$ const. $>0,\sigma=$ const. $>0,I=[a,b]\subset R$，则 Ⅱ 型方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau)=f(t,x(t),x(t-\tau),x(t+\sigma))\\ x(t)=\varphi(t),t\in[a-\tau,a]\cup[b,b+\sigma]\\ \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t) \quad t\in[a-\tau,a]\end{cases} \qquad (3.14)$$

的解存在且唯一.

对 FDE 用摄动和奇摄动方法有一些研究工作如[259]～

[263]，在[263]中考虑 CFDE 边值问题的奇摄动如下

$$\varepsilon y''(x,\varepsilon)+y'(x,\varepsilon)+\alpha(x)y(x-1,\varepsilon)-\beta(x)y(x+1,\varepsilon)=0$$

$$0<x<l,0<\varepsilon\ll 1 \qquad (3.15)$$

$$y(x,\varepsilon)=\varphi(x),x\in[-1,0],y(x,\varepsilon)=\psi(x)\quad x\in[l,l+1]$$

在 $\alpha(x),\beta(x),\varphi(x),\psi(x)$ 为常数的情形下，利用分步积分法给出了(3.15)的精确解，找到了边界层(角层)的位置，然后针对问题(3.15)在 $\alpha(x),\beta(x),\varphi(x),\psi(x)$ 足够光滑的情形下，运用两变量展开直接构造边界的办法，给出了形式渐近展开解(内解和外解)的 $n$ 阶通项表达式，且估计了余项，从而得到精确的解析解.

1982 年 Lange 和 Miura 对从概率论中提出的一类 CFDE 的边值问题[432]

$$\begin{cases}\varepsilon^2y''(x;\varepsilon)+\alpha(x)y(x-1,\varepsilon)-\eta^2(x)y(x+\varepsilon)+\beta(x)y(x+1,\varepsilon)=0\\ 0<x<l,0<\varepsilon\ll 1\ ,1<l<2\\ y(x,\varepsilon)=\varphi(x),x\in[-1,0],y(x,\varepsilon)=\psi(x)\quad x\in[l,l+1]\end{cases} \qquad (3.16)$$

给出了渐近展开解的首项，但未研究通项，与[263]比起来粗糙得多.

最后，在结束本段时要指出一个事实：有些方程被说成是“形式上”的 CFDE，因为只要做一下时间平移，便是多滞量的中立型方程[436]～[441][405].

例如[436]中 Kamенскци 与 Мышкис 研究了方程

$$\begin{cases}y''(t-1)+2y''(t)+y''(t+1)=1,0\leqslant t\leqslant 3\\ y(t)=0,t\in[-1,0],y(t)=0,3\leqslant t\leqslant 4\end{cases} \qquad (3.17)$$

的边值问题，确立了它的解析解，这个边值问题在光谱理论中物理意义极其明显.

倘若不考虑边值问题自身，而仅就方程的形式来看，可令 $s=t+1$，作时间平移后可化为

$$y''(s)+2y''(s-1)+y''(s-2)=1 \qquad (3.18)$$

这是一个具双滞量的中立型方程.这种方程的更普遍形式为

$$\sum_{i=-n}^{n} C_i \dot{x}(t-ih)+\sum_{j=1}^{m} a_j(t)x(\sigma_j(t))=f(t) \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=-n}^{n} C_i \ddot{x}(t-ih)+\sum_{j=1}^{m}[b_j(t)\dot{x}(\sigma_j(t)+a_j(t)x(\sigma_j(t))]=f(x) \tag{3.20}$$

其中 $h=\text{const.}>0$. [436]~[441]中详细讨论了(3.19)(3.20).

所以,从 CFDE 代表的应用背景看,(3.17)~(3.20)并非"形式上"的,而是实质上的.从时间平移可以化为 NDDE 这一角度,它可以认为是"形式上"的.须知这只是从一个角度看问题,是一种处理 CFDE 的方法,绝非全部.

2. Ⅱ型、Ⅲ型 CFDE

设偏差 $\tau(t)$ 连续变号 $a\in R$,不妨设 $a<0$,记 $\tau(t):(a,\infty)\to R$, $t^*\in(a,\infty)$, $I_l=(t^*-\delta,t^*)\subset(a,\infty)$, $I_r=(t^*,t^*+\delta)\subset(a,\infty)$分别为 $t^*$ 在$(a,\infty)$中的左右邻域,这里 $\delta>0$,对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{3.21}$$

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-r)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \qquad r>0 \tag{3.22}$$

我们引入转型点的概念.

**定义** 3.1 对(3.21)(或(3.22)),若∃ $t^*\in(a,+\infty)$使得

(i) $\tau(t^*)=0$

(ii) $t\in I_l$ 时 $\tau(t)>0$(或$<0$), $t\in I_r$ 时 $\tau(t)<0$(或$>0$)

其中 $I_l^*=[a,t^*]$, $I_r^*=[t^*,\beta]$, $a<t^*<\beta$.

则 $t^*$ 叫做(3.21)(或(3.22))的一个转型点.

显然,在任何转型点近傍(3.21)由 R 型变为 A 型或者相反,(3.22)由 N 型变为 C 型,或者相反.

(1)仅有一个转型点的方程常常遇到,处理起来比较方便,例

如 $\tau(t)=\frac{t}{2}$，则(3.21)在 $t\geqslant 0$ 时为 R 型，在 $t\leqslant 0$ 时为 A 型，转型点 $t=0$ 是唯一的.

(2)有限个转型点在[442]中有详尽介绍.例如我们考察方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t^{\frac{1}{3}})) \tag{3.23}$$

其中 $\tau(t)=t-t^{\frac{1}{3}}$，有三个转型点 $-1,0,1$.

(3)有可列个转型点的方程如[442]中提出的

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\sin t)) \tag{3.24}$$

转型点为 $t=k\pi,k=\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$

具有转型点的 CFDE 的研究概况

对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(-t)) \qquad t\in R \tag{3.25}$$

$$\dot{x}(t)-c\dot{x}(-t)=f(t,x(t),x(-t)) \qquad t\in R \tag{3.26}$$

及方程

$$y'(s)+ay'(\frac{1}{s})\frac{1}{s^2}=h(s,y(s),y(\frac{1}{s})) \tag{3.27}$$

(3.27)中令 $s=e^t$，即可化为(3.26).文[444]～[446]、[448]～[452]以及[455]都是研究(3.25)(3.26)解的性态的.

此外在[464]～[467]中研究了一个转型点的方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\varepsilon t)) \quad 0<\varepsilon<1 \tag{3.28}$$

解的性态，并对一些无线电物理中的问题给出合理的解释.

**注** 3.1 对方程[426]

$$\dot{x}(t)+c\dot{x}(t-\tau(t))=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{3.29}$$

$\tau(t)$在 $R$ 上连续，且有至多可列个零点 $\{a_i\}$，这时诸 $a_i$ 不是转型点，因为 $\tau(t)$改变正负号时(3.29)仍是一个中立型方程，但在$[a_{2i},a_{2i+1}]$与$[a_{2i+1},a_{2i+2}]$上是两个构造不同的NFDE，(3.29)称为 $N^*$ FDE，我们在[268]中给出了(3.29)解的存在唯一性定理.当然，首先给出了 Canchy 问题的一种提法.其中的主要困难在于积

分曲线在诸 $a_i$ 处的衔接问题.

## §4 具 $\tau(t,x(t),\dot{x}(t))$ 型偏差的 FDE

1. $\tau(t,x(t))$ 型 FDE

考虑方程

$$\dot{x}(t)=f(x(x(t))) \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))) \tag{4.2}$$

暂且称为 $\tau(x(t))$ 型 FDE 与 $\tau(t,x(t))$ 型 FDE.

近年来这类方程有很大发展,论著数量不少,本书参考文献中尽可能列出.诸作者处理问题的范围与方式大致有:

(1)寻求 Canchy 问题的提法,或者对(4.1)(4.2)在指定的区间上探索解的存在唯一性,或者注意到(4.1)(4.2)解(连续解)空间的维数急剧下降,大胆地沿用常微分方程的 Cauchy 问题提法如下:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x))) \\ x(t_0)=x_0=\text{const.}\end{cases} \tag{4.3}$$

不同的初值问题提法都是为了建立这类方程的基本理论,但迄今收效甚微,在证明解的存在性时,一般仍用不动点原理及逐次逼近法等传统手段,当然,对所用的定理必要时得事先推广.

(2)避开基本理论问题,不问其 Cauchy 问题提法如何,不问解是否存在唯一,就某一个或某一类方程自身的构造出发,研究解的某种性态,如单调性、振动性、周期解的存在性等等.

(3)根据应用背景的需求,找出一个或一部分解析解,或者近似解.

(4)对 $\tau$ 加上许多苛刻的条件,把已知的 FDE 理论予以推广,例如恒设 $\tau(t,x(t))\geqslant 0$ 等等.

除了本书其他地方提到的有关$\tau(t,x(t))$型 FDE 文献外，还可参看[479]~[548].

$\tau(t,x)=t-x(t)$的情形

$$\dot{x}(t)=x(x(t)) \tag{4.4}$$

$$\dot{x}(t)=f(x(x(t))) \tag{4.5}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(x(t))) \tag{4.6}$$

都是$\tau=t-x$的特别情形，进展概况是：

1970 年，Dunkel 研究了方程(4.4)[485]，1984 年 Eder 又对(4.4)作了详尽的分析，提出了区间 $I$ 上饱和解的概念[479]. Dunkel 同时又讨论了(4.5)[484]，以后陆陆续续有零星的研究工作，1988 年王克对(4.5)进行了系统的研究，大大推广了前人的结果[480]以后还有一些推广工作[266][268].

Petahov 对二阶方程

$$\ddot{x}(t)=ax(x(t)) \tag{4.7}$$

的一类边值问题得出解的存在唯一性定理[483]，Petahov 在[482]中也研究了(4.4).

Pelczar 在[486]中对(4.6)沿用常微分方程的初值问题提法，用类似的 Picard 方法给出问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(x(t)))\\ x(0)=c\end{cases}$$

连续解的存在性，而 Sarkovskii 在[487]中则避开 Cauchy 问题提法，直接分析方程

$$P(x(t),x(f(x(t))),\dot{x}(f(x(t))))+Q(x(t),x(f(x(t))))=0 \tag{4.8}$$

的解的性态，Minsker 在[488][489]中讨论了方程

$$a'(a(x))=a(x)/x \tag{4.9}$$

解的性态，并提出一些公开问题.

综观对(4.5)(4.6)的所有研究工作，一般总是给定区间 $I=$

$[a,b]$，要求方程在 $I$ 上的解或者分析 $I$ 上解的一般性态，而且通常都有两个基本假设：

(i)设函数 $f$ 是单调的.

(ii)设 $t\in I$，$\{x(t):t\in I\}=\hat{I}\subseteq I$.

事实上，$f$ 为单调的前提下，可以分为四种情形. 假定(ii)只是其中的一种，另三种情形是

(1)$s\in\hat{I}\Rightarrow s\leqslant a$

(2)$s\in\hat{I}\Rightarrow s\geqslant b$

(3)$\hat{I}$ 中有大于 $b$ 和小于 $b$ 的值，或者有小于 $a$ 和大于 $a$ 的值.

作者在[267]中给出了(1)(2)两种情形的 Cauchy 问题提法，而且可以化为常微分方程而求得解析解. 以(1)为例，取一个初始集 $I$，使得 $\hat{I}\subseteq I_0$，例如取 $I_0=(-\infty,a]$. 又例如取(4.6)右端有界时，由 $|f|<M$，则 $I_0$ 可取为 $[-M(b-a)+|x(a)|),a]$.

所谓(4.6)的一个不大于 $a$ 的解，是一个定义在集 $I_0\cup I$ 上的连续可微函数，它在 $I_0$ 上等于给定的初始函数 $\varphi$，在 $I$ 上满足方程(4.6)，即初值问题提法为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(x(t)))\\x(t)\leqslant a,t\in I,x(a)=\varphi(a)\\x(s)=\varphi(s),s=x(t)\in I_0,t\in I.\end{cases}\tag{4.10}$$

注意到当 $t\in I$ 时 $x(t)$ 的值域已设它属于 $I_0$，且有 $I\cap I_0=\{a\}$，于是 $x(x(t))\triangleq x(s)=\varphi(s)$，$s=x(t)$，$t\in I$ 但 $s\in I_0$. 于是有

**定理** 4.1　设方程(4.6)满足条件

(i)$f$ 连续，关于第二、三个变元是局部 Lipschitz 型的.

(ii)对 $\varphi\in C(I_0,R)$，$f(t,x(t),\varphi(x(t)))\leqslant 0$，$t\in I$.

则初值问题(4.10)的解存在，若再设 $\varphi(s)$ 也满足 Lipschitz 条件，则解是唯一的.

在[267]中，我们给出定理 4.1 的详尽证明，并且同时给出情形(2)的 Cauchy 问题提法，和相应的存在唯一性定理，此外还对

(4.4)(4.5)(4.6)的一些具体形式给出应用例子.

对一般的 $\tau(t,x(t))$的情形,从 60 年代开始已有许多研究工作,如[493][498][506][516][548]中研究了含参数的 FDE

$$\dot{x}(t)=f(t,\varepsilon,x(t),x(t-\tau(t,\varepsilon,x(t)))) \tag{4.11}$$

注意到 $\tau(t,\varepsilon,x(t))$中含有 $\varepsilon$,既增加了复杂性又提供了关于小参数 $\varepsilon$ 展开的可能性. 在[495][510]中研究了导数有偏差的情形

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(h(t,x(t))),\dot{x}(g(t,x(t)))) \tag{4.12}$$

对这类方程周期解存在性的研究为数不多. 如[411]关于振动性有[522]~[530]及[543],又例如本书第九章(4.1)式. 在[522]中讨论了方程

$$(r(t)y'(t))'+f(t,y(\Delta(t,y(t))))=Q(t) \tag{4.13}$$

的振动性,当$\int_{\tau}^{\infty}r^{-1}(t)dt<\infty$和$\int_{\tau}^{\infty}r^{-1}(t)dt=\infty$时分别给出了振动解的存在的充分条件.

[509][518]中研究了多个 $\tau$ 的情况,即方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(g_1(t,x)),\cdots\cdots,x(g_m(t,x))) \tag{4.14}$$

解的振动性问题.

最后,由于解的整体存在性没有保证,对稳定性的研究极少. Skripnik 在[533]中用比较的方法给出一些充分性的稳定准则,考虑方程

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{p}A_k(t)x(g_k(t,x(t))) \tag{4.15}$$

$$\dot{y}(t)=\sum_{k=1}^{p}A_k(t)y(t) \tag{4.16}$$

其中 $x,y\in R^n$, $A_k(t)$为 $n\times n$ 阵, 且设 $g_k\leqslant t$, 此时[533]给出了(4.16)零解的稳定性能保证(4.15)零解稳定性的充分条件,沿用了第一近似理论的思路.

2. $\tau(t,x(t),\dot{x}(t))$型 FDE

这里涉及更为复杂的偏差，它还依赖于未知函数的导数，事实上，可能依赖于未知函数的 $m$ 阶导数，即 $\tau(t,x(t),\dot{x}(t),\cdots\cdots,x^{(m)}(t))$.

这类方程看起来相当复杂，但它却是 FDE 最早提出的方程类，近年来，在控制系统、博奕论、生物的高级神经控制网络、细胞中酶的反应机制等一系列应用问题中提出大量 $\tau(t,x,\dot{x})$型方程，如[549][550][402][403][406][407][442][473][269]～[289].

上一段指出的，关于 $\tau(t,x)$型 FDE 的研究范围与方式(1)(2)(3)(4)对 $\tau(t,x,\dot{x})$型 FDE 也适用. 诸文献中涉及方程类可归纳为以下几种：

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x}))) \tag{4.17}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t,x,\dot{x})),\cdots\cdots x(t-\tau_m(t,x,\dot{x}))) \tag{4.18}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x})),\dot{x}(t-\tau(t,x,\dot{x}))) \tag{4.19}$$

$$\dot{x}(t)=f(\varepsilon,t,x(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x}))) \tag{4.20}$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t),x(\tau_0),\dot{x}(\tau_0)) \tag{4.21}$$

其中 $\tau_0$ 由某个递推公式确定[283]～[292].

即递推公式为

$$\begin{cases}\tau_m=\tau_m(t,x(t),\dot{x}(t))\\ \tau_k=\tau_k(t,x(t),\dot{x}(t),x(\tau_{k+1}),\dot{x}(\tau_{k+1}))\\ k=0,l,\cdots\cdots m-1\end{cases} \tag{4.22}$$

以及下面要提到的 $\tau(t,x,\dot{x},\cdots\cdots x^{(m)})$型方程.

它们的研究概况可归纳如下：

(1)对(4.17)，不问 Cauchy 问题如何提法，可以用细致的分析技巧直接证明连续解的存在和不存在性，或者求出解族[249][250]，也可参看[254].

在[249]中，作者证明了方程

$$y^2(x)+y^2(x)y'^2(x)-y^2(x+y(x)y'(x))=0 \qquad (4.23)$$

不存在连续解，在[250]中对更广泛的 Poisson 方程

$$x^2(t)+x^2(t)\dot{x}(t)+bx^2(t+x(t)\dot{x}(t))=a \qquad (4.24)$$

其中 $a,b\in R$. 在[250]的假定之下，可把$(a,b)$平面划分为 9 个区域 $D_1\sim D_9$，$D_i\cap D_j=\varnothing$（空集），$i\neq j$，$R^2=\bigcup_{i=1}^{9}D_i$.

其中 $D_i$ 的划分原则是：不同的 $D_i$ 对应不同的解族，或者对应不同数目的解族，我们得

(i)$D_1=D_1^1\cup D_1^2$，其中 $D_1^1=\{(a,b):b\geqslant 0,a<0\}$，$D_1^2=\{(a,b):b\leqslant -1,a>0\}$，则当$(a,b)\in D_1$ 时(4.24)无实解.

(ii)$D_2=D_2^1\cup D_2^2$，其中 $D_2^1=\{(a,b):b\geqslant 0,a=0\}$，$D_2^2=\{(a,b):b<-1,a=0\}$，则当$(a,b)\in D_2$ 时(4.24)只有零解.

(iii)$D_3=\{(a,b):b=0,a>0\}$，当$(a,b)\in D_3$ 时(4.24)有解为圆族 $x^2+(c-t)^2=a$，$c$ 为任意常数.

(iv)$D_4=\{(a,b):-1<b<0,a=0\}$，(4.24)有解为两条相交直线族.

(v)$D_5=D_5^1\cup D_5^2$，其中 $D_5^1=\{(a,b):b>0,a>0\}$，$D_5^2=\{(a,b):b<-1,a<0\}$，当$(a,b)\in D_5$ 时(4.24)有解为圆族、直线及椭圆.

(vi)$D_6=\{(a,b):-1<b<0,a<0\}$，则当$(a,b)\in D_6$ 时(4.24)有解为双曲线.

(vii)$D_7=\{(a,b):-1<b<0,a>0\}$，当$(a,b)\in D_7$ 时(4.24)有解为圆族，直线及双曲线族.

(viii)$D_8=\{(a,b):b=-1,a<0\}$，则当$(a,b)\in D_8$ 时(4.24)有解为抛物线族.

(ix)$D_9=\{(0,-1)\}$，即只对应唯一的方程，$b=-1$，$a=0$ 即[249]的结论.

(2)对方程(4.17)(4.19)(4.20)沿用常微分方程的初值问题为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x})))\\ x(t_0)=x_0=\text{const.}\end{cases} \tag{4.25}$$

在一定条件下,给出了解的存在唯一性[473][270][271].其中解的存在区域通常只限定在某个区间 $I=[a,b]$上.

(3)对(4.17)根据应用问题的需要,有如下一类 Cauchy 问题.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x})))\\ x(t_0)=x_0=\text{const.}\end{cases} \tag{4.26}$$

[270]中证明了这类初值问题的存在唯一性.

(4)在文[250][253][509]中都尽力试图建立较为普遍的 $\tau(t,x,\dot{x})$型 FDE 的基本理论,但事实上不能认为是完全成功的,以[509]为例:Shin 考虑了方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(g(t,x(t)))) \tag{4.27}$$

对其中的函数 $f,g$ 有一系列假定,最基本的有 6 条,即

$(F\text{-}1)f(t,X)$对固定的 $t$ 关于 $X$ 连续.

$(F\text{-}2)f(t,X)$对固定的 $X$,关于 $t$ Lebesque 可测.

$(F\text{-}3)D\subset R^{dm+1}$中的连通开集,($d,m$ 由[509]中定义),对 $D$ 中任一紧集 $Q$,$f(t,X)$在 $Q$ 上有界.

$(G\text{-}1)g(t,x)$当$(t,x)\in D^*\subset R^{d+1}$时连续.

$(G\text{-}2)g_1(t,x)=t$,对$\forall\ (t,x)\in D^*$成立.

$(G\text{-}3)\exists\ \alpha\in R$,使得 $\alpha\leqslant g_j(t,x)\leqslant t,j=2,\cdots\cdots,m$,对一切$(t,x)\in D^*$.

注意到条件$(G\text{-}3)$是加在 $g_j$ 上,而实际上是加在 $x$ 上的限制,因而不很自然,但[509]中确实建立了类似于 RFDE($f$)基本理论的若干定理.

(5)关于振动性,Angelova 与 Bainov 给出了方程

$$(r(t)\dot{y}(t))'+f(t,y(t),y(g(t,y,\dot{y})))=Q(t),t\geqslant\tau>0 \tag{4.28}$$

振动性的充分准则，Tereklin 在[402]中讨论了方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+\lambda f(t,x(t),x(\psi_1(t,x,\dot{x})),x(\psi_2(t,x,\dot{x}))) \tag{4.29}$$

周期解的存在性，其中 $\lambda$ 是参数.

(6)对 $\tau(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ 型 FDE 有一系列工作，例如在[278]中研究了如下方程

$$\ddot{x}(t)=f(t,x(t),\dot{x}(t),x(\tau^{x(t)}),\dot{x}(\tau^{x(t)}),\ddot{x}(\tau^{x(t)})),$$

$$\int_0^t F(t,s,x(s),\dot{x}(s),\ddot{x}(s),\dot{x}(\tau^{x(s)}),\ddot{x}(\tau^{x(s)}))ds) \tag{4.30}$$

其中 $0\leqslant\tau^{x(t)}=\tau(t,\dot{x},\ddot{x})\leqslant t$，类似的工作还可参看[275]～[277].

对 $\tau(t,x,\dot{x}\cdots\cdots x^{(m)})$ 型 FDE 在[279]上研究了如下方程

$$x^{(n)}(t)+f(t,\hat{x}(t),x(g_1(t,\hat{x}(t))),\cdots\cdots x^{(m)}(g_n(t,\hat{x}(t))))=0 \tag{4.31}$$

其中 $m=n-1$，$\hat{x}$ 为 $m$ 维向量：

$$\hat{x}(t)=(x(t),\cdots\cdots,x^{(n-1)}(t))$$

$f\in C(R_+\times R^{2n},R)$，$g_i\in C(R_+\times R^n,R)$，$g_i(t,\hat{x}(t))\leqslant t$，且 $\lim g_i(t,\hat{x}(t))\leqslant t$，且 $\lim\limits_{t\to\infty} g_i(t,\hat{x}(t))=\infty(1\leqslant i\leqslant n)$，初值条件为

$$\begin{cases}x^i(t_0)=x_0^i,t=t_0,1\leqslant i\leqslant n-1\\ x(t)=\varphi(t),t\leqslant t_0\end{cases} \tag{4.32}$$

文中研究了(4.31)解的渐近性态，主要是解的振动性与非振动性.

## §5 偏 FDE

对带有偏差变元的偏微分方程，略称为"偏 FDE"，1955 年 и. M. Гулb 首先研究了这类方程，如

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u(t-\tau,x)}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

$$u(t,x)=\psi(t,x),0\leqslant t\leqslant\tau,0\leqslant x\leqslant l$$

其中 $a,b,l,\tau$ 皆常数，$\tau>0$，$\psi(t,x)$是给定的函数，关于 $t$ 连续，关于 $x$ 二次连续可微，此外再给出一个边界条件. 例如 $u(t,0)=u(t,l)=0$. 又例如具有后效的弹性振动方程

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u(t-\tau,x)}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

等等.

这类问题迄今为止只是对有应用背景的特定方程的边界条件与初始条件用类似于无偏差变元的偏微分方程 的方法予以分析，如解的适定性、振动性、稳定性等等.

至于方程的类型，主要是在偏微分方程分类意义下的抛物型方程与双曲型方程，而且，多数场合偏 FDE 中只有一个自变量有偏差变元，少部分有多个自变量有偏差变元. 当然，一个自变量有偏差，未必是单一的，可能与通常的 FDE 一样是多滞量的.

现在举例说明偏 FDE 的有关工作.

(1)解的振动性[298]～[301].

记 $\Delta$ 是 Laplace 算子，如 § 1 所述，讨论方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[u+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)u(x,t-\tau_i)\Big]=a(t)\Delta u-P(x,t)u$$

$$-\sum_{j=1}^{s}q_j(x,t)u(x,g_j(t)),(x,t)\in G \tag{5.3}$$

或者含分布偏差的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[u+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)u(x,t-\tau_i)\Big]=a(t)\Delta u-P(x(t)u$$

$$-\int_a^b q(x,t,\xi)u(x,g(t,\xi))d\sigma(\xi)\quad (x,t)\in\Omega\times R_+=G \tag{5.4}$$

我们考虑(5.4)，[298]的结果介绍如下，设(5.4)中的$\Omega\subset R^n$ 具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$的有界区域，$u=u(x,t)\tau_i>0,i=1,2,\cdots\cdots,m$ 皆实常数，设

$(A_1)a(t),\lambda_i(t)\in C(R_+,R_+),i=1,2,\cdots\cdots,m.$

$(A_2)P(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times R_+,R_+),q(x,t,\xi)\in C(\overline{\Omega}\times R_+\times[a,b],R_+)$

$(A_3)g(t,\xi)\in C(R_+\times[a,b],R),g(t,\xi)\leqslant t,\xi\in[a,b]$

$g(t,\xi)$关于 $t,\xi$ 分别是非减的，且

$$\lim_{t\to+\infty}\min_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$$

$(A_4)\sigma(\xi)\in C([a,b],R)$非减，方程(5.4)中的积分是在 Stieltjes 意义下的.

与此同时，考虑三类边界条件

$$u(x,t)=\varphi(x,t),(x,t)\in\partial\Omega\times R_+ \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\psi(x,t),(x,t)\in\partial\Omega\times R_+ \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+r(x,t)u=0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+ \tag{5.7}$$

其中 $n$ 是 $\partial\Omega$的单位外法向量，$r(x,t)\in C(\partial\Omega\times R_+,R_+),\varphi(x,t),\psi(x,t)\in C(\partial\Omega\times R_+,R)$.

在分析问题时需要偏微的一个基本知识：$\Omega$内的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}\Delta u+\alpha u=0,\text{在}\Omega\text{内}\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{5.8}$$

的最小特征值 $\alpha_1$ 是正的，且 $\alpha_1$ 所对应的特征函数 $\Phi(x)$在$\Omega$内也是正的.

我们列出两个结果而略去证明.

**定理** 5.1　若具连续分布滞量微分不等式

$$\frac{d^2}{dt^2}[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)]+(P(t)+\alpha_1a(t))U(t)$$

$$+\int_a^b Q(t,\xi)U(g(t,\xi))d\sigma(\xi)\leqslant-a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw \tag{5.9}$$

以及

$$\frac{d^2}{dt^2}[U(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)U(t-\tau_i)]+(P(t)+a_1a(t))U(t)$$

$$+\int_a^b Q(t,\xi)U(g(t,\xi))d\sigma(\xi)\leqslant a(t)\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dw \qquad (5.10)$$

没有最终正解，则问题(5.4)(5.5)的一切解在 $G$ 内都是振动的.

以及另一种振动条件.

**定理** 5.2　若对所有充分大的 $t_1$ 有

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t_1}^{t}(1-\frac{s}{t})[-a(s)\int_{\partial\Omega}\psi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)dw]ds=-\infty \qquad (5.11)$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_1}^{t}(1-\frac{s}{t})[-a(s)\int_{\partial\Omega}\varphi(x,s)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x)dw]ds=+\infty \qquad (5.12)$$

则问题(5.4)(5.5)的一切解在 $G$ 内都是振动的.

证明从略.

(2)稳定性问题.

在[312]中谢胜利给出下列方程的稳定性定理：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D(t)\Delta u(x,t)+A(t)u(x,t)+B(t)u(x,t-\tau),$$

$$(x,t)\in\Omega\times R_+ \qquad (5.13)$$

$$u(x,t)=\varphi(x,t),(x,t)\in\Omega\times[-\tau,0]$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}+c(x,t)u(x,t)=0,(x,t)\in\delta\Omega\times[-\tau,+\infty)$$

其中 $A(t)$,$B(t)$是在 $R_+$ 上连续的 $n\times n$ 阵.

$D(t)=\mathrm{diag}(d_1(t),\cdots\cdots,d_n(t))$,$C(x,t)=\mathrm{diag}(c_1(x,t),\cdots\cdots,c_n(x,t))$,而 $d_i(x,t)>0$,$c_i(x,t)\geqslant0$. $i=1,2,\cdots\cdots,n$,$\varphi$是$\Omega\times[-\tau,0]$上适当光滑的已知 $n$ 维函数,$\Delta$ 是$\Omega$上的 Laplace 算子,

$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\partial^2/\partial x_i^2$,$\Omega\subset R^m$ 是有界开集.

$$\Omega=\{x=(x_1,\cdots\cdots,x_m)^\tau,|x_i|<l\}$$

其边界 $\partial\Omega$ 光滑，$\upsilon$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，时滞 $\tau\geqslant 0$，关于(5.13)解的存在唯一性作为已知的.

若对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ 及 $N_1>0$ 使当

$$\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}|\varphi(x,t)|^2_{L^2(\Omega)}=M_1<\delta(\varepsilon)$$

时有

$$|u(u,t,\varphi)|_{L^2(\Omega)}\leqslant\varepsilon,\ |\nabla u(x,t,\varphi)|_{L^2_{(\Omega)}}\leqslant N_1\varepsilon,t\in R_+$$

则称(5.13)的零解是 $X^{1,2}(\Omega)$ 稳定的，若还有

$$\lim_{t\to\infty}|u(x,t)|_{L^2(\Omega)}=\lim_{t\to\infty}|\nabla u(x,t)|_{L^2_{(\Omega)}}=0$$

则称(5.13)的零解是 $X^{1,2}(\Omega)$ 渐近稳定的，其中

$$|\cdot|_{L^2_{(\Omega)}}=\{\int_\Omega|\cdot|^2dx\}^{\frac{1}{2}}$$

**定理 5.3** 若方程(5.13)满足 $b<r$，则其零解是 $X^{1,2}(\Omega)$ 渐近稳定的且(5.13)所有解 $u(x,t)$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0,\text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{一致成立} \tag{5.14}$$

其中 $b=\sup\limits_{t\geqslant 0}|B(t)|$，$r=\inf\limits_{t\geqslant 0}r(t)>0$. 而 $-r(t)$ 是阵

$$A^*(t)=\frac{1}{2}(A^\tau(t)+A(t))-h^{-2}\text{diag}(d(t),\cdots\cdots,d_n(t))$$

的最大特征值，$h=m^{-\frac{1}{2}}$.

**证** 对方程(5.13)两边同乘 $u^\tau(x,t)$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u^\tau(x,t),u(x,t))=\sum_{i=1}^n d_i(t)u_i(x,t)\Delta u_i(x,t)$$

$$+u^\tau(x,t)\frac{1}{2}(A^\tau(t)+A(t))u(x,t)+u^\tau(x,t)B(t)u(x,t-\tau) \tag{5.15}$$

对(5.15)两边关于 $x$ 积分得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} u^{\tau}(x,t)u(x,t)dx = 2\sum_{i=1}^{n} d_i(t)\int_{\Omega} u_i(x,t)\Delta u_i(x,t)dx$$

$$-2\int_{\Omega} u^{\tau}(x,t)B(t)u(x,t-\tau)dx$$

$$+2\int_{\Omega} u^{\tau}(x,t)\frac{1}{2}(A^{\tau}(t)+A(t))u(x,t)dx$$

(5.16)

注意到 $c_i(x,t)\geqslant 0$，由散度定理⇒

$$\int_{\Omega}(\nabla u_i\nabla u_i + u_i\nabla u_i)dx = \int_{\partial\Omega} u_i\frac{\partial u_i}{\partial v}dx = -\int_{\partial\Omega} c_i u_i^2 dx \leqslant 0 \tag{5.17}$$

从而有

$$\int_{\Omega} u_i\Delta u_i dx \leqslant -\int_{\Omega}(\nabla u_i(x,t))^2 dx, i=1,2,\cdots\cdots n. \tag{5.18}$$

再用 Poincaré 不等式有

$$\int_{\Omega} u_i^2(x,t)dx \leqslant h^2\int_{\Omega}(\nabla u_i(x,t))^2 dx, h=l/\sqrt{m} \tag{5.19}$$

因 $b=r$⇒∃ 充分小的的正数 $\varepsilon,\sigma$ 使得

$$b(1+e^{2\sigma\tau}) < 2(r-\frac{\varepsilon}{h^2}-\sigma) \tag{5.20}$$

对上述的 $\varepsilon$，有

$$d_i(t)\int_{\Omega} u_i\Delta u_i dx \leqslant -\varepsilon\int_{\Omega}(\nabla u_i(x,t))^2 dx$$

$$-h^2(d_i(t)-\varepsilon)\int_{\Omega} u_i^2(x,t)dx$$

于是(5.16)化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}|u(x,t)|^2 dx \leqslant -2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(\nabla u_i)^2 dx - 2r\int_{\Omega}|u(x,t)|^2 dx$$

$$+2\varepsilon h^{-2}\int_{\Omega}|u(x,t)|^2 dx + 2\int_{\Omega}|u(x,t)|\,|B(t)|\,|u(x,t-\tau)|dx$$

由此可得

$$\int_{\Omega}|u(x,t)|^2dx\leqslant M_1e^{-2(r-\varepsilon h^{-2})t}$$

$$-2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t e^{-2(r-\varepsilon h^{-2})(t-s)}\int_{\Omega}(\nabla u_i(x,s))^2dxds$$

$$+\int_0^t e^{-2(r-\varepsilon h^{-2})(t-s)}|B(s)|\int_{\Omega}[|u(x,s)|^2+|u(x,s-\tau)|^2]dxds$$

对(5.20)中的 $\sigma>0$,我们有

$$e^{2\sigma t}\int_{\Omega}|u(x,t)|^2dx$$
$$\leqslant M_1+\frac{b(1+e^{2\tau\sigma})}{2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant t}\{e^{2\sigma\theta}\int_{\Omega}|u(x,\theta)|^2dx\}\tag{5.21}$$

注意到上式右端非减,记

$$P(t)=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant t}\{e^{2\sigma\theta}\int_{\Omega}|u(x,\theta)|^2dx\}$$

则有

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{e^{2\sigma s}\int_{\Omega}|u(x,s)|^2dx\}$$
$$\leqslant M_1+[(1+e^{2\sigma\tau})b/2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)]P(t)$$

而

$$\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}\{e^{2\sigma s}\int_{\Omega}|u(x,s)|^2dx\}$$
$$\leqslant M_1+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{e^{2\sigma s}\int_{\Omega}|u(x,s)|^2dx\}$$

故有

$$P(t)\leqslant 2M_1+\frac{b(1+e^{2\sigma\tau})}{2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)}\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}\{e^{2\sigma s}\int_{\Omega}|u(x,s)|^2dx\}$$

由(5.20)$\Rightarrow 1-[b(1+e^{2\sigma\tau})/2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)]=d>0$,则

$$P(t)\leqslant 2M_1/d$$

代入(5.21),对 $t>a>0$ 有

$$e^{2\sigma t}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \leqslant M_1\left[1+\frac{2}{d}(1-d)\right]$$

$$-2\varepsilon\int_{t-a}^{t} e^{-2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)(t-s)}\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{2\sigma s}\int_\Omega (\nabla u_i)^2 dx\right\}ds \tag{5.22}$$

注意到

$$-2\varepsilon\int_{t-a}^{t} e^{-2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)(t-s)}\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{2\sigma s}\int_\Omega (\nabla u_i(x,s))^2 dx\right\}ds$$

$$\leqslant -2\varepsilon a e^{-2(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)a}\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{2\sigma\eta}\int_\Omega (\nabla u_i(x,\eta))^2 dx\right\} \quad \eta\in[t-a,t]$$

由(5.22)有

$$e^{2\sigma t}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + 2\varepsilon a e^{-2a(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{2\sigma\eta}\int_\Omega (\nabla u_i(x,\eta))^2 dx\right\}\leqslant M_1\left(1+2\,\frac{1-d}{d}\right)$$

因上式右边与 $t$ 无关⇒对 $t>a$ 有

$$Q(t)=\sup_{t-a\leqslant s\leqslant t}\left\{e^{\sigma s}\int_\Omega |u(x,s)|^2 dx\right\}$$

$$+2\varepsilon a e^{-2a(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)}\sum_{i=1}^{n}\sup_{t-a\leqslant s\leqslant t}\left\{e^{2\sigma s}\int_\Omega (\nabla u_i(x,s))^2 dx\right\}$$

$$\leqslant M_1[1+2(1-d)/d]$$

从而有

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + 2\varepsilon a e^{-2a(r-\varepsilon h^{-2}-\sigma)}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (\nabla u_i(x,t))^{-2} dx$$

$$\leqslant Q(t)e^{-2\sigma t}\leqslant M_1[1+2(1-d)/d]e^{-2\sigma t} \tag{5.23}$$

由(5.23)便可推出(5.13)的零解是 $X^{1,2}(\Omega)$ 渐近稳定的.

现在证(5.14),由(5.23)⇒

$$\lim_{t\to\infty}|u_i(x,t)|_{L^2(\Omega)}=\lim_{t\to\infty}|\nabla u_i(x,t)|_{L^2(\Omega)}=0, i=1,\cdots\cdots n \tag{5.24}$$

且存在常数 $M>0$,使得

$$|u_i(x,t)|\leqslant M, |\nabla u_i(x,t)|\leqslant M, (x,t)\in\bar{\Omega}\times R_+ \quad (5.25)$$

由(5.25)⇒$|u_i(x,t)|_\infty$, $|\nabla u_i(x,t)|_\infty$有界，对 $P\geqslant 2$ 有

$$|u_i(x,t)|_p\leqslant |u_i(x,t)|_\infty^{p-2/p}|u_i(x,t)|_2^{2/p}, i=1,2,\cdots\cdots n$$

$$|\nabla u_i(x,t)|_p\leqslant |\nabla u_i(x,t)|_\infty^{p-2/p}|\nabla u_i(x,t)|_2^{2/p},\ i=1,2,\cdots\cdots,n$$

其中$|\cdot|_p=(\int_\Omega|\cdot|^p dx)^{1/p}, 1\leqslant p<+\infty, |\cdot|_\infty=\mathrm{ess.}\sup\limits_{x\in\Omega}|\cdot|$.

由(5.24)有

$$\lim_{t\to\infty}|u_i(x,t)|_p=\lim_{t\to\infty}|\nabla u_i(x,t)|_p=0, i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (5.26)$$

再用 Sobolev 不等式，对 $m<p$ 有

$$|v|_\infty\leqslant C\{|v|_p+|\nabla v|_p\}\equiv C|v|_{w^{1,p}}$$

其中 $C=C(\Omega,m,p)>0$ 是常数，从而

$$|u_i(x,t)|_\infty\leqslant C\{|u_i(x,t)|_p+|\nabla u_i(x,t)|_p\} \quad (5.27)$$

由(5.26)(5.27)⇒

$$\lim_{t\to\infty}|u_i(x,t)|_\infty=0, i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (5.28)$$

(5.28)⇒对 $x\in\bar{\Omega}$一致成立(5.14)．证毕．

# 参 考 文 献


[1]Мышкис А. д. ,带有时滞变元的线性微分方程,Hayka,(1950)(1972 再版,安大郑祖庥、李明娜合译印发).

[2]Bellman R. & Cooke K. ,Differential-Difference Equations Acadmic Press (1963)(安大黄文纲译,印发).

[3]Hale J. ,Functional Differential Equations (1971).

[4]Hale J. ,Theory of Functional Differential Equations, Springer Verlag (1977).

[5]Красов ский Н. Н. ,Некоторые задачи теории устойчивости движения Физматгиз (1959).

[6]Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дУОА,Hayka,(1964)(1966 译为英文,安大郑祖庥译,印发).

[7]Норкин С,б 带有时滞变元的二阶微分方程,Hayka,(1965)(1972 译为英文,李继彬译,安大印发).

[8]秦元勋,刘永清,王联,郑祖庥,带有时滞的动力系统的运动稳定性,科学出版社 (1989).

[9]Driver R. D. ,Ordinary and Delay Differential Equations Springer Verlag (1977).

[10]Pinney E. ,Ordinary Difference-Differential Equations Univ. of California Press (1958).

[11]李森林,温立志,泛函微分方程,湖南科技出版社(1986).

[12]Oğuztöreli M. N. ,Time-lag Control systems,Acad. Press (1966).

[13]Salamon D. ,Control and observation of neutral systems(1984).

[14]Diamling K. ,Ordinary Differential Equations in Banach Space. Springer Verlag (1977).

[15]吉泽太郎,稳定性理论与周期解和概周期解的存在性,(郑祖庥,陈纪鹏,张书年译,广西人民出版社)(1985).

[16]刘永清等著,大型动力系统的理论与应用,1～4 卷,华南理工大学出版社(1992).

[17]徐远通,泛函微分方程与测度微分方程,中山大学出版社(1988).

[18]Ladde G. S. ,Lakshmilrantham V. , Zhang B. G. ,Oscillation Theory of Differential Equations With Deviating Arguments ,Mavcel Dekker(1987).

[19]秦元勋,"数学学报"8(1958)4,457—472.
[20]秦元勋,刘永清,王联,"数学学报"9(1959)4.
[21]刘永清,"数学进展"4(1958)2,297—303.
[22]秦元勋,"数学学报"10(1960)1,125—141.
[23]刘永清,"科学纪录"4(1960)2,83—87.
[24]秦元勋,刘永清,"科学纪录"4(1960)2.
[25]王联,"数学学报"10(1960)1,104—124.
[26]王慕秋,"科学纪录"4(1960)1.
[27]李森林,"湖南大学学报"(1979)1.
[28]李森林,"湖南大学学报"(1979)3.
[29]王志成,"湖南大学学报"(1979)3.
[30]温立志,"湖南大学学报"(1979)2.
[31]温立志,陈强,"湖南大学学报"(1979)1.
[32]王志成,钱祥征,"湖南大学学报"(1979)3.
[33]梁肇军,"华中师院学报"自然科学版 2(1978).
[34]郑祖庥,"厦门大学学报"自然科学版 11(1964)2—3.
[35]张廉培,"安徽大学学报"自然科学版 2(1980)15—22.
[36]李炳熙,"应用数学与计算机数学"(1979).
[37]钱学森,宋健,工程控制论,科学出版社(1981).
[38]郑祖庥,"安徽大学学报"1(1981)10—18.
[39]丁同仁,"中国科学"8(1981)931—945.
[40]张书年,"安徽大学学报"自然科学版 2(1981)11—20.
[41]郑祖庥,"安徽大学学报"自然科学版 2(1981)22—29.
[42]伍炯宇,"四川大学学报"自然科学版 3(1981)23—30.
[43]芮嘉浩,"中南矿冶学院学报"4(1981).
[44]任洪善,一类有界滞量的自治 RFDE 的变异性,第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[45]王志成,钱祥征,中立型 FDE 的稳定性理论,第一次全国 FDE 会议交流(1979).
[46]郑祖庥,具离散滞量系统解的全扰动稳定性,第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[47]伍炯宇,关于 FDE 的 Ляпунов 直接法,第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[48]罗炳容,温立志,"湖南数学年刊"1(1981)32—39.
[49]张炳根,具偏差变元微分方程的振动性综述,第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[50]张书年,Atkinson F. V.,有关判别方程 $\dot{x}(t)=-a(t)x(t-1)$ 所有解趋于零的准

寿，第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[51]张书年，"安徽大学学报"自然科学版 2(1981)11—30.
[52]陈强，钱祥征，"湖南大学学报"2(1980)10—16.
[53]陈强，"湖南大学学报"2(1980)17—26.
[54]刘宝平，"科学通报"26,1(1981)61—62.
[55]燕居让，"科学通报"26,13(1981)774—777.
[56]张炳根，"数学年刊"2,1(1981)25—32.
[57]李森林，"中国科学 A"8(1982)693—702.
[58]林晓标，"数学年刊"3,№2(1982)147—152.
[59]张炳根，"数学研究与评论"4(1982)4,27—32.
[60]廖晓昕，"华中师院学报"2(1982).
[61]林振声，"安徽大学学报"自然科学版 1—2(1982)9—17.
[62]黄振勋，林晓标"数学年刊"3(1982)1,115—120.
[63]陈强，"湖南大学学报"9(1982)2,68—74.
[64]刘永清，宋中昆，"华南工学院学报"10(1982)2.
[65]黄文璋，"安徽大学学报"自然科学版 1—2(1982)57—64.
[66]蔡维濂，具有时滞的复合系统的稳定性，第二次全国 FDE 会议交流(1982).
[67]阮炯，"Chin. Ann. of Math."3(3)(1982)262—272.
[68]高国柱，"复旦大学学报"自然科学版 4(1982)391—402.
[69]斯力更，"数学年刊"2(1983)203—207.
[70]廖晓昕，"数学杂志"1(1982)75—80.
[71]汤光宋，"数学杂志"3(1982)219—230.
[72]蔡维濂，"厦门大学学报"3(1982)249—260.
[73]王志成，"湖南大学学报"4(1982)98—105.
[74]燕居让，"科学通报"6(1982)331—334.
[75]斯力更，"科学通报"9(1982)518—522.
[76]郑祖庥，"数学进展"12(1983)2,94—112.
[77]郑祖庥，"安徽大学学报"自然科学版(1983)1,1—5.
[78]郑祖庥、林宜中，"福建师大学报"(1983)2,17—24.
[79]张鸿亮，张泽锦，"华南工学院学报"10(1983)3.
[80]黄文璋，"安徽大学学报"(1983)1,25—32.
[81]阮炯，"复旦大学学报"自然科学版 22(1983)3.
[82]李文清，"厦门大学学报"自然科学版 22(1983)4,442—446.

[83]罗来汉，"数学研究与评论"3(1983)1，123—124.
[84]吴建宏，"湖南大学学报"10(1983)4，75—82.
[85]陈强，"湖南大学学报"10(1983)1，96—105.
[86]阮炯，"数学年刊"4A(1983)1，47—55.
[87]李森林，"应用数学学报"4(1983)458—467.
[88]塌力更，"数学学报"2(1983)194—198.
[89]任洪善，"安徽大学学报"2(1983)21—31.
[90]高国柱，"数学杂志"3(1983)195—204.
[91]蒸居让，"科学通报"21(1983)1340.
[92]高国柱，"科学通报"4(1983)193—195.
[93]尤云程，"应用数学学报"6(1983)3，347—356.
[94]燕居让，"应用数学学报"6(1983)2，251—256.
[95]秦元勋，俞元洪，"控制理论与应用"1(1984)1.
[96]郑祖庥，"数学研究与评论"4(1984)3.
[97]黄启昌，"东北师大学报"自然科学版(1984)1，13—26.
[98]魏俊杰，"东北师大学报"自然科学版(1984)1，33—39.
[99]张书年，"安徽大学学报"自然科学版(1984)1.
[100]吴建宏，"湖南大学学报"2(1984)1—9.
[101]温立志，"科学通报"7(1984).
[102]李小军，"科学通报"17(1984).
[103]黄振勋，阮炯，高国柱，"数学学报"5(1984)716—720.
[104]冯祐和，"华南师大学报"数学年刊(1984).
[105]高国柱，"数学年刊"5A(4)(1984)517—522.
[106]温立志，"科学通报"23(1984)(中国科学 1(1986)).
[107]张书年，"Ann. Diff. Eqns."2(1985)129—230.
[108]吴建宏，"应用数学学报"4(1985).
[109]温立志，"应用数学学报"1(1986).
[110]吴建宏，"Ann. Diff. Eqns."3(1986).
[111]张波，"Ann. Diff. Eqns."1(1986).
[112]李森林，"湖南大学学报"6(1985).
[113]高国柱，"数学学报"1(1985)5—10.
[114]黄启昌，"中国科学"A 辑 10(1984)882—889.
[115]刘和涛，"Ann. Diff. Eqns."3(1986).

[116]阮炯,"数学年刊"5A,5(1984)605—618.
[117]阮炯,"科学通报"9(1984).
[118]陈强,"数学年刊"6(1984).
[119]张波,王克,"数学杂志"1(1985)57—66.
[120]黄发伦,"数学杂志"2(1986)183—192.
[121]郑祖庥,"安徽大学学报"自然科学版 2(1985).
[122]郑祖庥,概周期 FDE (含于[15]之中).
[123]温立志,罗炳容,"湖南大学学报"3(1986)171—178.
[124]钱祥征,"湖南大学学报"3(1986)179—189.
[125]陈强,"湖南大学学报"3(1986)190—199.
[126]李克难,"湖南大学学报"3(1986)204—210.
[127]张书年,"数学学报"2(1986)189—192.
[128]徐道义,"数学学报"3(1986)309—312.
[129]张炳根,"数学学报"5(1985)637—643.
[130]张书年,"安徽大学学报"自然科学版 1(1984)1—8.
[131]郑祖庥,"安徽大学学报"自然科学版 2(1987).
[132]胡跃明,"安徽大学学报"自然科学版 4(1985)1—10.
[133]强力,"安徽大学学报"自然科学版 1(1986)10—15.
[134]刘和涛,"安徽大学学报"自然科学版 2(1986)27—33.
[135]张作元,"安徽大学学报"自然科学版 3(1986)1—3.
[136]胡民,"安徽大学学报"数学专辑(1987)18—22.
[137]黄文纲,"安徽大学学报"数学专辑(1987)32—37.
[138]强力,"安徽大学学报"数学专辑(1987)41—45.
[139]张康培,"安徽大学学报"数学专辑(1987)80—85.
[140]徐远通,"中山大学学报"2(1985)24—29.
[141]徐远通,"中山大学学报"4(1986)96—101.
[142]徐远通,"中山大学学报"3(1987)36—41.
[143]徐远通,"中山大学学报"3(1989)109—112.
[144]王志成,"数学进展"7(1988)330—331.
[145]林宜中,"数学季刊"3(1989)8—14.
[146]林宜中,"数学季刊"4(1988)389—400.
[147]阮炯,"复旦大学学报"1(1984)95—102.
[148]阮炯,"复旦大学学报"4(1984)455—468.

[149]阮炯,"复旦大学学报"2(1988)165—169.
[150]高国柱,"复旦大学学报"2(1985)205—214.
[151]陈永劭,"数学进展"4(1992)432—438.
[152]朱思铭,伍永棠,"中山大学学报"3(1990)12—19.
[153]徐远通,"中山大学学报"1(1991)21—27.
[154]梁法驯,"数学杂志"1(1992)92—97.
[155]庾建设,"应用数学"4(1992)72—80.
[156]曹唯克,"应用数学"4(1992)115—117.
[157]胡刚,楚天广,"应用数学"4(1992).
[158]陈强,"工程数学学报"3(1986)1,135—137.
[159]俞元洪,"工程数学学报"4(1987)1,102—104.
[160]林宜中,"工程数学学报"4(1987)3,17—26.
[161]俞元洪,"工程数学学报"5(1988)1,87—89.
[162]魏俊杰,"工程数学学报"6(1989)2,58—63.
[163]章毅,"工程数学学报"6(1989)2,84—89.
[164]崔宝同,"高校应用数学学报"4(1989)3,309—318.
[165]芮嘉浩,"高校应用数学学报"4(1989)3,363—379.
[166]阮炯,"高校应用数学学报"4(1989)3,438—450.
[167]高国柱,"高校应用数学学报"5(1990)2,202—210.
[168]雷岩松,"高校应用数学学报"6(1991)1,110—117.
[169]何敏,"东北师大学报"(1987)3,27—30.
[170]魏俊杰"东北师大学报"(1987)4,7—14.
[171]崔宝同,"数学季刊"5(1990)4,19—23.
[172]章毅,"数学进展"20(1991)4,488—494.
[173]魏俊杰,"东北师大学报"(1984)2,33—38.
[174]王克,"东北师大学报"(1984)4,41—42.
[175]阮炯,"中国科学"A(1986)5,467—477.
[176]李森林,"中国科学"A(1986)11,1143—1152.
[177]王克,黄启昌,"中国科学"A(1987)3,242—252.
[178]温立志,夏华兴,"中国科学"A(1987)9,909—916.
[179]程远纪,"中国科学"A(1990)7,683—693.
[180]燕居让,"中国科学"A(1990)12,1256—1266.
[181]章毅,"中国科学"A(1988)4,337—347.

[182]张书年,“中国科学”A(1988)4,348—358.
[183]黄发伦,“中国科学”A(1988)5,456—466.
[184]张作元,“中国科学”A(1988)12,1233—1242.
[185]吴健宏,“应用数学学报”(1985)4,472—481.
[186]俞元洪,“应用数学学报”(1985)3,334—339.
[187]鄢孝欣,“应用数学学报”(1990)2,198—206.
[188]项筱玲,“应用数学学报”(1991)1,73—81.
[189]黄文璋,“应用数学学报”(1986)4,409—419.
[190]伍炯宇,“应用数学学报”(1988)1,12—21.
[191]魏俊杰,“应用数学学报”(1988)1,113—122.
[192]张作元,“应用数学学报”(1988)2,202—208.
[193]黄卿光,“应用数学学报”(1991)1,136—140.
[194]王志成,“应用数学学报”(1991)2,145—154.
[195]司建国,“应用数学学报”(1991)2,262—276.
[196]王克,黄启昌,“东北师大学报”自然科学版(1985)3.
[197]黄启昌,张波,“东北师大学报”自然科学版(1985)4,1—6.
[198]李晓颖,“东北师大学报”自然科学版(1987)1,11—15.
[199]钱祥征,“应用数学学报”(1989)4,418—429.
[200]冯祐和,“应用数学学报”(1989)2,156—163.
[201]郑祖庥,“安徽大学学报”自然科学版(1987)2,1—9.
[202]张书年,“安徽大学学报”数学专辑(1987)86—91.
[203]张作元,“安徽大学学报”数学专辑(1987)92—95.
[204]张书年,“安徽大学学报”自然科学版(1989)4,1—16.
[205]龙晓瀚,“安徽大学学报”自然科学版(1992)1,19—26.
[206]徐建华,“安徽大学学报”自然科学版(1992)2,23—29.
[207]周宗福,“安徽大学学报”自然科学版(1992)3,8—14.
[208]陈绍棠,“数学学报”(1992)3,196—406.
[209]徐道义,“数学学报”(1992)5,632—641.
[210]蔡维璇,“厦门大学学报”(1984)3,291—299.
[211]蔡维璇,“厦门大学学报”(1987)3,277—285.
[212]杨鸿坤,蔡维璇,“厦门大学学报”(1990)5,479—483.
[213]辜建德,“厦门大学学报”(1991)2,119—124.
[214]王联,王慕秋,“湖南大学学报”(1984)2,38—46.

[215]吴建宏,“湖南大学学报”(1984)2,47—55.
[216]李森林,“湖南大学学报”(1985)3,1—27.
[217]吴建宏,“湖南大学学报”(1986)1,17—.
[218]李志祥,“湖南大学学报”(1986)1,155—168.
[219]王志成,吴建宏,李志祥,“湖南大学学报”(1986)3,134—145.
[220]王志成,庾建设,钱祥征,“湖南大学学报”(1992)4,107—113.
[221]庾建设.王志成.“湖南大学学报”(1992)5,22—29.
[222]谢胜利,“科学通报”(1991)18,1435—1436.
[223]庾建设,“科学通报”(1991)3,236.
[224]俞元洪,傅希林,“科学通报”(1991)20,1595.
[225]石磊,“科学通报”(1990)6,409—411.
[226]傅予力,“科学通报”(1991)23,1831—1833.
[227]林立聪,王根强,“科学通报”(1990)13,968—970.
[228]徐道义,“科学通报”(1990)6,405—408.
[229]王克,“东北数学”(1987)2,215—227.
[230]安钢,周钦德,“东北数学”(1988)2,131—144.
[231]王怀忠,李勇,“东北数学”(1988)3,371—378.
[232]苗树梅,“东北数学”(1988)4,412—416.
[233]李训经,“控制理论与应用”(1984)3,117—123.
[234]刘和涛,“控制理论与应用”(1986)1,106—110.
[235]胡跃明,“控制理论与应用”(1987)3,40—47.
[236]温立志,“科学通报”(1984)23,1471.
[237]黄文璋,“数学年刊”(英)(1984)4.
[238]张康培等,“Houston J. Math.”(1989)4.
[239]郑祖庥,林宜中,“Ann. Diff. Eqns.”5(3)(1989)364—371.
[240]郑祖庥,张书年,黄文璋,“Ann. Diff. Eqns.”5(3)(1989)349—362.
[241]张书年,“Ann. Diff. Eqns.”3(3)(1987).
[242]胡民,“Ann. Diff. Eqns.”2(2)(1986).
[243]刘和涛,“Ann. Diff. Eqns.”2(3)(1986).
[244]胡跃民,“Ann. Diff. Eqns.”3(3)(1987).
[245]张作元,“Ann. Diff. Eqns.”2(3)(1986).
[246]张作元,“科学通报”(1986)23,1768—1771.
[247]张书年,“Funkcialaj Ekvacioj”31(1988)179—196.

[248]张书年,"数学年刊"(1986)5,571—580.
[249]郑祖庥,"厦门数学通讯"1(1984).
[250]郑祖庥,"安徽大学学报"自然科学版 2(1985).
[251]郑祖庥,"安徽大学学报"自然科学版 2(1987).
[252]Vzovskii D. A. ,УМЖ, 25(1973)738—746.
[253]Zivotovskii L. A. ,ду ,5(1969)880—889.
[254]Zivotovskii L. A. & Norkin S. B. , УМЖ,22(1970).
[255]郑祖庥,滨州师专学报 2(1988).
[256]刘昌美,"安徽大学学报"数学专辑(1985).
[257]张书年等,"数学学报"(美)(1987)4,289—300.
[258]郑祖庥,张书年,黄文璋,"DD4 会议文集"(1983)585—.
[259]黄文纲,"J. Math. Analysis. Appl."19(1988).
[260]郑祖庥,"常微分方程与控制论"(武汉)论文集(1987)187—190.
[261]张书年,"数学年刊"10A(5)(1989).
[262]张书年,"科学通报"33(1988)12,885—889.
[263]张书年,"科学通报"34(1989)18,1361—1364.
[264]王志成,"Tôhoku Math. J."41(1989)575—588.
[265]阮士贵,"数学杂志"4(1989)431—438.
[266]钱祥征,王志成,"湖南大学学报"1(1988)124—128.
[267]郑祖庥,"安徽大学学报"(1992)4.
[268]郑祖庥,"工科数学"8(1992)3,1—3.
[269]Kocurora. S. ,ду. №15(1980)60—68.
[270]Nikolova T. S . & Bainov D. D. , Godisnik vics Vcebn Zared Prilozna Mat. 13 (1977)1.
[271]Skripnik V. P. ,УМЖ 22(1970)611—624.
[272]Angelova D. C. & Bainov D. D. ,Serdica 13 (1987)4.
[273]Terkhin M. T. ,Partial Diff. Eqns. (1983) 49—53.
[274]Nikolova T. S. & Bainov D. D. ,Mat. Vesnik (1976)2.
[275]Nikolova T. S. & Bainov D.D. , Arch. Math. 13(1977)4.
[276]Konstantinov M. M. & Bainov D. D. ,Math. Balkanica 9(1973)3.
[277]Konstantinov M. M. & Bainov D. D. , Math. Balkanica 8(1772)4.
[278]Nikolova T. S. & Bainov D. D. ,УМЖ,28(1976)4.
[279]Angarwal R. P. ,Boll. Un. Mat. Ital (16)1(1982)1.

[280]Konstantinov M. M. & Bainov D. D., дy11(1975)7.
[281]Khristova S. G. & Bainov D. D., Math. Balkanica 7(1977).
[282]钱临宁,"安徽大学学报"(1991)4.
[283]王克,"数学杂志"(1990)2,161—170.
[284]吴建宏,"湖南大学学报"(1988)1,204—213.
[285]吴建宏,"湖南大学学报"(1987)1,21—28.
[286]庾建设,"湖南大学学报"(1990)3,97—105.
[287]王志成,钱祥征,庾建设,"湖南大学学报"(1990)4,15—23.
[288]邵周德,"数学杂志"(1987)3,249—256.
[289]何猛省,"数学学报"(1988)3,425—430.
[290]周钦德,黄树梅,"数学学报"(1989)1,55—70.
[291]何猛省,"数学学报"(1989)1,91—97.
[292]庾建设,"数学学报"(1990)3,152—259.
[293]陈伯山,"数学学报"(1990)3,353—358.
[294]刘宝平,"数学学报"(1980)1,23—36.
[295]胡适耕,"应用数学"(1991)4,71—77.
[296]赖定文,王欧贤,"应用数学"(1990)1,84—90.
[297]程远纪,"数学季刊"(1989)3,93—94.
[298]王克,"东北数学"(1987)2,215—227.
[299]李小军,"科学通报"(1984)17,1085—1086.
[300]徐安石,"科学通报"(1985)1,78—79.
[301]王克,"数学年刊"(1990)4,438—444.
[302]廖晓昕,"数学年刊"(1991)2,171—177.
[303]王克,"数学年刊"(1991)2.
[304]伍炯宇,"数学年刊"(1991)3,302—308.
[305]徐远通,"数学年刊"(1991)3,341—348.
[306]王志成,"数学年刊"(1991)3.
[307]王志成,钱祥征,"数学年刊"(1990)6,769—774.
[308]王志成,"科学通报"(1987)4,254—256.
[309]黄卿光,"科学通报"(1988)2,156—.
[310]谢胜利,"科学通报"(1992)2,189—190.
[311]何猛省,高述春,"科学通报"(1992)13,1163—1166.
[312]谢胜利,"科学通报"(1992)14,1252—1256.

[313]陈伯山，"科学通报"(1990)19，1514—1515.
[314]钱祥征，"科学通报"(1988)12，885—889.
[315]期力更，马万彪，"科学通报"(1988)15，1130—1133.
[316]刘昌美，"科学通报"(1985)12，956—957.
[317]温立志，"科学通报"(1985)14，1045—1047.
[318]温立志，"科学通报"(1986)22，1755.
[319]吴建宏，"科学通报"(1986)13，1036.
[320]程远纪，"科学通报"(1986)9，718.
[321]马万彪，"科学通报"(1986)7，558.
[322]张小明，差分微分方程点态退化的进一步讨论(待发表).
[323]郑周德，"数学年刊"(1987)3，394—403.
[324]张书年，"数学研究与评论"(1985)2，74—78.
[325]胡作生，"山东大学学报"(1991)2，174—181.
[326]胡跃明，"数学研究与评论"(1988)1，89—94.
[327]张珩，疏松桂，"数学的实践与认识"(1989)4，32—36.
[328]尤秉礼，"山东大学学报"(1986)3，44—53.
[329]徐钧涛，"数学物理学报"(1988)4，419—426.
[330]何猛省，"数学物理学报"(1989)4，415—422.
[331]张康培，秦铁虎，"数学物理学报"(1989)2，233—240.
[332]何猛省，"数学物理学报"(1990)4，385—390.
[333]张波，"东北数学"(1986)2，127—137.
[334]黄启昌，"数学学报"(美)(1987)1，18—26.
[335]谢胜利，"数学年刊"(1990)2，164—171.
[336]温立志，"数学年刊"(1989)3，249—254.
[337]张书年，"数学年刊"(1989)5，513—520.
[338]王克，"数学年刊"(1987)4，514—517.
[339]王克，"数学年刊"(1989)3，366—372.
[340]吴建宏，"数学年刊"(1986)2，189—200.
[341]郑祖庥，非 R. N. A. 型泛函微分方程的近期进展，安大学报(1994)1.
[342]徐安石，"数学年刊"(1988)5，615—622.
[343]张康培，"数学年刊"10A，(1989)1，40—50.
[344]钱祥征，廖六生，"科学通报"32(1987)22，1756—1757.
[345]钱祥征，王志成，"科学通报"32(1987)16，1279.

[346]汤慕忠,"科学通报"32(1987)2,154—155.
[347]谢胜利,"科学通报"32(1987)12,891—896.
[348]胡力更,马万彪,"科学通报"32(1987)16,1208—1210.
[349]张炳根,"科学通报"35(1990)13,1037.
[350]赵晓强,"科学通报"34(1989)18,1435—1436.
[351]冯祐和,"科学通报"31(1986)22,1756.
[352]胡作生,"科学通报"31(1986)8,636—637.
[353]李克难,"科学通报"31(1986)4,319.
[354]章毅,"科学通报"31(1986)5,395—396.
[355]高国柱,"数学年刊"9A(1988)3,263—269.
[356]何敏,"数学年刊"8B(1987)3,320—328.
[357]胡作生,"数学年刊"8A(1987)6,749—756.
[358]阮炯,"数学年刊"10B(1989)2,143—153.
[359]阮炯,"数学年刊"7B(1986)2,237—242.
[360]阮炯,"数学年刊"9A(1988)2,151—159.
[361]阮炯,"数学年刊"8B(1987)1,114—124.
[362]阮炯,"数学年刊"5A(1984)5,605—618.
[363]高国柱,"数学年刊"9A(1988)5,589—597.
[364]陈永劭,"数学年刊"10A(1989)5,545—553.
[365]肖淑贤,"数学研究与评论"10(1990)2,294—295.
[366]潘劲松,"数学研究与评论"7(1987)1,269—276.
[367]高国柱,黄振勋,阮炯,"数学研究与评论"4(1984)2,109—110.
[368]夏华兴,"数学年刊"9A(1988)4,371—379.
[369]张勇,"数学年刊"7A(1986)5,519—527.
[370]姚久龙,"数学年刊"6A(1985)1,49—58.
[371]陈伯山,"数学学报"33(1990)3,353—358.
[372]梁进,肖体俊,"数学学报"34(1991)5,631—644.
[373]Cruz M . A . & Hale J . ,Annali Mat . Pure Appl. (4)85(1970)63—82.
[374]Lecornu J. ,Bulletin de la Société Math . de France (1899).
[375]Bailey H. R. & Reeve E. B. ,J. Lab Chin60(1962)923—943.
[376]Nikolova T. S. , Konstantinov M. M. , Bainov D. D. , Math. Balkanica 3 (1973)388—396.
[377]Konstantinov M. M. ,Math. Balkanica 3(1973)213—219.

[378]London W. P. & Yorke J., Amer. J. Epidemiology 98(1973)453—482.
[379]Tinbergen J., Econometrica 3(1935)241—308.
[380]Brayton R., Quart. Appl. Math. 24(1976)289—301.
[381]Lotka A. J., Ann. Math. Statistious Vol. 10(1939)1—25.
[382]Hale J. & Kato J., Funkcialaj Ekvacroj 1(1978)11—40.
[383]Burton T. A., Proc. Amer Math. Soc. 68(1978)195—199.
[384]Burton T. A., Funkialaj Ekvacioj 25(1982)51—77.
[385]Chow S. N., Diff. Eqns. 15(1974)350—378.
[386]Olbrot A. W., Control and Cybernetics 5(1976)№ 2.
[387]Hino Y., Proc. Symp. RIMS. Kyoto. Univ. (1977)70—83.
[388]Sawano K., Tohoku Math. J. (1977).
[389]Kappel F. & Schappacher W., J. Diff. Eqns. 37(1980)141—183.
[390]Hale J. K., J. Diff. Eqns. 9(1971).
[391]Kato J., Funkcialaj Ekvacioj 16(1973)225—239.
[392]Haddock J. R., Funkcialaj Ekvacioj 19(1976)247—269.
[393]Kurihara M., Funkcialaj Ekvacioj 22(1979)327—337.
[394]Lillo J. C., J. Diff. Eqns., 17(1975)349—.
[395]Seifere G., J. Diff. Eqns. 16(1974).
[396]Coffman C. V., J. Diff. Eqns. 16(1974).
[397]Drive R. D., J. Diff. Eqns. 21(1976)148—166.
[398]Kurihara Funkcialaj Ekvacioj 22(1979)327—337.
[399]Infante E. F., J. Diff. Eqns. 29(1978)439—451.
[400]Shanholt G. A., J. Math. Anal. Appl. 32(1970)678—683.
[401]Yorke J. A., J. Diff. Eqns. 7(1970)189—202.
[402]Terekhin M. T., д. у. Vol. 19. N. 4(1983).
[403]Angelova D. C. & Angelov V. G., Tamkang J. Math. Vol. 17. №1(1986) 113—130.
[404]Schulman L. S., J. Math. Phys. Vol. 15, №3(1974).
[405]Скубачевский А. Л., Математический Сборник, 117(159), №4(1982).
[406]Vzovskii D. A., УМЖ Vol. 25(1973)738—746.
[407]Zivotovskii L. A., ду Vol. 5(1969)880—889.
[408]Cooke K. L., Intern. Symp. Diff. Eqns. Dynamical systems. purerto Rico (1965).

[409]Hale J. K., Arch. Rat. Mech. Anal. 15(1964).

[410]Driver R. D., Contr. Diff. Eqns, 1(1963).

[411]Sephan B. H., J. Diff. Eqns. 6(1969)408—419.

[412]Konstantinov M. M. & Dainov D. D., Arch. Math. 8(1972).

[413]Konstantinov M. M. & Bainov D. D., The existence of the solutions of a systems of functional equations of superneutral type with retarded lag, Diff. Urav. (Russion)10(1974).

[414]Driver R. D., Existence theory for a delay-differential system, contributions to Diff. Eqns. I (1963).

[415]Driver R. D., A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. Internat. Sympos. Nolincar Diff. Eqns. and Nonlinear Mech. Acad. press (1963).

[416]Driver R. D., Can the future influence the present ? Phys. Rec. D. 19(4) (1979).

[417]Deh-phone K., Hsing. Existence and uniqueness theorem for the one dimentional backwards two-body problem of.

[418]Каменский Г. А. & Мышкис А. Д., Skyбачевский А. Л., УМЖ, Vol. 37, 5 (1985)581—589.

[419]Lange C. G. & Miura R. M., SIAM J. Appl. Math. 42(1982)3.

[420]Weiss L., "Lecture Notes in Math." № 144(1970)250—261.

[421]Weiss L., SIAM J. Control 5(1967)575—587.

[422]Weiss L., CIME Course on Controllability and Ohservability Edizioni Cremonese (1969)205—289.

[423]True E. D., Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 47, 1(1975)127—132.

[424]Singh B. and Kusano T., Hiroshima Math. J. 10(1980)557—565.

[425]Kulenovic M. R., S. Acta Math. Hung. 44(1—2)(1984)21—33.

[426]Philos G. C., H. Canad. Math. Bull. Vol, 27(1)(1984)102—112.

[427]Graef J. R. & Grammatikopoulos M. K., Kitamura Y., T. Kusano, J. Math. & Math. Sci. Vol. 7, 2(1984)249—256.

[428]Grossman S. E., J. Diff. Eqns. 12(1972)236—255.

[429]Garner J. B., SIAM J. Appl. Math. 4(1975)690—699.

[430]Kusano T., Proc. Amer. Math. Soc. 1(1973)219—224.

[431]Grimmer R., Tran. Amer. Math. Soc. Vol. 198(1974).

[432]Singh B. , SIAM Math. Anal.5(1975)784—795.

[433]Foster K. , J. Math. Anal . Appl. 55(1976)634—643.

[434]Hino Y. , Funkcialaj Ekvacioj 24(1981)345—349.

[435]Bernfeld S. R. , SIAM J. Math. Anal. 4(1972)654—667.
& Stavroulakis I. P. , J. Diff . Eqns. 76(1988)294—311.

[436]Каменский Г. А. д. Мышкис; д у. том z, № 3(1974).

[437]Каменский Г. А. И А д. Мишкис ду. том № 12(1971).

[438]Каменский Г. А. и А. д. Мишкис д. у. том 14 №12(1978).

[439]Каменский Г. А. д. у. том 12 № 5(1976).

[440]Каменский Г. А. А. д. Мишкис д. у. том 10 № 12(1974).

[441]Каменский г. А. и. А. д. Мишкис А. л. скп ачевский; уМж том 37 №5(1985) 581—589.

[442]郑祖庥,一类混合型 FDE 的转型点与 cauchy 问题(待发表).

[443]Shah S. M. & Wiener J. , Reduciele functional differential equations , Inter. Math.J. , & Math. Sci. 8(1985)1—27.

[444]Aftabizdeh A. R. & Yong Kong Huang , Wiener J. , J. Math. Anal. Appl. 135 (1988)31—37.

[445]Gupta C. P. , Nonlinear Anal. I I № 9(1987) 1075—1083.

[446]Gupta C. P. , Inter. J. Math. & Math. Sci.10 № 2(1987) 361—371.

[447]Cordineanu C. , Libertas. Math. 2(1982)131—139.

[448]Wiener J., Differencial'nye Uravnenije 6(1969)1131—1137.

[449]Wiener J., Differencial'nye Uravnenije (1970)1320—1322.

[450]Fargue D. M. , C. R. Acad. Sci.Paris Ser. B. 277(1973)471—473.

[451]Busenberg S. & Travis C. , J. Math. Anal. Appl. 89(1982)46—66.

[452]Shah S. M. & Wiener J. , Inter. J. Math. & Math. Sci.6(2)(1983)243—270.

[453]Cushing J. M. , "Lecture Notes in Biomathematics. № 20"Springer—Verlag. (1977).

[454]Mc Donald N. , "Lecture Notes in Biomathematics . № 27"Springer—Verlag (1978).

[455]Mazbic-Kulma B. , Studia Math . 35(1970)69—76.

[456]Bogdanov Y. S. , DAN BSSR. 5(1961)235—237.

[457]Kocurova S. , ty. 15(1980)60—68.

[458]Silberstein L. , Pilos. Magazine 30(1940)185—186.

[459]Wiener J. , Uĕen. Zap. Ryazan. Pedagog. Inst. 41(1966)5—8.
[460]Shisha O. & Mehr C. B. ,J. Nat. Burstand. 71B(1967)19—20.
[461]Lucic R. , Publ. Electrotechn. Fac. Univ . Belgrade, Ser . Math . Phys. 338—352(1971)55—56.
[462]Lucic R. ,Publ. Electrotechn. Fac. Univ . Belgrade, Ser . Math . Phys. (1974) 31—32.
[463]Lucic R. ,Publ. Electrotechn. Fac. Univ . Belgrade, Ser . Math . Phys. (1975) 133—135.
[464]Wiener J. , Izv. Vyss. Uceba. Zaved . Radiotizika 3(1973)481—484.
[465]Wiener J. ,... 10(1974)1891—1894.
[466]Cooke K. & Wiener J. , J. Math. Anal. Appl. 98(1984) 111—129.
[467]Wiener J. ,... 3 Ryazan (1974) 34—45.
[468]Sarkovskii A. N. , Akad Nauk. Ukrain. SSR Inst. Mat. Kiev. (1978).
[469]Kurdanov K. ,... 15(1979)944.
[470]Rullier R. G. , Math. Mag . 42(1969)150—200.
[471]Castelan W. G. & Infante E. F. , Quart. Appl. Math. 35(1977)311—319.
[472]Repin I. M. , ПММ. 29(1965)564—564(苏).
[473]KonstanTinov M. M. & Bainov D. D. ,УМЖ,27(1975)6,798—803.
[474]De Visme G. H. ,Math. Gaze. Vol.45(1961)13—14.
[475]Wright E. M. , Math. Gaze. Vol.45(1961)15—16.
[476]Erdos P. & Vanlint J. H. , Proceedings A 85(1982)127—132.
[477]贾朝华,素数定理的一个推广,数学进展,Vol.16,№4(1987)419—426.
[478]郑祖庥,吴汉忠,关于素数分布的泛函微分方程(待发表).
[479]Eder E. , J. Diff. Eqns. 54(1984)№ 3.
[480](王克)Wang Ke ,on the equations $x(t)=f(x(x(t)))$ Funkcialsj Ekvacioj 33 (1990)3,405—425.
[481]吴汉忠,方程 $x(t)=f(x(x(t)))$ 解的存在性及其渐近性态(安大硕士论文,待发表).
[482]Petuhov V. R. , "Trudy Sem. Teor. Diff. Uravnenii Otklon. Argument. Univ. Druzby Narodov Patrisa Lumumby"4(1967)139—148,及另一篇 149—153.
[483]Petahov V. R. , "同[82]文集"3,(1965)252—255.
[484]Dunkel G. M. , SIAM. J. Appl. Math. 18(1970)514—525.
[485]Dunkel G. M. , "Lecture Notes in Math." Vol. 144(1970).

[486]Pelczar A., Zeszyty Nauk. Univ. Jagiello Prace Mat. № 12(1968)53—56(及 13 (1969)49—51).
[487]Sarkorskii A. N., Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukrain SSR, Kiev(1974).
[488]Minsker S., J. Diff. Eqns. 45(1982)№ 2, 182—190.
[489]Minsker S., J. Diff. Eqns. 26(1977)№ 3, 443—457.
[490]郑祖庥,关于泛函微分方程类和若干 Cauchy 问题,"池州师专学报"3(1990).
[491]Robinson. L. B., Math. Mag. 23(1950)183—188.
[492]Petuhov V. R., Vestnik Leningrad, Univ. 22(1967)146—147.
[493]Petuhov V. R.,(同[82]文集)3(1965)214—220.
[494]Petuhov V. R.,(同[82]文集)7(1969)183—188.
[495]Gusarenka S. A., F. D. E. (Russian), 26—29 ii—iii perm. poldtekhm Inst. perm (1985)MR. 899;34100.
[496]Feldstein A. & Neves K. W., SIAM J. Numer. Anal. 21(1984)№ 5, 844—863.
[497]Onoseu. Bull. Fac. Sci. baraki Univ. Ser. A № 13(1981)29—43.
[498]Svitra D. I., Vestnik. Jaroslov Univ. Vyp. 10(1974)157—160.
[499]Celeman B. D., Arch. Rationl Mech. Anal. 23 (1966) 87—123.
[500]Norkin S. B., Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. 2(1962)343—348.
[501]Zverkin A. M.,(同[82]论文集)8(1972)53—70.
[502]Zverkin A. M. & Kamenskii G. A., S. B. Norkin. Uspehi Mat. Nauk 15(1960)№ 6 (96)133—136.
[503]Grimm L. J. & Schmitt K., Aequationes Math. 4(1970)176—190.
[504]Grimm L. J., Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971) 467—473.
[505]Minsker S., J. Math. Anal. Appl. 99(1984) №1, 1—8.
[506]Milusheva S. D. & Bainov D. D., Nonlinear Anal. 7(1983)№ 11, 1255—1269.
[507]Stephan B. H., SIAM. J. Appl. Math. 17(1969)272—279.
[508]Stephan B. H., SIAM. J. Appl. Math. 19(1970)527—531.
[509]Shin Jong-Son, Tokgo J. Math. 6(1983)№ 1, 109—124.
[510]Jackiewicz Z., Funkcial. Ekvac. 30(1987) № 1, 9—17.
[511]Milusheva S. D. & Bainov D. D., J. London Math. Soc. (2)25(1982)№ 2, 309—331.
[512]Aliev R. M. & Mamredov G. K., Functional Analy. and its Appl. (Russian) 31—40.

[513]Neves K. W. & Feldstein A. ,J. Math. Anal. Appl. 56(1976) № 3,689—707.
[514]Winston E. , J. Diff. Eqns. 7(1970)395—405.
[515]Hristova S. G. & Bainov D. D. ,Bul. Inst. Politek. Bucaresti Ser. Mec. 42 (1980) № 3,3—7.
[516]Le Suan Kou, YMK 32(1980) № 6,818—824.
[517]Bulgakov A. I. & Maksimov V. P. ,17(1981) № 8,1362—1374.
[518]Fedorenko. L. G. , YMK. 22(1970)258—263.
[519]Schmitt K. ,Equations Diff. et Fonction, non Linearos Actes Conference Inter. "E—D"Bruxelles et Louvainla Neuve (1973)65—78.
[520]Grossman S. E. & York J. ,J. Diff. Eqns. 12(1972) 236—255.
[521]Neimark J. I. & Fisman L. Z. ,(MR. 1968. NOV. 5470).
[522]Angelova D. C. , Arch. Math. (Brno) 21 (1985) № 3,135—146.
[523]Angelova D. C. & Bainov D. D. ,Tsukuba J. Math. 5(1981) № 1,39—96.
[524]Gusarenko S. A. & Zhukovskii E. S. , Makimov V. P. ,д АНСССР,287(1986) № 2, 268—272.
[525]Angelova D. C. & Angeloy V. G. ,Tamkang J. Math. 17(1986)№ 1.
[526]Angelova D. C. & Bainov D. D. ,Tom Kong J. Math. 13(1982) №1,69—78 (MR. 84a,34085).
[527]Bainov D. D. & Milusheva S. D. , Rend. Mat. Univ. Politec. Torino. 40 №1, 139—161.
[528]Angelova D. C. & Bainov D. D. ,Math. Nachr. 122 (1985) 289—340.
[529]徐道义,Publ. Iust. Math. (Belgrad)(N. S)39(53)(1986)135—147.
[530]徐道义,Bull. Un. Mat. Ztal. B(6) (1982) № 2, 797—807.
[531]徐道义,Rend Circ. Mat. Palermo (2) 30 (1981) № 3,435—452.
[532]Skripnik V. P. ,Izv. Vyss. Ucebn. Zared. Mat. (1971) № 6,109—.
[533]Skripnik. V. P. ,д у. 9(1973) 1049—1057.
[534]Skripnik V. P. ,д. Mat. Sb. (N. S)68 (110)(1965) 274—281.
[535]Skripnik V. P. ,д у 14(1978) № 5, 853—858.
[536]Skripnik V. P. ,д уMK29(1977) № 5.
[537]Skripnik V. P. ,д у13(1977) № 8 ,1552—.
[538]Skripnik V. P. , д у12(1976) № 9.
[539]Skripnik V. P. , ду11(1975) № 5.
[540]Skripnik V. P. , YMK13(1981).

[541]Stogarov N. V. & Mishev D. P. ,Godisnik. Vissh. Uchebn. Zaved. Prilozhen. Mat. 18(1982) № 1.

[542]Skripnik V. P. ,(同[132]代读)(1979)№ 5,52—57.

[543]Milusheva S. D. & Bainov D. D. , (MR83a:34093).

[544]Angelov V. G. ,Funkcial. Ekvac. 24(1981) № 1.

[545]Bullock. R. M. ,SIAM. Rev. 9(1967) 737—740.

[546]Bainov D. D. & Milusheva S. D. , J. Math.Anal. Appl. 95(1983) № 1,85—105.

[547]Skripnik V. P. ,MM. 3T(1973) 159—162.

[548]Skripnik V. P. ,YMK. 26(1974) 196—204.

[549]Singh B. , Funkcialaj Ekvacioj 23(1980)63—81.

[550]Graef J. R. and Kusano T. , Onose H. , Spikes P. W. ,Funkcialaj Ekvacioj 26 (1983)11—16.

[551]Singh B. , SIAM J. Math. Anal. 6(1975)784—795.

[552]Kusano T. and Onose H. , Proc. Amer. Math. Soc.66(1977)251—257.

[553]Hale J. K. , Lecture Notes in Math. Vol.730,157—193.

[554]Singh B. and Dahiya R. S. , J. Math. Anal. Appl. 47(1974)504—512.

[555]Kappel F. , SIAM J. Appl. Math. 2(1970).

[556]Lopes O. , SIAM. J. Appl. Math. 29(1975)196—207.

[557]Melvin W. R. ,J. Math.Anal. Appl. 48(1974)749—763.

[558]Kato J . , Funkcialaj Ekvacioj 21(1978).

[559]Seifert G. , J. Diff. Eqns.16(1974).

[560]Grimmer R. and Seifert G. , J.Diff. Eqns.19(1975).

[561]Nussbaum R. D. , Ann. Math . Pure. Appl. 10(1974)263—306.

[562]Nussbaum R. D. , J. Math. Anal. Appl. 35(1971)600—610.

[563]Nussbaum R. D. , Trans. Amer. Math. Soc.171(1972)349—375.

[564]Massera J. L. , Duke Math. J. 17(1950)457—475.

[565]Ladas G. and sficas Y. G. , I. P. Stavroulakis Proc. Amer . Math. Soc. 2 (1983)247—253.

[566]Kusano T. and Onose H. , J. Math. Soc. Japan 29(1977)541—559.

[567]Onose H. , Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Math. 13(1981)29—43.

[568]Onose H. , Hiroshima Math . J. Vol.3,2(1973).

[569]Kusano T. and Onose H. ,Proc. Japan Acad . 50 (1974)809—811.

[570]Graet J. R. , Funkciaj Ekvacioj 18(1975)35—40.

[571]Braner F., J. Diff. Eqns .28(1978)180—188.
[572]Grimmer R. C., J. Math, Aual. Appl. 72(1979).
[573]Naito T., J. Diff. Eqns.21(1976)291—315.
[574]Burton T. A. and Haddock J. R., J. Math. Anal. Appl. 54(1976)37—48.
[575]Kartsatos A. G., J. Math. Anal. Appl. 52(1975)1—9.
[576]Hino Y., Tôhokn Math. J. 35(1983)597—605.
[577]Kato J., Tôhokn Math. J. 32(1980)499—504.
[578]Burton T. A., Funkcialaj Ekvacioj 22(1979)67—76.
[579]Yoshizawa T., J. Diff. Eqns.4(1968)121—129.
[580]Kaplan J. L. and Yorke J. A., J. Math. Aualy. Appl. 48(1974)317—324.
[581]Wight E. M., J. Reine Aug. Math. 194(1955)66—87.
[582]Jones G. S., J. Math. Anal. Appl. 5(1962)435—450.
[583]Burton T. A., Funkcialaj Ekvacioj Vol.25, 1(1982).
[584]Shanholt G. A., J. Math. Anal. Appl. 32(1970)678—683.
[585]Infante E. F., J. Diff. Eqns.29(1978)439—451.
[586]Kaminogm T., Tôhoku Math. J. 30(1978).
[587]Beklayan L., A. Mat. Zametki 44(1988)5, 561—566.
[588]Kappel F., Nonlinear Anal. 10(1986)5, 503—513.
[589]Erbe L. H. and Zhang B. G., Bull Austral. Math. Soc. 39(1989)1, 71—80.
[590]Haddock J. R., Funkcial Ekvac. 31(1988)3, 349—361.
[591]张小明,关于线性 DDE 点态退化的充要条件,安徽大学硕士论文(1993)(待发表).
[592]郑祖庥,线性自治 DDE,第二届福州国际微分方程会议综合报告(待发表).